Rund ums Fünfeck

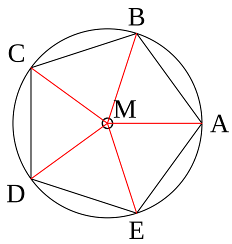
Andreas Bartholomé *
Schirmgasse 275
84028 Landshut

27. Oktober 2004

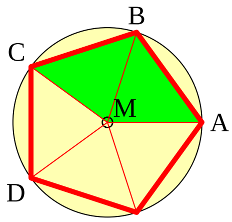
Inhaltsverzeichnis

*email:andreas.bartholome@t-online.de

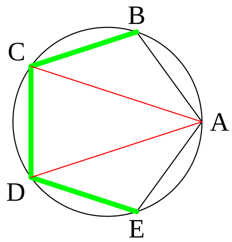
1 Das Fünfeck

- 

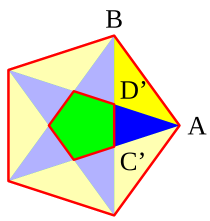
Ein Vieleck, dessen Seiten alle gleich lang sind und dessen Ecken alle auf einem Kreis liegen heißt regulär. Ein reguläres Fünfeck ist einem Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt M einbeschrieben. Der Winkel bei M ist: $\angle CMD = \frac{360}{5} = 72^0$. Der Winkel an jeder Ecke ist $\angle ABC = \frac{540}{5} = 108^0$.

- 

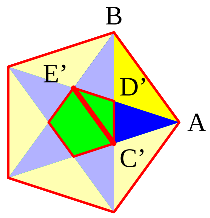
Sind in einem Fünfeck die Seiten gleich lang und die Winkel gleich groß, so ist es regulär.
Das gleichschenklige Dreieck $\triangle ABC$ hat einen Umkreis $K(M,r)$. Die beiden Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle BCM$ sind kongruent wegen dem Kongruenzsatz SSS. Also ist $\angle MAB = \angle MBC = 72^0$. Daher ist $\angle MCD = 72^0$. Dreieck $\triangle BCM$ ist somit kongruent zum $\triangle CDM$ wegen SWS. Also ist $DM = r$ und D liegt auf dem Kreis $K(M,r)$.

- 

Die Teilwinkel an jeder Ecke sind alle gleich groß. Also sind sie beim regulären Fünfeck jeweils 36^0.

- 

Die Dreiecke $\triangle D'C'A$ und $\triangle BD'A$ sind gleichschenklig. Daher sind die spitzen Dreiecke des inneren Sterns ($\triangle D'C'A$ die Zacken) alle untereinander kongruent. Genauso sind die stumpfwinkeligen Dreiecke untereinander kongruent. Das innere Fünfeck $A'B'C'D'E'$ ist also auch ein reguläres Fünfeck.

- 

Auch das Dreieck $\triangle BE'C'$ ist gleichschenklig, da es gleiche Basiswinkel hat. Bezeichnen wir mit a_0 die Diagonale des Fünfeckes mit a_1 die Seite des Fünfeckes und a_2 die Diagonale des inneren Fünfeckes, so ergibt sich:

$$a_0 = a_1 + \overline{D'B} = a_1 + a_2. \tag{1}$$

Die folgende Zeichnung fasst die Ergebnisse nochmal zusammen.
Das innere Fünfeck hat wieder eine Seite a_3 und so weiter. Man erhält:

$$\begin{array}{ccc} a_0 & = & a_1 + a_2 \\ a_1 & = & a_2 + a_3 \\ \vdots & = & \vdots \end{array} \tag{2}$$

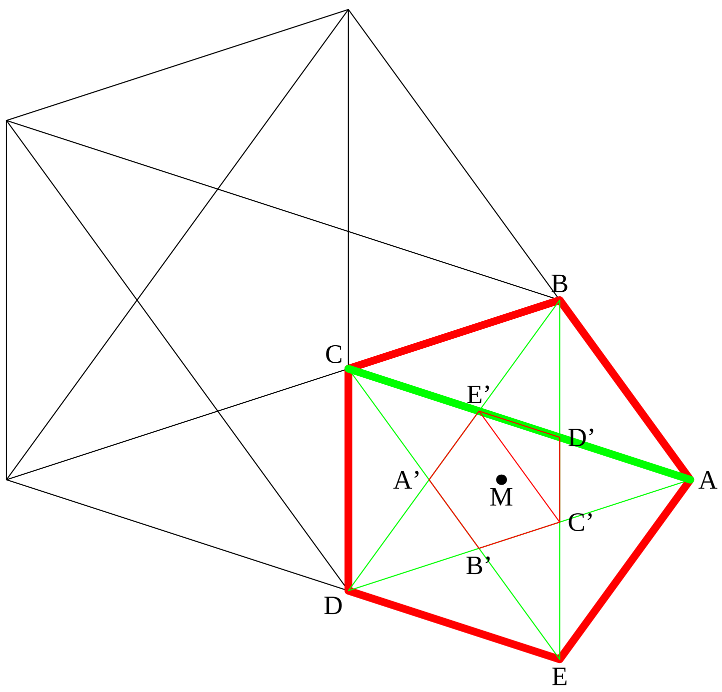


Abbildung 1: Das Fünfeck

Das kann man so weiter machen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2a_2 + a_3 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \cdot (a_0 - a_1) \\ a_2 &< \frac{1}{2} \cdot a_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ein gemeinsames Maß e von a_0 und a_1, ist daher gemeinsames Maß von a_0 und a_1,$a_2 \ldots$. Es ist daher $e < (\frac{1}{2})^n \cdot a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies geht nicht. Daher haben Diagonale und Seite im regulären Fünfeck kein gemeinsames Maß. Das $\triangle ABE \sim \triangle AE'C'$. Es ist daher $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$. Beachtet man Gleichung 1 so sieht man:

$$\frac{a_0}{a_1} = 1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{1}{\frac{a_0}{a_1}}$$

Mit $\Phi = \frac{a_0}{a_1}$ folgt:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}^{1} \tag{4}$$

Aufgaben:

1. Lassen sich die Überlegungen zum regulären Fünfeck ohne Umfangswinkelsatz durchführen?
2. Kann man die Gleichung 4 direkt an der Figur nur mit dem Strahlensatz erkennen?

[1] Nach Knuth [Knu73, Seite 79] wählt man die Bezeichnung Φ wegen dem griechischen Bildhauer Phidias.

3. Möchte man ein reguläres Fünfeck mit der Seite $b = 1$ konstruieren, so ist die Diagonale a zu konstruieren. Es ist also geometrisch die Gleichung $a = 1 + 1/a$ zu lösen. Oder $(a - 1/2)^2 = 5/4$. Dies gelingt mit dem Höhensatz oder dem Kathetensatz von Euklid.
4. (In Gedenken an Euklid): [Euk73, Seite 83 ff]
   (a) Beschreibe einem Kreis ein reguläres Fünfeck ein.
   (b) Konstruiere ein reguläres 15 Eck.
5. Betrachtet man das Fünfeck nocheinmal sinnend, so sieht man,: Es gibt eine zentrische Streckung, welche $[AB]$ in $[E, C]$ abbildet. Der Streckfaktor ist Φ. Beachte die Abbildung 2.

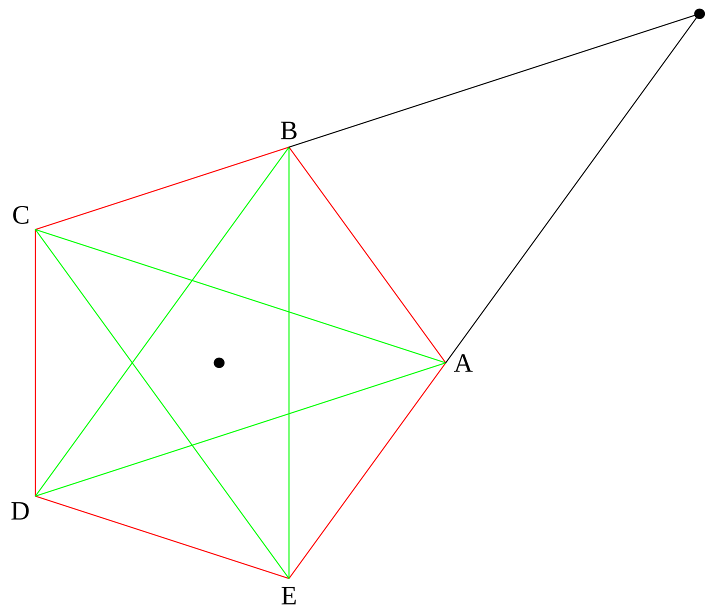


Abbildung 2: Gestreckt

6. Wendet man die Umkehrung der zentrischen Streckung etwa 5 mal an so erhält man die Abbildung 3.
7. Der Winkel am Streckzentrum ist 36^0. Das ist der Winkel im Bestimmungsdreieck des 10 Ecks. Man erhält also eine schöne Figur, wenn man diesen Schweif 10 mal ums Zentrum dreht. Dabei geht B in A über und C in E. Siehe Abbildung 3.
8. Eine andere Figur erhält man, wenn man um den Mittelpunkt des ursprünglichen Fünfecks dreht. Warum gibt es solche Schneeflocken nicht? Siehe Abbildung 4. [2]
9. Wie oft umläuft man den Mittelpunkt des Kreises, wenn man auf dem Pentagramm langläuft? Wie sieht es beim Siebeneck aus. Da gibt es mehrere solche Sterne.

[2] Die Zeichnungen sind mit dem Programm Metapost gemacht. Es ist eine Abwandlung des Programms Metafont, welches von Knuth geschaffen wurde um die Zeichensätze von TEX zu erzeugen. Es trifft sich gut, dass der Name ähnlich klingt wie Metapont. Daher stammt der arme Hippasos. Für seine Erkenntnisse am Fünfeck belohnte ihn der Gott Poseidon mit Tod durch ertrinken

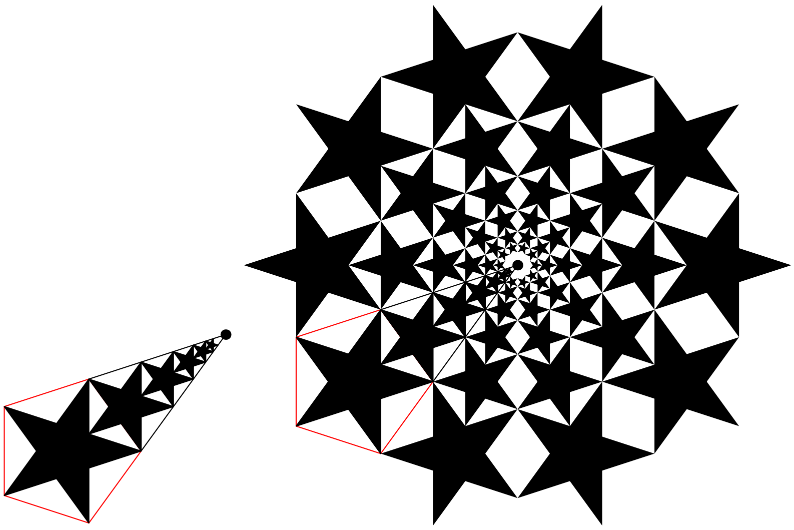


Abbildung 3: Fuenfecke

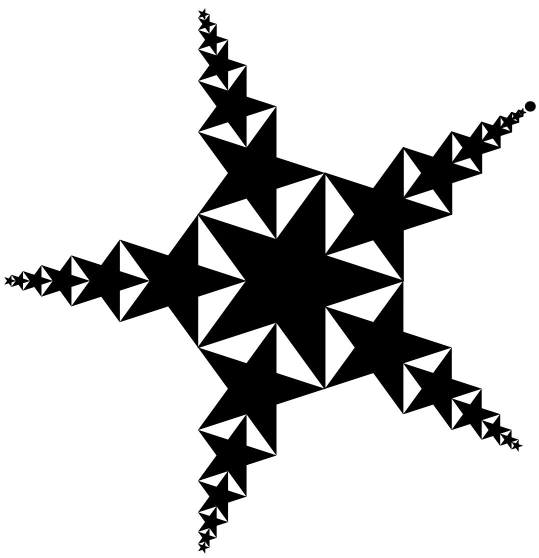


Abbildung 4: Fünfflocke

10. Wieviel verschieden Sterne sind möglich in einem regulären n Eck? Wie groß sind jeweils die Umlaufzahlen?
11. Leite ähnlich wie oben (geometrisch) her, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Möchte man studieren wie man eine Sache nicht erklärt sondern nur schwafelt, so gelingt dies z.B. auf einer Internetseite von GEO
`http://www.geo.de/GEO/wissenschaft_natur/2001_12_GEO_unendlichkeit_denker/`

2 Fibonacci Zahlen

> „Die Konstruktion beider Körper (Dodekaeder Und Ikosaeder), vor allem aber die des Fünfecks selbst, ist nicht durchführbar ohne jene Proportion, die die heutigen Mathematiker die göttliche nennen. Diese ist aber so beschaffen, daß die beiden kleineren Glieder einer stetigen Proportion zusammen das dritte ergeben, und in dieser Weise bildet immer die Summe zweier benachbarter Glieder das unmittelbar folgende, wobei die gleiche Proportion bis ins Unbegrenzte fortgeht. In Zahlen das Ergebnis vollkommen auszudrücken ist unmöglich. Je weiter wir uns jedoch von der Einheit entfernen, desto besser wird die Annäherung. Es seien die beiden kleinsten Zahlen 1, und 1 , die Du Dir als ungleichwertig vorstellen musst. Addiert ergeben sie 2. Die größere hinzu addiert ergibt 3 ...
>
> Nach Analogie dieser sich fortsetzenden Proportion ist, wie ich glaube, das Zeugungsvermögen versinnbildlicht, und so wird in der Blüte dem Zeugungsvermögen ein unverfälschtes fünfzackiges Fähnlein vorangetragen.“ [KepII, Seite 18]

Betrachten wir aufs Neue die am Fünfeck rekursiv (oder besser fortgreifend je nach dem wie man es anschaut) definierte Folge.

$$a_n := a_{n+1} + a_{n+2} \tag{5}$$

Es entsteht eine Folge von Zahlen, die ins unendlich kleine fortfährt. Man kann sich vorstellen, sie kommt aus dem unendlich Großen. Ein Fünfeck, welches sich zusammenzieht kollabiert. Oder wir fassen es als ein Fünfeck auf welches explodiert aus dem Urknall entsteht. In jedem Fall sucht man nach Anfang und Ende und findet nichts. Es ist ein schönes Beispiel für die These eines Kollegen von mir Herrn Agerer. Er ist Hobbyastronom. Vielleicht schauen wir, wenn wir ins Universum blicken in den Mikrokosmos und umgekehrt. Möglicherweise schließt die Unendlichkeit das Gigantische mit dem winzigen in einem Kreis zusammen. Eine Vorstellung, die nur auf den ersten Blick hin absurd ist. Auf jeden Fall ist es auch in unserm Fall künstlich der Folge einen Anfang oder ein Ende zu geben.

Definition 2.1 *Ist $f : \mathbb{Z} \to V$ eine Funktion, wobei V ein Vektorraum ist, so heißt f eine $\mathbb{Z}$ Folge. Die Folge heißt golden, wenn für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $f(z) = f(z+1) + f(z+2)$. Sie heißt Fibonacci Folge, wenn $f(z+2) = f(z+1) + f(z)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt. Ist $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und $f(z+2) = f(z+1) + f(z)$ so spricht man von der Fibonacci Folge schlechthin*

Satz 2.1 *Die Menge der Fibonacci Folgen bilden einen zweidimensionalen Unterraum der Folgen.*

Beweis: Sind $f, g \in Fib$, so gilt $(f+g)(z+2) = f(z+2)+g(z+2) = (f+g)(z+1)+(f+g)(z)$. Die Fibonaccifolge selber ist in Fib. Außerdem ist $g(z) := f(z+1)$ sicher eine Fibonacci Folge. Behauptung: Ist h eine Folge in Fib, so gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $h = f\alpha + g\beta$
Wir wählen $\beta = h(0)$ und $\alpha = h(1) - h(0)$ und behaupten $h(z) = f(z)\cdot\alpha + g(z)\cdot\beta$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Für $z = 0, z = 1$ ist dies sicher richtig. Gelte die Behauptung für z. Dann folgt $h(z+1) = h(z)+h(z-1) = f(z)\cdot\alpha+f(z-1)\cdot\alpha+(g(z)+g(z-1))\cdot\beta = f(z+1)\cdot\alpha + g(z+1)\cdot\alpha$. Damit folgt die Behauptung für alle positiven $z \in \mathbb{Z}$. Für die negativen z ist die Behauptung genauso einfach. $\square$

Betrachten wir auf neue die goldene Folge $(a_z | z \in \mathbb{Z})$. Schreibt man sie als Zuordnung zwischen Zahlenpaaren, so sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a_{z+1} \\ a_{z+2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_z \\ a_{z+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{z+1} + a_{z+2} \\ a_{z+1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Hinweise:

1. Die Gleichung 6 ist ein Spezialfall einer so genannten linearen Rekursionsgleichung: $X_{n+2} := a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungen solcher Rekursionsgleichungen bilden stets einen zweidimensionalen Vektorraum. Der Beweis überträgt sich unschwer auf die allgemeine Situation.

Die Gleichung 6 definiert einen Homomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Die zugehörige Matrix ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Satz 2.2 *Sei* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *, so ist:*

1. $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ *und* $(f(n) | n \in \mathbb{Z})$ *ist die Fibonaccifolge* $f_0 = 0$ *und* $f_1 = 1$.
2. $det(F^n) = (-1)^n$. *Das heißt* $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$
3. $F^{-n} = (-1)^n \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$

Beweis: Zu 1. Es ist $F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ nach Definition. Erklärt man noch $f_{-1} = 1$, so ist die Behauptung auch für F^0 erfüllt.
Gelte die Behauptung für F^n. Dann ist

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_n + f_{n-1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu 2. $det(F^n) = (-1)^n = f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2$.

Zu 3.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 & f_n f_{n-1} - f_n f_{n-1} \\ -f_n f_{n+1} + f_n f_{n+1} & -f_n^2 + f_{n-1}f_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.3 *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

1. $\dfrac{f_{2k+1}}{f_{2k}} > \dfrac{f_{2k}}{f_{2k-1}}$
2. $\dfrac{f_{2k+2}}{f_{2k+1}} < \dfrac{f_{2k+1}}{f_{2k}}$
3. $\dfrac{f_{2k}}{f_{2k-1}} < \dfrac{f_{2k+2}}{f_{2k+1}}$

Beweis: Zu 1. $\dfrac{f_{2k+1}}{f_{2k}} - \dfrac{f_{2k}}{f_{2k-1}} = \dfrac{f_{2k+1}f_{2k-1} - f_{2k}^2}{f_{2k}f_{2k-1}} = \dfrac{(-1)^{2k}}{f_{2k}f_{2k-1}} > 0$. Genauso rechnet man 2. und 3. nach. □

Wir haben daher die folgende Situation:

$$\frac{f_2}{f_1} < \frac{f_4}{f_3} \dots \frac{f_{2k}}{f_{2k-1}} < \frac{f_{2k+1}}{f_{2k}} \dots \frac{f_5}{f_4} < \frac{f_3}{f_2}$$

Links klettert man hoch rechts runter. Dazwischen wohnt eine besondere Zahl. Beide Folgen sind in die entsprechende Richtung beschränkt. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergieren beide. Zu zeigen bleibt: Sie haben den gleichen Grenzwert:

Satz 2.4 *Die Folge $(a_n) = \left(\dfrac{f_{n+1}}{f_n}\right)$ konvergiert. Ihren Grenzwert ist die größere Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Also der Grenzwert ist Φ*

Beweis: Wir wissen schon

$$\frac{f_{2k+1}}{f_{2k}} - \frac{f_{2k}}{f_{2k-1}} = \frac{(-1)^{2k}}{f_{2k}f_{2k-1}}$$

Beachtet man noch, dass $f_n \geq n$ ist, so folgt, dass die Differenz eine Nullfolge ist. Sei $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ Es ist

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

Schreibt man den Limes davor so erhält man: $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Daher ist $\alpha = \Phi$.

□

Folgerung 2.5 *Ist $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit beliebigem $a, b > 0 \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen Φ.*

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{f_{n+1}a + f_n b}{f_n a + f_{n-1} b} \\ &= \frac{\frac{f_{n+1}}{f_n}a + b}{a + \frac{f_{n-1}}{f_n}b}\end{aligned}$$

Schreibt man lim davor, so erhält man: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Phi a + b}{a + \frac{b}{\Phi}} = \frac{\Phi(a+\frac{b}{\Phi})}{(a+\frac{b}{\Phi})} = \Phi.$ □

Eine Frage ist: Für welche Startwert lässt sich die goldene Folge beliebig anständig fortsetzen? Das heißt: Wann sind die weiteren Folgenglieder stets positiv?

Satz 2.6 *Eine goldene Folge* $a_z = a_{z+1} + a_{z+2}$ *enthält genau dann nur positive Glieder, wenn* $a_0 > 0$ *und* $\frac{a_0}{a_1} = \Phi$ *ist.*

Beweis: Wir haben $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdots = F^n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$. Also ist

$$F^{-n}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Beide Komponenten sind > 0.

$$F^{-n} = (-1)^n \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$$

Für alle geraden n folgt

$$\begin{aligned} f_{n-1}\cdot a_0 - f_n \cdot a_1 &= a_n > 0 \\ \frac{a_0}{a_1} &> \frac{f_n}{f_{n-1}} \\ -f_n \cdot a_0 + f_{n+1}\cdot a_1 &= a_{n+1} > 0 \\ \frac{a_0}{a_1} &< \frac{f_{n+1}}{f_n} \end{aligned}$$

Dies gilt für alle geraden n. Der Grenzwert beider Seiten ist Φ. Also ist $\frac{a_0}{a_1} = \Phi$. □

Der Homomorphismus F operiert transitiv auf der Geraden $\begin{pmatrix} \Phi \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R} = U$. Der Unterraum U ist abgeschlossen gegenüber F und F^{-1} und damit abgeschlossen gegenüber jedem Homomorphismus der Form $Id\alpha + F\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgaben:

12. $f_n \leq \Phi^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
13. $f_{n+m} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$
14. $f_{n\cdot k}$ ist Vielfaches von f_k
15. $\mathrm{ggT}(f_m, f_n) = f_{\mathrm{ggT}(m,n)}$. Dabei ist $\mathrm{ggT}(a,b)$ der größte gemeinsame Teiler von a und b.
16. Es sei $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die größere Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Und $\overline{\Phi}$ die kleinere Lösung dieser Gleichung: Man zeige:

(a) $K = \mathbb{Q}[\Phi]$ ist ein Körper und $\alpha : K \ni a + b\Phi \mapsto a + b\overline{\Phi} \in K$ ist der einzige Automorphismus $\neq Id$, der $\mathbb{Q}$ festlässt.

(b) $f_n = \dfrac{\Phi^n - \overline{\Phi}^n}{\Phi - \overline{\Phi}}$.

(c) Die Folge $a_n = \dfrac{\Phi^n + \overline{\Phi}^n}{\Phi + \overline{\Phi}}$ ist eine Folge natürlicher Zahlen, mit der Fibonaccieigenschaft. Sie heißt zugehörige Lucas Folge.

17. Sei $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \ni x \mapsto \dfrac{x+1}{x} \in \mathbb{R}$. Man definiert rekursiv eine Folge $a_0 = 1$ und $a_{n+1} := f(a_n)$. Konvergiert die Folge? Wenn ja spielt der Startwert eine Rolle? Wie sieht es bei negativen Startwerten aus?

18. Eine Fülle weiterer Aufgaben findet man in [Knu73, Seite 78 ff]

3 Kommensurable Größen

Wenn die Welt aus kleinsten Teilchen aufgebaut ist, so sollte zumindest die Göttin der Wissenschaft, Athene, Atome finden können. Reihen sich Atome in der Diagonale und der Seite des Fünfeckes lückenlos aneinander, und sind Diagonale und Seite aus dem gleichen Material, so sollte das Atom ein gemeinsames Maß für beide sein. Euklid erklärt in [Euk73, Seite 213]: Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maß gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt. Wenn man den Begriff „Größe“ durch Zahl ersetzt ergibt sich die Definition:

Definition 3.1 *Zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ heißen kommensurabel, oder haben ein gemeinsames Maß, wenn es eine Zahl e und ganze Zahlen n, m gibt mit $a = e \cdot n$ und $b = e \cdot m$*

Eine Zahl e teilt eine Zahl a, wenn es eine ganze Zahl n gibt mit $a = n \cdot e$. Dann haben zwei Zahlen genau dann ein gemeisames Maß, wenn sie einen gemeinsamen Teiler haben. Wie findet man ein gemeinsames Maß? Das entscheidende Hilfsmittel ist der heimliche Hauptsatz der Algebra: Er lautet:

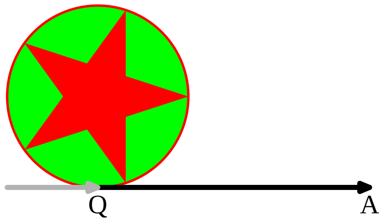
Satz 3.1 *Für einen geordneten Körper K sind äquivalent:*

1. *$\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt in K.*
2. *Zu jedem $k \in K$ gibt es genau eine ganze Zahl $[k] \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k - [k] < 1$.*
3. *Zu je zwei positiven Zahlen $a \geq 0, b > 0$ gibt es $0 \leq r < b$ und $q \in \mathbb{N}$ mit*

$$a = q \cdot b + r \tag{8}$$

Beweis:
1. bedeutet, dass der Körper archimedisch angeordnet ist.
1. $\Longrightarrow$2. Eine Zahl $k \geq 0$ beschränkt $\mathbb{N}$ nicht nach oben. Daher gibt es eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $k < n+1$. Also ist $n \leq k < n+1$ und daher $0 \leq k-n < 1$. Ist $k < 0$ so ist $-k > 0$. Es gibt eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $(n-1) < -k < n$. Also $-n \leq k < -n+1$. Mit $z = -n$ folgt $0 < k - z = r + n < 1$. Das heißt zu jedem $k \in K$ gibt es ein solches z. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.
Aus $0 \leq k - z_1 < 1$ und $0 \leq k - z_2 < 1$ folgt $|z_1 - z_2| < 1$. Und daher ist $z_1 = z_2$.

2. $\Longrightarrow$3. Es ist $0 \leq \frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]$. Mit $b > 0, q = \left[\frac{a}{b}\right]$ und $r = \left(\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]\right) \cdot b$ folgt die Gleichung 8.
3.$\Longrightarrow$1.: Sei $a \in K$ und $a > 0$. Zu $b = 1$ gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $a = q \cdot b + r$ und $r < 1$. Daher ist $a < q + 1$. Das heißt K ist archimedisch angeordnet. □



Der Satz hat eine ganz anschauliche Bedeutung. Beginnt ein Rad mit dem Umfang b auf der Zahlengeraden bei 0 zu rollen, so erreicht es schließlich jede noch so große Zahl a. Es gibt eine Zahl q von Umdrehungen derart, dass das Rad gerade noch vor a sich befindet. Der Rest der vom Rad noch abrollt ist kleiner als der Umfang b.

Dieser Satz 3.1 ermöglicht es von zwei Zahlen ein gemeinsames Maß zu finden falls es existiert. Wie das funktioniert lehrte schon Euklid [Euk73, Seite 143].
Wegen der Gleichung 8 ist das größte gemeinsame Maß von a und b auch größtes gemeinsames Maß von b und r. Also es gilt `ggM(a,b)=ggM(b,r)`. Führt dieser rekursive Algorithmus zum ersten Mal auf ein Zahlenpaar $(d, 0)$ so ist d das größte gemeinsame Maß der beiden Zahlen. Dieser Algorithmus heißt euklidischer Algorithmus.
Es kann aber sein, dass der Algorithmus unendlich lange läuft also nicht abbricht. Dann entsteht eine unendliche Folge (a_n) mit der Eigenschaft: $a_n = q_{n+1} \cdot a_{n+1} + a_{n+2}$, wobei q_n natürliche Zahlen ≥ 1, und alle a_n 0 sind. Zum bequemeren Sprechen will ich solche Folgen euklidische Folgen nennen.

Hilfssatz 3.2 *Ist (a_n) eine euklidische Folge, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_{2 \cdot n} \leq \frac{1}{2^n} a_0 \tag{9}$$

Dies ist genauso wie in der Ungleichung 3

Beweis: Sicher ist $a_0 \leq a_0$. Gelte die Behauptung für n: $a_{2n} \leq \frac{1}{2^n} \cdot a_0$. Es ist:

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= q_{2n+1} \cdot a_{2n+1} + a_{2n+2} \\
a_{2n+1} &= q_{2n+2} \cdot a_{2n+2} + a_{2n+3} \\
a_{2n+2} &= \frac{1}{q_{2n+1} \cdot q_{2n+2} + 1} \cdot (a_{2n} - q_{2n+1} \cdot a_{2n+3}) \\
a_{2n+2} &< \frac{1}{2} \cdot a_{2n} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot a_0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung durch vollständige Induktion. □
Als Folgerung ergibt sich das Kriterium für Kommensurabilität von Euklid:

Satz 3.3 (Euklid) *Der euklidische Algorithmus bricht genau dann ab, wenn die Startzahlen a, b ein gemeinsames Maß haben. [Euk73, Seite 214]*

Beweis: Bricht die Folge ab, so ist das letzte Folgenglied > 0 gemeinsames Maß der Startwerte a, b. Man überlegt sich auch, dass dies das größte gemeinsame Maß ist.

Bricht die Folge nicht ab, so entsteht mit $a_0 = a$ und $a_1 = b$ eine euklidische Folge. Man argumentiert nun genauso wie im Falle des Fünfecks, dass es kein gemeinsames Maß geben kann. $\square$
Betrachtet man aufs neue die durch zwei Zahlen a, b erzeugte euklidische Folge, so sieht man durch Induktion, dass jedes Element der Folge in dem $\mathbb{Z}$–Modul $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ ist.
Hinweise:

2. Euklid definiert in dem V. Buch 4. „Dass sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können." [Euk73, Seite 91]. Das heißt in unserer Sprache: Zwei Zahlen a, b haben ein Verhältnis genau dann, wenn es $n, m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \cdot a > b$ und $m \cdot b > a$. Sicher wusste er, dass es andere Größen geben kann. Sonst hätte er dies nicht eigens definiert. Die Namensgebung „archimedischer" Körper ist also – wie so oft Namensgebungen in der Mathematik– falsch. Euklid kannte die Eigenschaft lange vor Archimedes. Heute weiß man, dass es geordnete Körper gibt, in denen $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist, sogenannte hyperreelle Zahlen.
3. Ist K archimedisch, dies wollen wir in Zukunft voraussetzen, so sind q und r im Satz 3.1 eindeutig bestimmt.

Satz 3.4 *Äquivalent sind für $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. *a, b sind inkommensurabel.*
2. *$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = 0$.*
3. *$a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ ist dicht in $\mathbb{R}$*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$2. Angenommen es gibt $0 \neq c \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Dann kann $c > 0$ angenommen werden. Es sei $c = a \cdot z_1 = b \cdot z_2$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$. Dann ist $a = \frac{c}{z_1}$ und $b = \frac{c}{z_2}$. Ist $e = \frac{c}{z_1 \cdot z_2}$, so ist $a = e \cdot z_2$ und $b = e \cdot z_1$. Dann haben a, b das gemeinsame Maß e im Widerspruch zur Vorrausetzung
2. $\Longrightarrow$3. Sei $M = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$. Dies ist eine abelsche Gruppe. Sei $m = \inf M \cap \mathbb{R}_0^+$. Angenommen $m > 0$. Dann gibt es $x \in M$ mit $m \leq x < m + 1/2m$. Es ist $x \neq m$. Denn wäre $m = x$, so hat man $x = az_1 + bz_2 \in M$. Es lässt sich schreiben: $a = q \cdot x + r$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < x$. Also ist $r \in M$. Dies widerspricht der Minimaleigenschaft von m. Also ist $m < x < m + \frac{1}{2}m$. Da $m = \inf(M \cap \mathbb{R}_0^+)$ ist, gibt es ein $y \in M \cap \mathbb{R}_0^+$ mit $m < y < x < m + 1/2m$. Das heißt $x - y \in (M \cap \mathbb{R}_0^+)$ aber $x - y < 1/2m$. Also ist $m = 0$. Das heißt zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit $0 < x < \epsilon$. Seien $r < s \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $0 < x < s - r$. Zu dem x gibt es eine größte natürliche Zahl n mit $0 < nx \leq r$. Also ist $r < (n + 1) \cdot x = n \cdot x + x < r + (s - r) = s$. Die Behauptung folgt.
3.$\Longrightarrow$1. Ist $e > 0$ ein gemeinsames Maß, von a und b, so ist $M \subset e\mathbb{Z}$. Andererseits gibt es in M ein x mit $0 < x < e$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$
Dieser Satz kann stark verallgemeinert werden:

Satz 3.5 *Sei M eine endlich erzeugte freie abelsche Untergruppe des reellen Vektorraums V. Hat der von M erzeugte Untervektorraum eine kleinere Dimension als die Dimension von M als abelsche Gruppe, so gibt es in V Häufungspunkte von M*

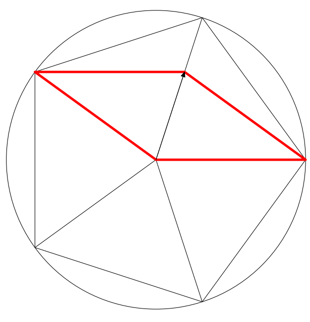
Beweis: Es sei $M_{\mathbb{Z}} = a_0\mathbb{Z} \oplus \ldots a_n\mathbb{Z}$. Es ist $\{a_0, \dot{;} a_n\}$ ein $\mathbb{Z}$- Basis von $M_{\mathbb{Z}}$. Da die Dimension des von $M_{\mathbb{Z}}$ erzeugte Vektorraums kleiner als $n+1$ ist, gibt es ein kleinstes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, so dass $a_0, \ldots a_k$ noch linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind aber nicht mehr $a_0, \ldots a_k, a_{k+1}$. Das heißt $a_0\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus a_k\mathbb{R} = a_0\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus a_k\mathbb{R} + a_{k+1}\mathbb{R}$ Es sei $v = a_{k+1}$. und $D_{\mathbb{Z}} = a_0\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus a_k\mathbb{Z}$.
1. Fall:$v\mathbb{R} \cap D_{\mathbb{Z}} = \{\vec{0}\}$. Wir betrachten $v\mathbb{Z} \subset D_{\mathbb{R}}$. Ich bezeichne mit $Q = a_0 I + \ldots a_k I$, wobei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall ist. Q ist das von $a_0, \ldots, a_k$ aufgespannte Parralelotop. Zu jedem $v \cdot z \in v\mathbb{Z}$ gibt es einen Punkt $d_z \in D_{\mathbb{Z}}$, mit $v \cdot z \in d_z + Q$. Ist $z_1 \neq z_2$, so ist $v \cdot z_1 - d_{z_1} \neq v \cdot z_2 - d_{z_2}$. Denn angenommen $v \cdot z_1 - d_{z_1} = v \cdot z_2 - d_{z_2}$. Dann ist $v(z_1 - z_2) = d_{z_1} - d_{z_2} \in D_{\mathbb{Z}}$. Also ist $z_1 - z_2 = 0$. Das heißt $z_1 = z_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind für verschiedene z die $v_z - d_z \in Q$ verschieden. Das heißt Q enthält unendlich viele verschiedene Elemente aus $v\mathbb{Z} \oplus D_{\mathbb{Z}}$. Nach dem Satz von Bolzano Weierstrass hat daher $Q \cap (v\mathbb{Z} + D_{\mathbb{Z}})$ Häufungspunkte.
2.Fall: $v\mathbb{R} \cap D_{\mathbb{Z}} \neq \{\vec{0}\}$. Es gibt daher ein $r \neq 0, r \in \mathbb{R}$ mit $v \cdot r = d \in D_{\mathbb{Z}}$ und $d \neq 0$. Die Zahl r ist nicht rational. Denn wäre $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, so wäre $v \cdot m = d \cdot n \in v\mathbb{Z} \cap D_{\mathbb{Z}}$. Das geht nicht. Daher ist r nicht rational. Also liegen auf der Geraden $v\mathbb{R}$ die maßfremden Vektoren v und vr. Daher ist $v\mathbb{Z} \oplus vr\mathbb{Z}$ dicht in $v\mathbb{R}$. Also hat $v\mathbb{Z} \oplus vr\mathbb{Z}$ dicht in $v\mathbb{R}$. Damit hat erst recht $M_{\mathbb{Z}}$ Häufungspunkte. □

Das für uns wichtigste Beispiel ist folgendes: Ich bezeichne mit D die Drehung um 72^0. Also die Drehung, die zum regulären Fünfeck gehört.

Bemerkung 3.6 *Ist D die Drehung um 72^0, und ist $\vec{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so sind $\vec{e_0}, D(\vec{e_0}), D^2(\vec{e_0})$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$. Insbesondere ist*

$$D^2(\vec{e_0})\mathbb{Z} \cap (\vec{e_0}\mathbb{Z} \oplus D(\vec{e_0})\mathbb{Z}) = \{\vec{0}\}.$$

Beweis:



Betrachtet man die Abbildung 3 so sieht man, dass $D^2(\vec{e_0}) + \vec{e_0} = \frac{1}{\Phi} \cdot D(\vec{e_0})$ gilt. Sei eine Gleichung

$$a\vec{e_0} + bD(\vec{e_0}) + cD^2(\vec{e_0}) = \vec{0} \qquad (10)$$

gegeben. Man erhält:

$$\begin{aligned} a\vec{e_0} + bD(\vec{e_0}) + cD^2(\vec{e_0}) &= \vec{0} \\ \vec{e_0} - \frac{1}{\Phi}D(\vec{e_0}) + D^2(\vec{e_0}) &= \vec{0} \\ (a-c)\vec{e_0} + (b + \frac{1}{\Phi}c)D(\vec{e_0}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Es sind $\vec{e_0}$ und $D(\vec{e_0})$ linear unabhängig. Wäre $c \neq 0$, so wäre Φ rational. Das kann nicht sein. □

Ich will diese Überlegungen etwas prinzipieller angehen. Sei $V_{\mathbb{R}}$ ein reeller Vektorraum (endlicher Dimension). $f : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ ein Homomorphismus. $U \subset V$ heißt abgeschlossen gegenüber f , wenn $f(U) \subset U$. Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Da der Durchschnitt von abelschen Gruppen auch eine abelsche Gruppe ist, gibt es zu jeder Teilmenge $U \subset V$ eine kleinste abelsche Gruppe, welche U enthält und abgeschlossen gegenüber f ist.

Satz 3.7 *Ist $V = \mathbb{R}^2$ und D die Drehung um 72^0, so gilt. Ist $0 \neq v \in V$, so ist die kleinste gegenüber D abgeschlossene Untergruppe, welche v enthält als $\mathbb{Z}$ Modul 4 dimensional und liegt dicht in V.*

Beweis: Es ist $M_{\mathbb{Z}} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} D^i(v)\mathbb{Z}$ sicherlich gegenüber eine gegenüber D abgeschlossene abelsche Gruppe, welche v enthält. Aus der Bemerkung 3.6 wissen wir, dass

$$v + D^2(v) \quad = \quad \varphi \cdot D(v)$$

ist. Dabei ist $\varphi = \frac{1}{\Phi}$ und Φ ist die Zahl des goldenen Schnittes. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} D^2(v) &= \varphi \cdot D(v) - v \\ D^3(v) &= (\varphi^2 - 1)D(v) - \varphi \cdot v \\ &= \varphi \cdot D(v) - \varphi \cdot v && (11) \\ D^4(v) &= \varphi \cdot D^2(v) - \varphi \cdot D(v) && (12) \end{aligned}$$

Die Umrechnung gilt, da $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ ist. Ist $U_{\mathbb{Z}} = v\mathbb{Z} + D(v)\mathbb{Z} + D^2\mathbb{Z} + D^3\mathbb{Z}$, so ist mit $v, D(v), D^2(v)$ auch $\varphi \cdot D(v) \in U_{\mathbb{Z}}$. Also ist mit $D^3(v)$ auch $\varphi \cdot D(v) \in U_{\mathbb{Z}}$. Damit ist aber auch $D^4(v) \in U_{\mathbb{Z}}$. Es ist also $U_{\mathbb{Z}} = M_{\mathbb{Z}}$.
Zu zeigen bleibt, dass die Summe direkt ist. Sei dazu

$$v \cdot z_0 + D(v) \cdot z_1 + D^2(v) \cdot z_2 + D^3 \cdot z_3 = 0$$

Setzen wir $D^2(v)$ und $D^3(v)$ ein und bedenken, dass v und $D(v)$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} z_0 - z_2 &= \varphi z_3 \\ -z_1 &= \varphi z_2 + \varphi z_3 \end{aligned}$$

Bedenkt man noch, dass φ irrational ist, so folgt $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Also sind die 4 Vektoren $v, D(v), D^2(v), D^3(v)$ über $\mathbb{Z}$ linear unabhängig. Als letztes müssen wir uns noch überlegen, warum $M_{\mathbb{Z}}$ dicht in $\mathbb{R}^2$ ist.
Da $D(v)$ und $D^4(v) \in M_{\mathbb{Z}}$ sind, ist $D(v) + D^4(v) = \varphi \cdot v \in M_{\mathbb{Z}}$. Außerdem ist $v + D^2(v) = \varphi \cdot D(v) \in M_{\mathbb{Z}}$. Es ist $U_{\mathbb{Z}} = D(v)\mathbb{Z} \oplus \varphi \cdot D(v)\mathbb{Z}$ dicht in $D(v)\mathbb{R}$ und $V_{\mathbb{Z}} = v\mathbb{Z} + \varphi \cdot v\mathbb{Z}$ dicht in $v\mathbb{R}$. Daher ist $U_{\mathbb{Z}} \oplus V_{\mathbb{Z}}$ dicht in $v\mathbb{R} \oplus D(v)\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. □
Tatsächlich ist sogar gezeigt worden: $M_{\mathbb{Z}}$ ist ein $\mathbb{Z}[\Phi]$ Modul. Das „Gitter“ welches von v und D erzeugt wird ist also gegenüber zentrischen Streckungen um Φ und φ abgeschlossen.

Folgerung 3.8 *$M_{\mathbb{Z}}$ ist gegenüber jeder Drehung um 72^0 um einen Punkt m aus $M_{\mathbb{Z}}$ abgeschlossen.*

Beweis: Ist F eine Drehung um 72^0 um einen Punkt $m \in M_{\mathbb{Z}}$, so ist F die verkettung einer Verschiebung um $-m$ einer Drehung um den Nullpunkt und einer Verschiebung um m. $M_{\mathbb{Z}}$ ist aber gegenüber einer Verschiebung um einen Vektor aus M abgeschlossen. Also folgt die Behauptung. □

Studiert man den Beweis genau, so erkennt man: Es war eigentlich nur wichtig, dass die Drehung um 72^0 eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^2 - \varphi \cdot X - 1$ ist.
Dies legt es nahe, dass es einen Beweis des Satzes gibt der mehr Algebra benutzt aber aus dem sich auch wesentlich allgemeinere Erkenntnisse liefert. Dazu muss ich etwas ausholen. Sei $V_{\mathbb{R}}$ ein reeller Vektorraum. und $f : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ ein Homomorphismus. Es sei weiter $S = Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$ der Endomorphismenring von $V_{\mathbb{R}}$. Mit der Definition $f \cdot v := f(v)$ wird V auf der linken Seite zu einem $S-$ Modul. Ist $R = \mathbb{Q}[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über den rationalen Zahlen, so ist R ein Hauptidealring.Setzen wir in jedem Polynom für die Unbestimmte den Homomorphismus f ein, so erhalten wir einen Ringhomomorphismus $\rho : \mathbb{Q}[X] \to S$. Dadurch wird V zu einem $\mathbb{Q}[X]-$ Modul. Sei nun $V = \mathbb{R}^2$. Es ist $D^5 - Id$ die Nullabbildung. Andererseits ist $D - Id$ ein Isomorphismus. Daher ist $D^4 + D^3 + D^2 + D^1 + Id$ die Nullabbildung. Sei nun $\sum_{i=0}^{n} D^i(v)z_i = 0$. Wir betarchten das Polynom $f(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i z_i \in \mathbb{Q}[X]$. Da $g = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ ein normiertes Polynom ist, kann man f durch g mit Rest teilen. Es gibt also eindeutig bestimmte Polynome

4 Kettenbrüche

Wir betrachten noch einmal die Divisionsgleichung zu einem gegebenem Zahlenpaar $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Wegen Satz 3.1 gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q_0 \in \mathbb{N}$ und $a_2 \in \mathbb{R}^+$ mit

$$a_0 = q_0 \cdot a_1 + a_2$$

Es ist $q_0 = [\frac{a_0}{a_1}]$. Zu jedem Paar $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ gehört also eine Quotientenfolge eine Folge $(q_n|n \in \mathbb{N})$ mit $q_i > 0$, die durch das euklidische Verfahren definiert ist. So ist

$$\begin{aligned}
116 &= \boxed{4} \cdot 27 + 8 \quad \text{oder} \quad \frac{116}{27} = \boxed{4} + \frac{8}{27} \\
27 &= \boxed{3} \cdot 8 + 3 \quad \text{oder} \quad \frac{27}{8} = \boxed{3} + \frac{3}{8} \\
8 &= \boxed{2} \cdot 3 + 2 \quad \text{oder} \quad \frac{8}{3} = \boxed{2} + \frac{3}{2} \\
3 &= \boxed{1} \cdot 2 + 1 \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2} = \boxed{1} + \frac{1}{2} \\
2 &= \boxed{2} \cdot 1 + 0 \quad \text{oder} \quad \frac{2}{1} = \boxed{2} + 0
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die entstehende Zahlenfolge endlich. Setzt man ein so erhält man:

$$\frac{116}{27} = 4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{8}} = 4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3}}} = 4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

Es entsteht in unserm Beispiel ein endlicher Kettenbruch. Die Schreibweise ist sehr unbequem. Da es nur auf die Quotienten ankommt schreibt man in unserm Beispiel: $[4, 3, 2, 1, 2]$. Man kann nun endliche Kettenbrüche rekursiv definieren:

1. Für jede natürliche Zahl q_0 ist $[q_0] := q_0$.
2. Es ist $[q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}] := q_0 + \dfrac{1}{[q_1, \ldots, q_{n+1}]}$

Das heißt es ist $[1, 2, 3] = 1 + \dfrac{1}{[2,3]} = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}$. Startet man den euklidischen Algorithmus mit zwei inkommensurablen Zahlen, so bricht er nicht ab, wie wir wissen. Wir wollen beispielsweise die Quotientenfolge für das Zahlenpaar $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen. Es muss sich auf jeden Fall eine unendliche Folge ergeben. Es entsteht im euklidischen Algorithmus eine Zahlenfolge

$$\begin{aligned} a_n &= q_n \cdot a_{n+1} + a_{n+2} \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &= q_n + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \quad q_n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Definiert man $b_n := \frac{a_n}{a_{n+1}}$, so gilt: $b_n = q_n + \frac{1}{b_{n+1}}$. oder:

$$b_{n+1} = \frac{1}{b_n - [b_n]}$$

Diese leichte Umformung erleichtert das Berechnen der Quotientenfolge
Beispiele:

1. Es soll die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$ bestimmt werden. Zur Abkürzung sei $w = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} b_0 = w, [b_0] = q_0 &= 1 \\ b_1 = \frac{1}{w-1}, b_1 = \frac{w+1}{2}, q_1 &= 1 \\ b_2 = \frac{2}{w-1} = w+1, q_2 &= 2 \\ b_3 = \frac{1}{w-1} &= b_1 \end{aligned}$$

Wie wir sehen wiederholen sich ab jetzt dieselbe b_i. Die Quotientenfolge wird daher periodisch. Wir kürzen das folgendermaßen ab: $[1, \overline{1, 2}]$.

2. Es soll dei Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{13}$ berechnet werden. $w = \sqrt{13}$

n	$b_n = \frac{1}{b_{n-1}} - [b_n]$	$q_n = [b_n]$
0	$w = \sqrt{13}$	3
1	$\frac{1}{w-3} = \frac{w+3}{4}$	$\left[\frac{[w]+3}{4}\right] = 1$
2	$\frac{4}{w+3-4} = \frac{w+1}{3}$	1
3	$\frac{w+2}{3}$	1
4	$\frac{w+1}{4}$	1
5	$w+3$	6
6	$\frac{w+3}{4}$	1

Wir haben daher $\sqrt{13} = [3, \overline{1,1,1,6}]$.

Schreibt man diese Gleichung wieder mit dem tollen Hilfsmittel der Matrizen, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Auf $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wenden wir das gleiche Verfahren an: Es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 \cdot a_2 + a_3 \quad q_1 = \left[\frac{a_1}{a_2}\right] > 1. \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} &= A_0 \cdot A_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \vdots \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \underbrace{A_0 \cdot A_1 \dots A_n}_{\mathbf{P_n}} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Hinweise:

4. Zu jedem Zahlenpaar $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört eigenlich eine Gerade durch den Ursprung, so dass unsere Matrizen Abbildungen zwischen solchen Geraden induzieren.
5. Brüche sind nichts anderes als Zahlenpaare. So konstruiert man auch Brüche. Von daher liegt es nahe sein Augenmerk auf Zahlenpaare zu lenken.

Aufgaben:

19. Gegeben die endliche Quotientenfolge $[5, 4, 3, 2, 2]$. Welche Zahlenpaare gehören zu dieser Quotientenfolge?
20. Zeige: Die Quotientenfolge die zu (a, b) gehört ist genau dann endlich, wenn a und b kommensurabel sind. Dies wusste schon Euklid.
21. Bei der Berechnung der Kettenbruchentwicklung einer Quadratwurzel ist folgende Bemerkung wichtig:
$$[\frac{\sqrt{d}+a}{c}] = [\frac{[\sqrt{d}]+b}{c}] \tag{14}$$
Falls $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und d keine Quadratzahl ist. Um $[\sqrt{d}]$ zu berechnen gibt es ein schnelles Verfahren, welches nur mit natürlichen Zahlen rechnet. Es ist eine Abwandlung des Newton Verfahrens [Lün87, Seite 30]
22. Berechne die Kettenbruchentwicklung von
    (a) $\sqrt{3}$.
    (b) $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$,$\sqrt{8}$,$\sqrt{21}$
23. Finde ein Zahlenpaar zu dem die unendliche Quotientenfolge $[\overline{1,1,1,}]$ gehört.
24. Finde ein Zahlenpaar das zu der Quotientenfolge $[2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$ gehört.
25. (a) Berechne die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}+1$.
    (b) Berechne die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{5}+2$

(c) Berechne allgemein die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{a^2+1}+a$ falls a^2+1 keine Quadratzahl ist.

Bemerkung 4.1 *Für* $\mathbf{P_n} = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} \\ v_n & v_{n-1} \end{pmatrix}$ *gelten die Rekursionsformeln:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= q_{n+1} \cdot u_n + u_{n-1} \\ v_{n+1} &= q_{n+1} \cdot v_n + v_{n-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Die Determinante $det(\mathbf{P}_n) = (-1)^n$. v_n, u_n *sind streng monoton wachsende Folgen. (Dies ist genau wie im Satz 2.2)*

Satz 4.2 *Für irrationale* $\frac{a}{b}$ *ist:* $\left|\frac{a}{b} - \frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{1}{v_n^2}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \mathbf{P}_n \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \cdot a_{n+1} + u_{n-1} \cdot a_{n+2} \\ v_n \cdot a_{n+1} + v_{n-1} \cdot a_{n+2} \end{pmatrix} \\ \frac{a}{b} &= \frac{u_n \cdot a_{n+1} + u_{n-1} \cdot a_{n+2}}{v_n \cdot a_{n+1} + v_{n-1} \cdot a_{n+2}} \\ &= \frac{u_n \cdot a_{n+1}/a_{n+2} + u_{n-1}}{v_n \cdot a_{n+1}/a_{n+2} + v_{n-1}} \\ &= \frac{u_n\beta + u_{n-1}}{v_n \cdot \beta + v_{n-1}} \text{ mit } \beta > 1 \\ \left|\frac{a}{b} - \frac{u_n}{v_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^n)}{v_n(v_n\beta) + v_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{v_n^2} \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.3 *1. Ist* $\frac{a}{b}$ *eine irrationale Zahl, so ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$

2. Zwei Zahlenpaare (a, b) *und* (c, d) *haben dieselbe Quotientenfolge, wenn sie auf der gleichen Geraden durch den Nullpunkt liegen.*

Beweis: 1. ist klar
Zu 2. Liegen die beiden Zahlenpaare (a, b) und (c, d) auf der gleichen Geraden durch den Nullpunkt, so sind ihre Quotienten gleich. Sie erzeugen also die gleiche Quotientenfolge.
Seien umgekehrt die Quotientenfolgen gleich. Man hat für alle natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \mathbf{P}_n \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \mathbf{P}_n \cdot \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ v_n & v_{n+1} \end{pmatrix}$ Es folgt $\frac{c}{d} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$. Das war behauptet. □

Satz 4.4 (Euler) *Ist die Quotientenfolge periodisch, so ist $\alpha = \frac{a}{b}$ Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. α ist eine quadratische Irrationalität.*

Beweis: Zunächst nur für den Fall, dass die Quotientenfolge $[\underbrace{q_0, \ldots, q_k}, q_0, \ldots, q_k \ldots]$ rein periodisch ist. Wir haben dann:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Wobei $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ dieselbe Quotientenfolge hat. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{u_k \cdot c + u_{k-1} \cdot d}{v_k \cdot c + v_{k-1} \cdot d} \\ \frac{a}{b} &= \frac{u_k \cdot c/d + u_{k-1}}{v_k \cdot c/d + v_{k-1}} \\ \text{mit } x &= \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ folgt} \\ x &= \frac{u_k x + u_{k-1}}{v_k x + vk - 1} \end{aligned}$$

Daher ist x Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzahligen Koeffizienten. Es bleibt nur noch der Fall zu überlegen, dass die Quotientenfolge nicht rein periodisch ist. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Dabei erzeugt $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ eine rein periodische Kettenbruchentwicklung. Mit dem folgenden Hilfssatz ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 4.5 *Sei y eine quadratische Irrationalität. Dann ist*

$$x = \frac{a \cdot y + b}{c \cdot y + d} \tag{16}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ eine quadratische Irrationalität.

Beweis: y erfülle die Gleichung $A \cdot y^2 + B \cdot y + C = 0$. Wir lösen die Gleichung 16 nach y auf. Das ergibt: $y = \dfrac{dx - b}{a - cx}$. Setzt man dies in die quadratische Gleichung ein, die y erfüllt und multipliziert mit dem Hauptnenner, so sieht man, dass x eine quadrtische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten erfüllt.

□

□

Hinweise:

6. Ich habe aus dem Buch von Koch [Koc97, Seite 272] übernommen, dass der Satz von Euler stammt. Ich weiss aber nicht wo es bei Euler steht.

Satz 4.6 *Sei* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{P}_n \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ *mit Matrizen der Form* $\mathbf{P_n} = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} \\ v_n & v_{n-1} \end{pmatrix}$. *Ist* $\alpha = \frac{a}{b}$ *Lösung einer Gleichung* $Ax^2 + Bx + C = 0$ *mit ganzzahligen Koeffizienten, so ist* $\beta = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ *auch Lösung einer Gleichung* $A_n x^2 + B_n x + C_n = 0$ *mit ganzzahligen Koeffizienten und gleicher Determinante.*

Beweis: Es genügt die Beziehung zu zeigen für eine Beziehung der Form:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{qc + d}{c} = \frac{q\frac{c}{d} + 1}{\frac{c}{d}} = \frac{q\beta + 1}{\beta}$$

Ist $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, so ist $A\left(\frac{q\beta + 1}{\beta}\right)^2 + B\left(\frac{q\beta + 1}{\beta}\right) + C = 0$ Dies ergibt

$$(Aq^2 + Bq + C)\beta^2 + (A2q + B)\beta + A = 0.$$

Man rechnet nach, dass diese Gleichung dieselbe Determinante hat wie die Gleichung für α. □

Satz 4.7 (Lagrange) *ist a eine quadratische Irrationalität, so defieniert das Zahlenpaar* $(a, 1)$ *eine periodische Quotientenfolge. Der Kettenruch ist periodisch.*

Hinweise:

7. Der Zusammenhang mit den gebrochen rationalen Funktionen fehlt. Eindimensionaler projektiver Raum.
8. Wir sollten die Originalschrift von Luca Pcioli finden.
9. Auch das Liber abaci von Leonardo von Pisa.
10. Außerdem die Schrift von Lagrange.
11. In der Musik spielt der goldene Schnitt und die Fibonacci Zahlen auch eine große Rolle. Besonders bei Bela Bartok siehe das Buch [Sza72, Seite 105 ff]

5 Muster

5.1 Lineare Muster

Gehe an einem sonnigen Tag durch den Walld und du wirst bewundern, was die Sonne auf den Boden malt. Sie zeichnet das komplexe Bild der tausend Äste und Blätter über uns auf den Boden. Wir wollen eine einfachere Welt auf ein primitiveres Blatt zeichnen. Gegeben sei eine Gerade $U = \vec{u}\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ein Unterraum. Die Gitterpunkte $G_{\mathbb{Z}} = \overrightarrow{e_0}\mathbb{Z} \oplus \overrightarrow{e_1}\mathbb{Z}$ werden durch parallel einfallendes „Licht“ auf den Unterraum projeziert. Die Richtung des „Lichtes“ sei $\vec{a}$.
Es ist $\mathbb{R}^2 = U \oplus \vec{a}\mathbb{R}$. Ist $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\pi(\vec{p}) \in U$ und $\vec{h} \in H = \vec{a}\mathbb{R}$ mit $\vec{p} = \pi(\vec{p}) + \vec{h}$. Es ist $\pi(\vec{})$ der Schnittpunkt der Geraden in

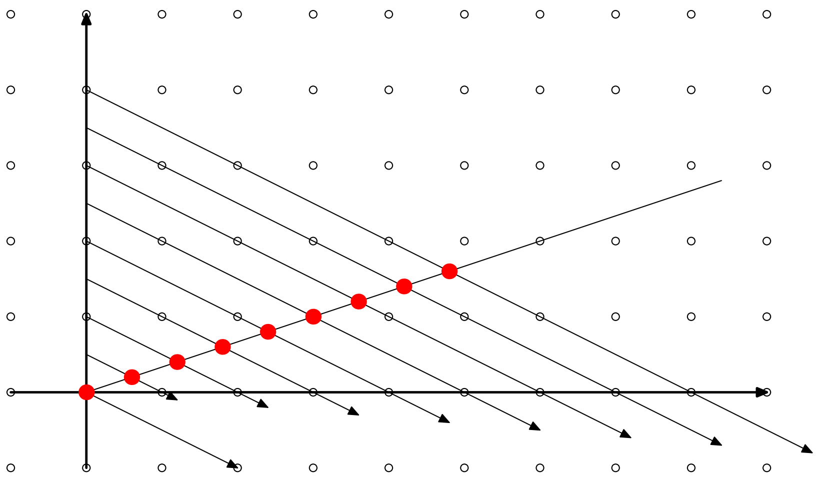


Abbildung 5: Projektion des Gitters auf eine Gerade

Richtung $\vec{a}$ durch $\vec{p}$ mit dem Unterraum U. π ist ein Homomorphismus. Er kann durch eine Matrix beschrieben werden.

$$A = (\pi(\overrightarrow{e_0}), \pi(\overrightarrow{e_1}))$$

Das Bild eines beliebigen Gitterpunktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ ist dann

$$\pi(\vec{p}) = \pi(e_0) \cdot p_0 + \pi(e_1) \cdot p_1 \tag{17}$$

Es müssen daher $\pi(e_0)$ und $\pi(e_1)$ bestimmt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \pi(\vec{u}) &= \vec{u} \\ \pi(\vec{a}) &= \vec{0} \end{aligned} \tag{18}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi(e_0) &= \frac{a_1}{det(\vec{u}, \vec{a})} \cdot \vec{u} \\ \pi(e_1) &= \frac{a_0}{det(\vec{u}, \vec{a})} \cdot (-\vec{u}) \end{aligned} \tag{19}$$

Haupsächlich sind wir an dem Fall interessiert, dass $\vec{a} = \vec{u}^{\perp}$ ist. Dann ist $det(\vec{u}, \vec{a}) = \begin{vmatrix} u_0 & -u_1 \\ u_1 & u_0 \end{vmatrix} = u_0^2 + u_1^2$. Ist zusätzlich $|\vec{u}| = 1$, dies kann man immer so einrichten, so ist die Projektionsmatrix $\begin{pmatrix} u_0^2 & u_0 u_1 \\ u_0 u_1 & u_1^2 \end{pmatrix}$ Bei der Projektion des Einheitsquadrates auf den Unterraum $\vec{u}\mathbb{R}$ entstehen zwei Parkettsteine $\pi(\vec{e_0})$ und $\pi(\vec{e_1})$.

Satz 5.1 *Sei* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ *ein beliebiger von* $\vec{u}$ *linear unabhängiger Vektor. Dann sind äquivalent:*

1. *a_0 und a_1 sind inkommensurabel.*
2. *Die Projektion π auf $\vec{u}\mathbb{R}$ in Richtung $\vec{a}$ ist eingeschränkt auf $\mathbb{Z}^2$ ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen.*
3. *$\pi(\mathbb{Z}^2)$ ist dicht in $\vec{u}\mathbb{R}$.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$2.: Sei $\pi(\vec{e_0} \cdot z_0 + \vec{e_1} \cdot z_1) = \vec{0}$, wobei $z_0, z_1 \in \mathbb{Z}$ sind. Dann ist $\vec{e_0} \cdot z_0 + \vec{e_1} \cdot z_1 \in Ke(\pi) = \vec{a}\mathbb{R}$. Es folgt:

$$\vec{e_0}z_0 + \vec{e_1}z_1 = \vec{e_0}a_0 r + \vec{e_1}a_1 r$$

für ein $r \in \mathbb{R}$. Also ist $z_0 = a_0 r$ und $z_1 = a_1 r$. Dies heißt $r = 0$ oder a_0 und a_1 haben im Widerspruch zur Voraussetzung ein gemeinsames Maß. Also ist $r = 0$ und daher sind z_0 und $z_1 = 0$. Das heißt π ist injektiv.
2. $\Longrightarrow$3.: Ist π injektiv, so ist $\pi(\mathbb{Z}^2)$ als $\mathbb{Z}-$ Modul zweidimensional. Daher liegt $\pi(\mathbb{Z}^2)$ dicht in $\vec{u}\mathbb{R}$.
3. $\Longrightarrow$1.: Angenommen a_0 und a_1 haben ein größtes gemeinsames Maß d. Es sei etwa $a_0 = d \cdot x$ und $a_1 = d \cdot y$, wobei x, y ganze Zahlen sind und nicht beide $= 0$ sind. Es ist dann $\vec{0} = \pi(\vec{a}) = \pi(\vec{e_0}) \cdot x \cdot d + \pi(\vec{e_1}) \cdot y \cdot d$. Daher ist $\pi(e_0) \cdot x + \pi(\vec{e_1}) \cdot y = \vec{0}$. Sei etwa $x \neq 0$. Dann ist $\pi(\vec{e_0}) = \pi(\vec{e_1}) \cdot \frac{-y}{x}$. Das heisst: Ist $\vec{f} = \pi(\vec{e_1}) \cdot \frac{1}{x}$, so ist $\pi(\mathbb{Z}^2) \subset \vec{f} \cdot \mathbb{Z}$. Ein zyklischer $\mathbb{Z}-$Modul kann aber nicht dicht in $\vec{u}\mathbb{R}$ sein. Also ist $\pi(\mathbb{Z}^2)$ nicht dicht in $\vec{u}\mathbb{R}$. □

Wie gesagt entsehen bei der Projektion des Einheitsquadrates auf den Unterraum zwei Parkettstein $\pi(\vec{e}_0)$ und $\pi(\vec{e}_1)$.
Aufgaben:

26. Wie lang sind die Parkettsteine?

Der Unterraum $\vec{u}\mathbb{R}$ soll durch diese Bausteine parkettiert werden. Damit sich die verschieden Projektionen der Einheitsvektoren nicht überlappen müssen wir den projezierten Bereich beschränken. Ich bezeichne mit $Q = [0,1] \times [0,1] \setminus \{\vec{e}_0\}$. Dies ist das Einheitsquadrat ohne die rechte untere Ecke. Ist weiter $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und $g = \vec{v} + \vec{u}\mathbb{R}$ eine beliebige Gerade, so wollen wir nur den Bereich $(g + Q) \bigcap (\vec{e}_0\mathbb{Z} \oplus \vec{e}_1\mathbb{Z})$ projezieren. Dies ist ein zum Unterraum $\vec{u}\mathbb{R}$ paralleler Streifen. Die obere Begrenzungsgerade g_o gehört zum projezierten Bereich, die untere gu nicht. Es ist ein halboffener Parallelstreifen. Auf diese Weise gelingt uns eine Parkettierung. Die Idee dahinter ist: Zwischen zwei Gitterpunkten im Streifen gibt es stets genau einen monoton steigenden Weg längs Gitterlinien, der nur Einheitsschritte nach rechts oder nach oben benutzt. Projeziert man diesen Weg erhält man eine gewünschte Parkettierung.

Bemerkung 5.2 *Zu jedem $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ enthält $\vec{p} + Q$ genau einen Gitterpunkt.*

Beweis: Es sei $\vec{p} = \vec{e}_0 x + \vec{e}_1 y$.

1. Fall $x \notin \mathbb{Z}$: Es ist $[x] < x < [x] + 1 = x_0$. Daher ist $x_0 - x < 1$. Sowieso ist $[y] \leq y < [y]+1 = x_1$. Es folgt: $\vec{e}_0 \cdot x_0 + \vec{e}_1 x_1 = \vec{p} + \vec{e}_0 \cdot (x_0 - x) + \vec{e}_1 \cdot (x_1 - y) \in \vec{p} + Q$

2. Fall $x \in \mathbb{Z}$. Dann setzen wir $x_0 := x$ und $x_1 := [y] + 1$ und es folgt wieder $\vec{e}_0 \cdot x_0 + \vec{e}_1 \cdot x_1 \in \vec{p} + Q$.

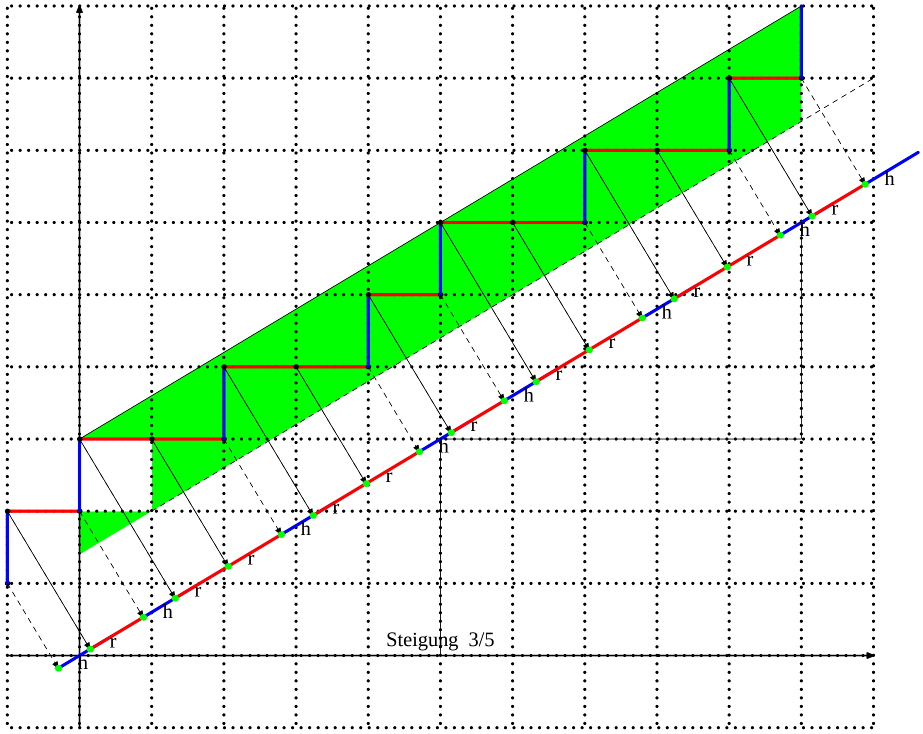


Abbildung 6: Projektion eines Parallelstreifens

□

Um zu entscheiden ob ei Punkt im Parallelstreifen liegt brauchen wir noch ein rechnerisches Kriterium mit dem der Computer etwas anfangen kann. Ich setze voraus, dass $\vec{u}$ ein Vektor mit nur positiven Komponenten ist.

Satz 5.3 *Sei $g = \vec{v} + \vec{u}\mathbb{R}$ eine zu $\vec{u}\mathbb{R}$ parallele Gerade. Dann gilt: $\vec{p} \in g + Q$ genau dann, wenn :$det(\vec{u}, \vec{e}_0) < det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) \leq det(\vec{u}, \vec{e}_1)$ ist.*

Beweis: $\Rightarrow$: Es ist $\vec{p} - \vec{v} = \vec{u}\alpha + \vec{e}_0\beta + \vec{e}_1\gamma$ mit $\beta, \gamma \in [0, 1]$. Ist $\beta = 1$, so kann γ nicht 0 sein. Es ergibt sich: $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) = det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta + det(\vec{u}, \vec{e}_1)\gamma$. Über $\vec{u}$ ist vorausgesetzt, dass beide Komponenten > 0 sind. Also ist $det(\vec{u}, \vec{e}_0) < 0$ und $det(\vec{u}, \vec{e}_1) > 0$. Ist $\beta < 1$, so folgt:

$$\begin{aligned} det(\vec{u}, \vec{e}_0) &< det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta \\ &< det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta + det(\vec{u}, \vec{e}_1)\gamma \\ &\leq det(\vec{u}, \vec{e}_1) \end{aligned}$$

Ist $\beta = 1$, so ist $\gamma > 0$: $det(\vec{u}, \vec{e}_0) < det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta + det(\vec{u}, \vec{e}_1)\gamma \leq det(\vec{u}, \vec{e}_1)$.
$\Leftarrow$: Es ist vorausgesetzt: $det(\vec{u}, \vec{e}_0) < det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) \leq det(\vec{u}, \vec{e}_1)$.

1. Fall $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) \geq 0$. Da $\vec{u}$ und $\vec{e}_1$ linear unabhängig sind, gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\vec{p} - \vec{v} = \vec{u}\alpha + \vec{e}_1\beta$. Daher ist $0 \leq det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) = det(\vec{u}, \vec{e}_1)\beta \leq det(\vec{u}, \vec{e}_1)$. Da $det(\vec{u}, \vec{e}_1) > 0$ ist folgt: $0 \leq \beta \leq 1$. Das heißt $\vec{p} = \vec{v} + \vec{u}\alpha + \vec{e}_1\beta \in g + Q$.

2. Fall $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) < 0$: Da $\vec{e}_0$ und $\vec{u}$ linear unabhängig sind, gibt es α, β mit $\vec{p} - \vec{v} = \vec{u}\alpha + \vec{e}_0\beta$. Also ist $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) = det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta$. Es ist $det(\vec{u}, \vec{e}_0) <$

$det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta$ nach Voraussetzung. Also ist: $\beta < 1$. Da außerdem $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) = det(\vec{u}, \vec{e}_0)\beta < 0$ ist, muss auch $\beta > 0$ gelten. Damit ist die Behauptung gezeigt.

□

Nun können wir belegen, dass es im Streifen von Gitterpunkt zu Gitterpunkt nur einen monoton steigenden Gitterweg gibt.

Satz 5.4 *Sei $g = \vec{v} + \vec{u}\mathbb{R}$. Dann gilt: Ist $\vec{p} \in g + Q$ im Streifen, so ist genau einer der beiden Vektoren $\vec{p} + \vec{e}_0$ oder $\vec{p} + \vec{e}_1$ im Streifen.*

Beweis:

1. Fall $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) \geq 0$. Es ergibt sich:

$$0 \leq det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) \quad \leq \quad det(\vec{u}, \vec{e}_1)$$

Addieren von $det(\vec{u}, \vec{e}_0)$ ergibt:

$$det(\vec{u}, \vec{e}_0) \leq det(\vec{u}, \vec{p} + \vec{e}_0 - \vec{v}) \quad \leq \quad det(\vec{u}, \vec{e}_0 + \vec{e}_1) \leq det(\vec{u}, \vec{e}_1)$$

Also liegt $\vec{p} + \vec{e}_0$ in $g + Q$.

2. Fall $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) < 0$. $det(\vec{u}, \vec{e}_0) < det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) < 0 \iff det(\vec{u}, \vec{e}_0 + \vec{e}_1) < det(\vec{u}, \vec{p} + \vec{e}_1 - \vec{v}) < det(\vec{u}, \vec{e}_1)$. Da $det(\vec{e}_0) < det(\vec{e}_0 + \vec{e}_1)$ folgt die Behauptung.

Beides zusammen hieße: $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) \geq 0$ und $det(\vec{u}, \vec{p} - \vec{v}) < 0$. Das kann nicht sein. □

Jetzt projezieren wir den Parallelstreifen auf die Gerade. Es ergibt sich:

Satz 5.5 *Das Projektionsmuster ist genau dann periodisch, wenn die Gerade $\vec{u}\mathbb{R}$ durch zwei Gitterpunkte geht.*

Beweis: Sei zunächst das Muster periodisch. Das heißt es ist invariant gegenüber einer Verschiebung eines Punktes aus dem Muster:

$$\vec{m} = \pi(\vec{e}_0)a + \pi(\vec{e}_1)b, a, b \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\vec{m}$ ein Punkt des Musters. Es gibt daher zu jedem $z \in \mathbb{Z}$ ein $a_z, b_z \in \mathbb{Z}$ mit

$$(\pi(\vec{e}_0)a + \pi(\vec{e}_1)b) \cdot z = \pi(\vec{e}_0)a_z + \pi(\vec{e}_1)b_z$$

und $\vec{e}_0 a_z + \vec{e}_1 b_z$ ist im Streifen. Angenommen die Steigung von $\vec{u}\mathbb{R}$ ist irrational. Dann ist der Homomorphismus $\pi : \mathbb{Z}^2 \to \vec{u}\mathbb{R}$ injektiv wegen Satz 5.1. Es folgt für alle $z \in \mathbb{Z}$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} a_z \\ b_z \end{pmatrix}$ liegt im Streifen. (Es kann $drt(\vec{u}, \vec{e}_0) < det(\vec{u}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot z - \vec{v}) = det(\vec{u}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \cdot z - det(\vec{u}, \vec{v})$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ nur gelten, wenn $det(\vec{u}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = 0$ ist. Das heißt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{u}$ sind linear abhängig. Geometrisch bedeutet dies $\vec{u}\mathbb{R}$ geht durch einen zweiten Gitterpunkt.

$\Leftarrow$ Zur Umkehrung:
Sei die Steigung der Geraden $\vec{u}\mathbb{R}$ rational. Dann gibt es einen Gitterpunkt auf $\vec{u}\mathbb{R}$ außer dem Nullpunkt. Ich nenne den Gitterpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{e}_0 a + \vec{e}_1 b$. Es ist $\pi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Behauptung: Die Verschiebung um $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ führt das Muster in sich über.
Beweis: Sei $\vec{m}$ ein Punkt des Musters. Dann gibt es einen Gitterpunkt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ aus dem Streifen mit $\pi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \vec{m}$. Da $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \vec{u}\mathbb{R}$ ist folgt:
$\pi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \pi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{m} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M$. Genau dasselbe gilt für $\vec{m} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. [3]

Hinweise:

12. Wie sieht das in drei Dimensionen aus
    (a) Bei der Projektion eines Streifens auf eine Gerade?
    (b) Bei der Projektion einer Ebene auf eine Ebene?

□

Ein Unterraum $U \hookrightarrow V$ heißt gegenüber dem Homomorphismus $f : V \to V$ abgeschlossen, wenn $f(U) \hookrightarrow U$ ist.

Hilfssatz 5.6 *Sei $V = U \oplus H$. Und $\pi : V \to V$ die Projektion auf U. Dann gilt: π ist vertauschbar mit f genau dann, wenn U und H gegenüber f abgeschlossen sind*

Beweis: Seien U und H gegenüber f abgeschlossen. Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben: $v = u + h$ mit $u \in U$ und $h \in H$. Es folgt: $f\pi(v) = f(u)$ und $\pi f(v) = \pi(f(u) + f(h)) = f(u)$, da $f(u) \in U$ und $f(h) \in H = Kern(\pi)$ sind. Also ist f vertauschbar mit π.
Sei umgekehrt f vertauschbar mit π. Dann folgt für ein $u \in U$: $f(u) = f(\pi(u)) = \pi(f(u)) \in U$. Also ist $f(u) \in U$. Für in $h \in H$ folgt $\pi(f(h)) = f(\pi(h)) = f(0) = 0$. Also ist $f(h) \in Kern(\pi) = H$. Auch H ist somit gegenüber f abgeschlossen. □

Bis jetzt hatten wir über den Vektor $\vec{u}$ nichts besonderes vorausgesetzt. Wir wollen aber zum goldenen Schnitt zurückkehren. Also betrachten wir die Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ siehe Gleichung 7. Sie hat die Eigenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert Φ und $\vec{u}^{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\Phi} \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert $\frac{-1}{\Phi}$. Das heißt in Richtung $\vec{u}$ die durch die Matrix definierte Abbildung um den Faktor Φ, das ist eine Verlängerung. In der dazu senkrechten Richtung um den Faktor $\frac{-1}{\Phi}$, das ist eine Verkürzung. Wir projezieren in Richtung $\vec{u}^{\perp}$ auf $\vec{u}\mathbb{R}$.

[3] Man sollte hier zwei Folien zum übereinanderlegen haben.

Da durch F die Orientierung geändert wird, möchte ich lieber F^2 betrachten. Das ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $g = \vec{u}\mathbb{R}$. Die Abbildung A bildet den Streifen $g + Q$ in den schmaleren Streifen bijektiv ab. Siehe Zeichnung 7. F und damit A ist mit der Projektion vertauschbar. Ist M das Muster, welches durch Projektion von $(g + Q) \bigcap \mathbb{Z}^2$ entsteht, so ist $A(M)$ eine echte Vergröberung von M, sie entsteht durch Streckung von M um den Faktor Φ^2.

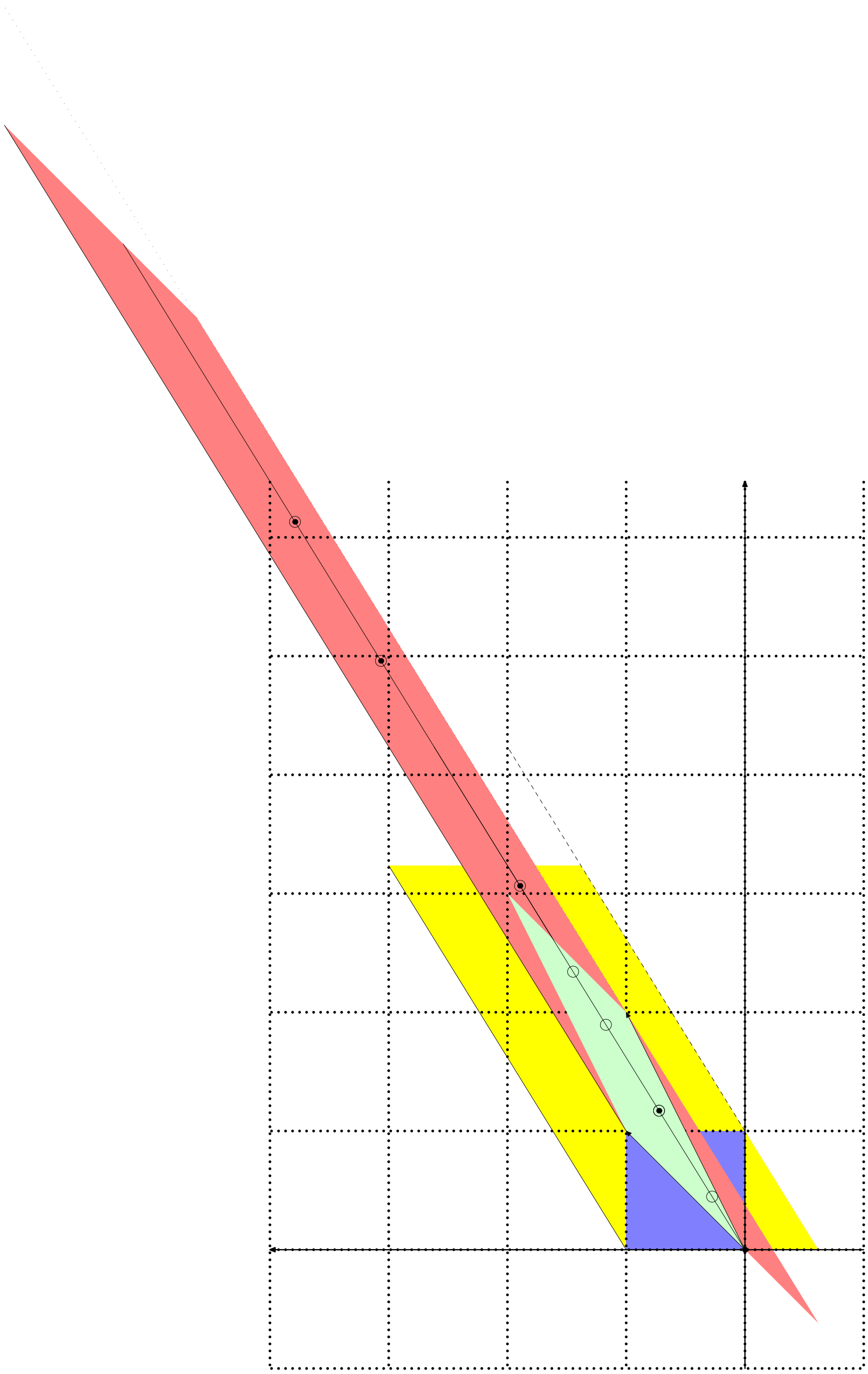


Abbildung 7: Vergröbern

Die Umkehrmatrix $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dehnt in Richtung von $\vec{u}^{\perp}$ um den Faktor Φ^2 und staucht in Richtung $\vec{u}$ um den Faktor $\frac{1}{\Phi^2}$. Sie bildet den Streifen $\vec{u}\mathbb{R}+Q \bigcap \mathbb{Z}^2$ in den breiteren Streifen $\vec{u}+B(Q)\cap\mathbb{Z}^2$ bijektiv ab, siehe Zeichnung 8. Ein endliches Stück davon enthält mehr Gitterpunkte als $\vec{u}\mathbb{R}+Q$. Daher ist $\pi(\vec{u}\mathbb{R}+Q\cap\mathbb{Z}^2) \subsetneq \pi(\vec{u}\mathbb{R}+B(Q)\cap\mathbb{Z}^2)$

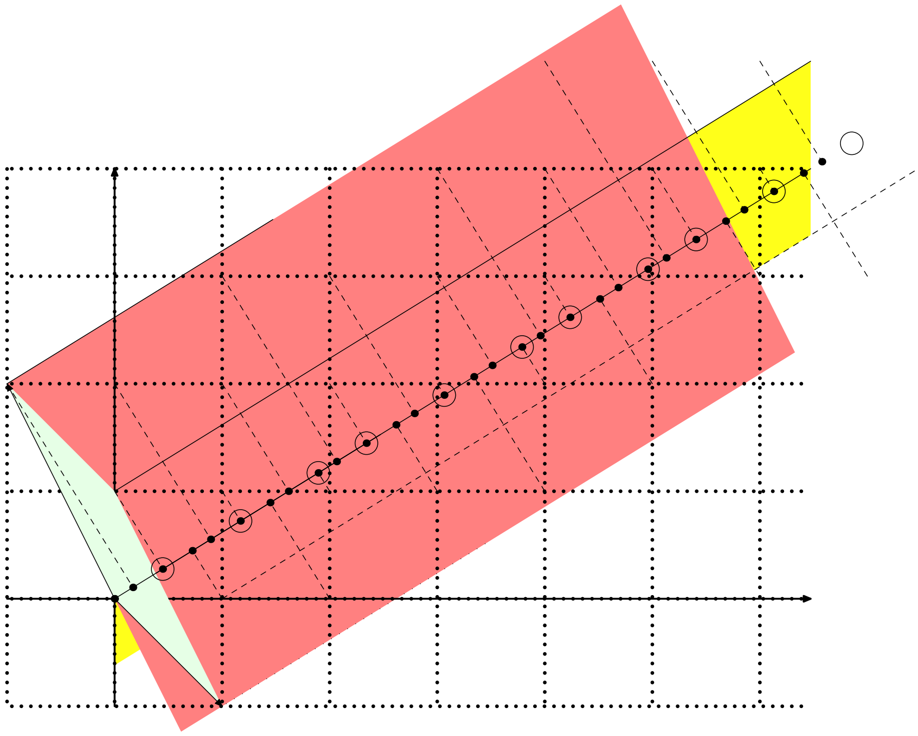


Abbildung 8: Verfeinern

Aufgaben:

27. Man zähle in der Projektion Abbildung 7 die Anzahl der kurzen Parkettsteine und die Anzahl langen Parkettsteine. Welcher Zahle nähert sich der Quotient für lange Teilstücke der Geraden an?

5.2 Zweidimensionale Muster

6 Lösungen

6.1 Zu Kapitel 1

1 Selbstverständlich ja. Denn die Dreiecke $\triangle DAE$ und $\triangle ACB$ sind kongruent und jeweils gleichschenklig. Mit dem Winkelsummensatz kann man ausrechnen, dass die Teilwinkel an der Ecke A jeweils 36^0 sind.

2 Die beiden Geraden BE und AC schneiden sich in D'. Außerdem sind CE und BA parallel. Es folgt: $\frac{\overline{CD'}}{\overline{D'A}} = \frac{a_0}{a_1}$ und daher $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0}{a_1}$.

6.2 Zu Kapitel 2

12 Es ist $f_1 = 1 \leq \Phi^0$ und $f_2 = 1 < \Phi$. Gelte die Behauptung für n. Man hat $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \leq \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi^{n-2}(1+\Phi) = \Phi^{n-2}\Phi^2 = \Phi^n$

13 Es ist

$$\begin{aligned} F^{n+m} &= F^n \cdot F^m \\ &= \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+m+1} & f_{n+m} \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Regeln der Matrizenmultiplikation liefern: $f_{n+m} = f_{n+1}f_n + f_n f_{m-1}$

14 Dies ist leicht durch Induktion zu sehen.

15

6.3 Zu Kapitel 4

25c Wir formulieren allgemein: Ist $a \in \mathbb{N}$ und a^2+1 keine Quadratzahl, so ist die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{a^2+1}+a = [2a, 2a, \overline{2a}, \dots]$.

Beweis: Es sei $a_0 = \sqrt{a^2+1}+a$ und $a_1 = 1$. Dann ist $\left[\frac{a_0}{a_1}\right] = [\sqrt{a^2+1}+a] = 2a$. Denn $a^2 < a^2+1$ und $a^2+1 < (a+1)^2$. Daher ist $\sqrt{a^2+1} < a+1$. Also ist $[\sqrt{a^2+1}] = a$ und damit $[\sqrt{a^2+1}+a] = 2a$. Es ist $a_2 = a_0 - 2 \cdot a \cdot 1 = \sqrt{a^2+1} - a$ und $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a} = \sqrt{a^2+1}+a$.

Beh: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2a$ und
2. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \sqrt{a^2+1}+a$

Bew: (a) und (b) gilt für $n = 0$. Gelte die Beahuptung für n. $\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}\right] = 2a$ und $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \sqrt{a^2+1}+a$. Daher ist $a_{n+2} = a_n - 2a \cdot a_{n+1}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} &= \frac{a_{n+1}}{a_n - 2a \cdot a_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 2a\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a} \\ &= \sqrt{a^2+1}+a. \end{aligned}$$

und $\left[\sqrt{a^2+1}+a\right] = 2a$. Daher folgt die Behauptung.

7 Programme

Ich gebe ein paar Programme an, die ich in Lisp geschrieben habe.
Rechnen ist mühsam. Euklid hatte dazu vielleicht einen schlauen Sklaven. Wir verwenden den Computer. Ich möchte die Programmiersprache Lisp verwenden, da sie besonders nahe an der Mathematik angesiedelt ist. Außerdem enthält sie schon eine Arithmetik mit exakten rationalen Zahlen. Ist $a = q \cdot b + r$ wie im Satz so bezeichne ich `(mod a b):=r`. Das ist die gleiche Bezeichnung wie in Lisp.

```
 (mod 17 12) ===> 5
 (mod 17/3 8/7) ===> 23/21


(defun ggM(a b)
  "Ergibt das groesste gemeinsame Mass von a und b"
(if   (= b 0) a
  (ggM b  (mod a b)))
)
(ggM 17/9 7/5) ===> 1/45


(defconst winzigklein 0.00000000000001)
(load-library "cl")
```

Die Library `cl` wird geladen um die Möglichkeiten von Common Lisp zu nutzen.

```
(defun punkt(&rest a)
  "Ruft man (punkt 1 2 3) auf so ergibt sich:
   ===> (1.0 2.0 3.0)"
(mapcar 'float a))
 (defun iota(a n)
  "Bettet den Vektor in eine Vektorraum groesserer Dimension ein
   es werden genuegend viele Nullen dreangehaengt"
 (append a (make-list (- n (length a)) 0.0))
)

(defun v+(a b)
 "Ergibt die Summe zweier Vektoren"
 (cond ((< (length a) (length b)) (mapcar* '+ (iota a (length b)) b))
       ((> (length a) (length b)) (mapcar* '+ a (iota b (length a))))
       ((= (length a) (length b)) (mapcar* '+ a b))
 )
)

(defun v-(a b)
 (cond ((< (length a) (length b)) (mapcar* '- (iota a (length b)) b))
       ((> (length a) (length b)) (mapcar* '- a (iota b (length a))))
       ((= (length a) (length b)) (mapcar* '- a b))
 )
)
```

```
(defun det2x2(a b)
 "Ergibt die 2x2 Determinante zweier zweidimensionaler Vektoren"
  (- (* (nth 0 a) (nth 1 b)) (* (nth 1 a) (nth 0 b)))
)
(defun imstreifen( punkt vs u)
    (and (< (det2x2 u (punkt 1 0)) (det2x2 u (v- punkt vs)))
         (<= (det2x2 u (v- punkt vs)) (det2x2 u (punkt 0 1))))
)
```

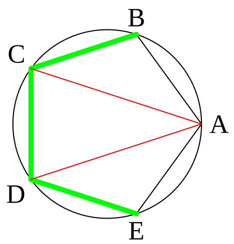
Die Operationen v+ und v- addieren beziehungsweise subtrahieren Vektoren. det2x2 gibt die Determinante einer quadratischen Matrix mit zwei Zeilen an.

```
(defun musterwort(vs breite u)
(let ((i 0)
      (p (punkt (ceiling (nth 0 vs)) (ceiling (nth 1 vs))))
      (pn (v+ p (punkt 1 0)))
      (wort "")
      )
(while (< i breite)
    (setq pn (v+ p (punkt 1 0)))
    (if (imstreifen pn vs u)
        (setq wort (concat wort "r")
               p pn)
        (setq wort (concat wort "h")
         p (v+ p (punkt 0 1)))
      )
(setq i (+ 1 i))
)
wort
)
)
(setq vs (punkt 0 0) phi (/ (+ 1 (sqrt 5)) 2)
       u (punkt phi 1))


(setq vs (punkt 0 0) phi (+ 1 (sqrt 2))
       u (punkt phi 1))

(musterwort (punkt 0 0) 80 u)
 "hrrrhrrhrrrhrrhrrrhrrhrrhrrrhrrhrrrhrrhrrhrrrhrrhrrrhrrhrrrhrrhrrhrrrhrrhrrrhrrh"
 "hrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrrhrhrrh"
 "hrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrhrrhr"
(musterwort (punkt 0 (sqrt 2)) 60 u)
 "hrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrhrrhr"
"rhrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrh"
"hrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrh"
"hrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrh"

"h"
"hr"
"hrrhr"
```

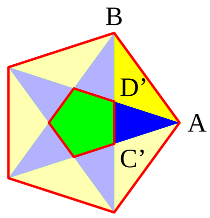
```
"hrrhrrhrhrrhr"
"hrrhrrhrhrrhrrhrhrrhrhrrhrrhrhrrhr"

(setq vs (punkt 0 0) phi (+ 1 (sqrt 2))
       u (punkt phi 1))
(musterwort (punkt 0 0) 8 u)
"hrrrhrrh"
"hrrrhrr"
"hrr|rhrrhrr|rhrrhrr|rhrrhrr|hrr|rhrrhrr|rhrrhrr|hrr|rhrrhrrrhrrhrrrh"
"hrr|rhrrhrr|rhrrhrr|rhrrhrr|hrr|rhr"

"h"
"hrrrhrrhrrrhrr"
"hrrrhrrhrr"
"hrrrhrr"
```

8 Arbeitsblätter

Definition 8.1 *Ein Fünfeck heißt regulär, wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.*

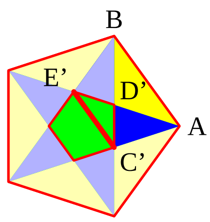
1. 

Berechne alle Winkel in der Zeichnung.

2. 

Zeige: Das innere Fünfeck ist wieder regulär. (Tipp: Die „Zacken“ des Sterns sind kongruent)

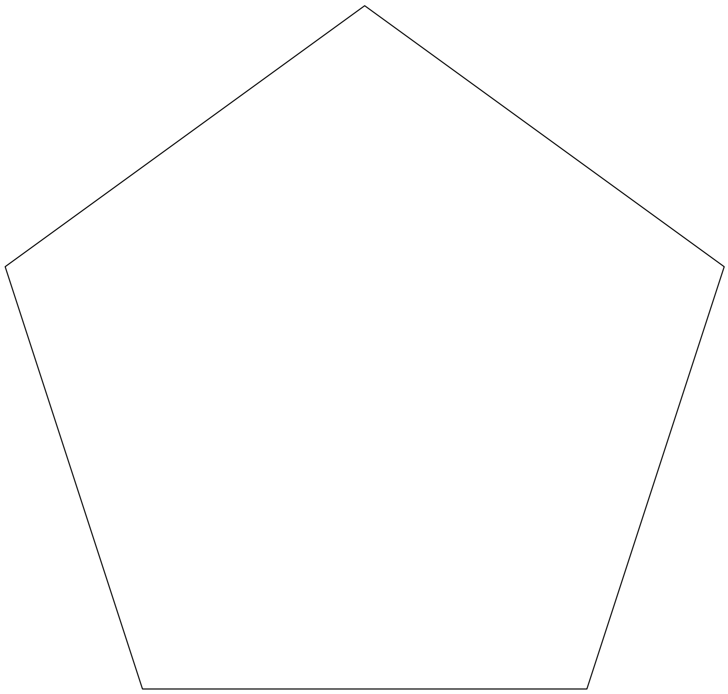
Ist a_0 die Diagonale im großen Fünfeck, a_1 die Seite im großen Fünfeck. Ist weiter a_2 die Diagonale und a_3 die Seite im kleinen Fünfeck so gilt:

3. 

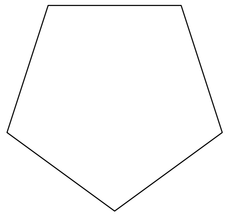
$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 + a_2 \\ a_1 &= a_2 + a_3 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned} \tag{20}$$

Zeige aus der Rekursion: Seite und Diagonale des Fünfecks haben kein gemeinsames Maß.

4. Gegeben ist ein reguläres Fünfeck mit der Seitenlänge a_1 und der Diagonale a_0. Konstruiere ein Fünfeck mit der Diagonalen a_1. Welche Seitenlänge hat das neue Fünfeck (In Abhängigkeit von a_0 und a_1)? Setze diese Konstruktion noch zweimal fort.



5. Gegeben ist ein reguläres Fünfeck mit der Seitenlänge a_1 und der Diagonale a_0. Konstruiere ein Fünfeck mit der Seite a_0. Welche Diagonale hat das neue Fünfeck (In Abhängigkeit von a_0 und a_1)? Setze diese Konstruktion noch zweimal fort.



6. Zeige $\dfrac{a_0}{a_1} = \dfrac{a_1}{a_2} \dots$ Tipp: Betrachte auf dem ersten Arbeitsblatt die ähnlichen Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AE'C'$. Das heißt: E' ist ein besonderer Teilpunkt der Diagonale AC. Und zwar gilt:

$$\frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{größere Teilstrecke}} = \frac{\text{größere Teilstrecke}}{\text{kleinere Teilstrecke}}$$

   Euklid nannte das stetige Teilung. In der Renaisasance wurde es „divina Proportione“ genannt und schließlich im 19ten Jahrhundert:„Goldener Schnitt“

7. Zeige

$$\frac{a_0}{a_1} = 1 + \frac{1}{\frac{a_0}{a_1}} \tag{21}$$

   Berechne aus dieser Gleichung $\Phi = \frac{a_0}{a_1}$ (quadratische Gleichung). Wie kann man Φ konstruieren mit Zirkel und Lineal.

8. Fibonacci startete anders aber berechnet nach der gleichen Regel

$$\begin{aligned} a_0 : &= 1 \\ a_{-1} : &= 1 \\ a_{-2} : &= 1 + 1 = 2 \\ a_{-3} : &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Berechne die folgende Tabelle weiter:

Nummer	**Fibonacci-Zahl**	**Quotient=** $\frac{a_{-(n+1)}}{a_{-n}}$
0	1	
-1	1	1
-2	2	2
-3	3	1.5
-4		
-5		
-6		
-7		
-8		
-9		
-10		

9. Berechne die gleiche Tabelle mit anderen Startwerten:

Nummer	**Fibonacci-Zahl**	**Quotient=** $\frac{a_{-(n+1)}}{a_{-n}}$
0	8	
-1	3	
-2		
-3		
-4		
-5		
-6		
-7		
-8		
-9		
-10		

10. Zeige: Für beliebige Startwerte a,b konvergiert die Qoutientenfolge. (Mit den Schülern nicht gelöst))

Wir wenden auf „Worte“ , die nur aus den Buchstaben „h“ und „r“ bestehen folgende Ersetzungsregel an: Ersetze jedes „h“ durch „hr“ und jedes „r“ durch „rhr“..
Aus `rh` wird beispielsweise `rhrhr`. Jedes Wort kann als Gitterweg vom Nullpunkt zu einem Gitterpunkt gedeutet werden. Man deute folgendermaßen:

- „r“ gehe eine Einheit nach rechts.
- „h“ gehe eine Einheit nach oben.

, so dass z.B `rhrhr` ist ein Gitterweg nach (3|2) ist.
Starten Sie mit dem Wort „`h`“ und wenden Sie die Ersetzungsregel viermal an. Es entstehen 4 Gitterwege nach den jeweiligen Endpunkten $p_1 \dots p_4$. Welche Steigungen haben die Geraden durch den Nullpunkt und die Punkte p_i? Äußern Sie eine Vermutung, welche Steigung die „Grenzgerade“ hat.

Index

Literatur

[Euk73] Euklid. *Die Elemente.* Wissenschaftl. Buchgesellschaft, 1973.

[KepII] Johannes Kepler. *Strena Vom sechseckigen Schnee.* W. Keiper, Berlin, MCMXLIII.

[Knu73] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming.* Addison-Wesley, 1973.

[Koc97] Helmut Koch. *Zahlentheorie.* Vieweg, 1997.

[Lün87] Heinz Lüneburg. *Kleine Fibel der Arithmetik.* B.I Wissenschaftsverlag, 1987.

[Rib91] Paulo Ribenboim. *The Little Book Of Big Primes.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[Sza72] Bence Szabolesi, editor. *Bela Bartok Weg und Werk Schriften und Briefe.* Bärenreiter. DTV, 1972.