Kategorien, Unendlichkeit

Andreas Bartholomé
84028 Landshut
Schirmgasse 275
email:andreas.bartholome@t-online.de

Zuletzt bearbeitet am 19. Oktober 2025

(indizierep Älexander")

1 Philosophisches

1.1 Ein Lagerfeuergespräch

Im Herbst sitzen Franz und Andreas an einem Lagerfeuer in Daun und betrachten den Nachthimmel.
Andreas: Weißt Du wieviel Sterne am Himmelszelt leuchten?
Franz: Sehr viele vielleicht unendlich viele.
Andreas: Was bedeutet „Unendlich“ ?
Franz: Wie der Name schon sagt. Nicht endlich.
Andreas: Bringt uns das weiter? Wenn ich nach der Bedeutung eines Begriffes frage, so möchte ich den unbekannten Begriff erklärt haben. Aber einfach so zu tun, als ob die Negation deutlich wäre und sich auf sie zu berufen lässt uns im Dunkeln zurück. Die Philosophie und Theologie Bücher sind voll solcher „Erklärungen“. Oft ist auch die Negation eines Begriffes schwerer zu verstehen als der Begriff selber. Denn was bedeutet endlich.
Franz: Ich mache einen Vorschlag: Vielleicht heißt „endlich“ zählbar? So habe ich an der rechten Hand 5 Finger. Eins, zwei, drei, vier, fünf. Auch das Geld in meinem Beutel ist sehr gut zählbar, die Lebensjahre die ein Mensch zur Verfügung hat ....
(Haare auf dem Kopf, Mücken, die in der Sonnenglut spielen.)
Andreas: Aber zählbar was ist das? Zählbar ist ein nicht falsifizierbarer Begriff aber verefizierbar. In einem Experiment kann (bei kleinen) festgestellt werden, ob die Menge zählbar ist. Was ist bei 9^{9^9}
Franz: Wenn ich beim zählen zu einem Ende komme.
Andreas. Zumindest solltest Du sagen. Ich kann prinzipiell zu einem Ende kommen. Sicher die Finger an jeder Hand kann ich zählen. Ich bilde eine Kette von von Wörtern etwa „Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf.“ Indem ich beim Daumen bis zum kleinen Finger jeweils eine Wort aufsage stelle ich fest , dass bei rechter wie linker Hand dasselbe Endwort herauskommt. Den Fingern der rechten und der linken Hand entspricht also dieselbe „Zahl“.
Franz: Bei größeren Mengen kann man etwa eine Strichliste führen, wie es bei Wahlen gemacht wird.

Andreas: Aber wie ist es bei diesem Ameisenhaufen? Die laufen wild durchein-

Abb. 1.1: Ameisenhaufen

ander. Zählen ist schier unmöglich ist. Man müsste jede gezählte Ameise bunt malen, damit die Zuordnung von Zahlwort zu Ameise eindeutig wird.

Franz: Für Dich oder mich, oder ich gestehe kein Mensch ist es möglich die Ameisen zu zählen. Aber im Prinzip ist es möglich! Ob das bei den Sternen möglich ist weiß ich nicht.

Andreas: Hätte Adam in der Stunde seiner Erschaffung begonnen eine Strichliste der Sterne zu führen. Bei seinem Tode hätte er die Strichliste an eines seiner Kinder vererbt mit dem Auftrag sie zu ergänzen. Die Erben hätten gewissenhaft weiter gezählt. Könnte es sein das irgend einer seiner Nachkommen die wirkliche Zahl erreicht hat? Im Lied heißt es: „Gott der Herr hat sie gezählet, dass ihm auch nicht eines fehlet an der ganzen großen Zahl".

Offensichtlich sind beide Begriffe etwas sperrig, wenn wir sie allgemein das heißt abstrakt klären wollen. Klären heißt durch Logik oder Erfahrung auf andere

Begriffe zurückführen.
Andreas: Da bin ich einverstanden. Aber das zurückführen kann nicht ins Endlose - womit wir wieder in der Nähe der Unendlichkeit sind- geschehen. Irgendwann werden wir sagen müssen: „Dies ist für uns beide und Menschen ähnlichen Sinnes und Vorbildung so deutlich, dass wir hier halt machen können. Aber das ist bei allgemeinen Begriffen oft sehr mühsam“.
Franz: Deswegen versuchen wir zunächst durch Erfahrung. Ich will mit dem Finger auf Endliches zeigen. Und Du sagst mir, ob Du dies auch als Endlich empfindest. Bei so schwierigen Dingen wie der Sternenhimmel oder Ameisenhaufen wird es sicher schwieriger sein zu einer Einigung zu kommen. Also vesuchen wir bei einfacheren Dingen zu einem Gleichklang zu kommen. Du bist doch sicher auch der Meinung, dass ich endlich viele Beine habe.
A: Darüber streiten wir nicht.
F: Aber auch, dass wir beide endlich viele Finger haben.
A: Wir können dies

- zählend feststellen.
- Durch Zuordnen. Ist A eine endliche Menge und $f\colon A \to B$ eine bijektive Funktion, so ist auch die Menge B endlich.
- Sind A und B endliche Mengen, so ist $A \cup B$ endlich.

Zählen wir, so ordnen wir zu. Ein Urzeithirte, der nicht unseren Zahlbegriff hatte wird dennoch eine brauchbare Methode gehabt haben um die Zahl seiner Schafe anzugeben. Zum Beispiel wird er pro Schaft einen Stein in einen Sack gelegt haben. Noch heute führen wir Strichlisten. Erst in einem zweiten Schritt wird diese Strichliste einem Zahlwort zugeordnet. Wir können dies sprachlich machen. Zählen wir laut, so sagen wir eigentlich ein Gedicht auf. Man vergleicht die Dinge mit einer geordneten Reihe von Wörtern. Mein Enkel will etwa die Stufen einer Treppe zählen. Er steigt die Stufen der Treppe hoch und spricht bei jeder Stufe eine weiteres Wort des Gedichtes. Ist er bei der letzten Stufe angekommen, so entspricht diese letzte Stufe dem zuletzt gesprochenen Wort des Gedichtes. Zugegeben in den meisten Kulturen wird ein ziemlich langweiliges Gedicht hergeleiert. „Ein, Zwei, Drei,… “ Zuordnen ist auch hier der Kern der Sache. Eine Hand wird auf die andere bezogen indem man die Hände aufeinander legt. So passt Daumen zum Daumen und kleiner Finger zu kleinem Finger. Wir schließen dass beide Hände gleich viel Finger haben.

Bleiben wir bei der Methode des Vergleichs mit einer Standartkette. Wir haben etwa eine Perlenkette. Die Perlen sind eindeutig bestimmt und bei jeder Perle ist die nachfolgende Perle auch eindeutig bestimmt. Eine solche Kette wird kann man unendlich nennen, wenn man vom Ausgang ausgeht immer einen Schritt weiter gehen kann und niemals an die gleiche Stelle zurückkommt. Dies werden wir mit Hilfe von Richard Dedekind im weiteren verdeutlichen.

Zitate

Bolzano

- Und dieses ist eben der Grund, warum ich mich in der vorliegenden Abhandlung ausschließlich nur mit der Betrachtung der Paradoxien des Unendlichen befasse. Dass es aber nicht möglich sein würde, den Schein des Widerspruches, der an diesen mathematischen Paradoxien haftet, als das, was er ist, als einen bloßen Schein zu erkennen, wenn wir uns nicht vor allem deutlich machten, welchen Begriff wir doch eigentlich mit dem Unendlichen verbinden, erachtet man von selbst. (Siehe Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, § 1.)

  Kommentar: Bolzano war offensichtlich der Meinung: Der Begriff der Unendlichkeit ist nur paradox nicht widersprüchlich. Ich halte ihn für noch nicht einmal paradox.

- Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgültig ist (an dem sich also nichts für uns Wesentliches ändert, wenn sich bloß diese ändert), nenne ich eine Menge; und eine Menge, deren Teile alle als Einheiten einer gewissen Art $\mathbb{A}$, d.h. als Gegenstände, die dem Begriffe A unterstehen, betrachtet werden, heißt eine Vielheit von $\mathbb{A}$(Siehe Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, § 4.).

  Kommentar: Bolzano nimmt hier den Begriff der Menge vorweg. Als Mengen sind nach seiner Erläuterung $\{1, 2, 3\}$ und $\{3, 2, 1\}$ gleich. Mengen sind also allein durch ihre Mitglieder bestimmt. Ordnungen oder Hierarchien spielen keine Rolle. In dem Beispiel sind die Mengen durch nennen der einzelnen Mitglieder bestimmt. Das ist aber normalerweise nicht möglich. Man muss einen deutlichen Begriff betrachten. Dann ist die Menge bestimmt durch alle Dinge, die unter diesen Begriff fallen.

1. $\{x|x$ bewohnt die Stadt Landshut $\}$
2. $\{p|p$ ist Primzahl $\}$.

Mengen, die auf diese Weise definiert sind nennt er Vielheiten. Es kann durchaus sein, dass man kein einfaches Verfahren hat um zu entscheiden ob ein bestimmtes Ding zu einer Menge (Vielheit) gehört oder nicht.

1.2 Kurze Geschichte der Unendlichkeit

Gibt es Unendlichkeit? Darüber haben vielleicht schon die Steinzeitjäger am Lagerfeuer gestritten, während sie den Sternhimmel betrachteten. Es wird immer welche gegeben haben, die den Zaun am Weltende zeigen konnten, die genau wussten, wo man umkehren musste. Andere wagten sich einen Schritt weiter. Das sind und waren die „eins weiter“ Optimisten. Es gibt immer einen Schritt in neues Land.
Aristoteles lehnte die Unendlichkeit des Universums entschieden ab. Für ihn befand sich die existierende Welt innerhalb der äußersten Kristallschale, an der die Fixsterne hingen. Da draußen war so viel Nichts, so dass es sogar kein Draußen mehr gab. Die Welt als ganzes war vollkommen. Ohne Grenzen zu sein, war ein Mangel, es mangelte an Grenzen. Ein vollkommenes Ding hat auch eine Grenze. Natürlich wusste auch er, dass man zumindest in der geistigen Welt stets Neuland betreten kann. Daher erfand er den seltsamen Begriff der „potentiellen Unendlichkeit“. Das ist eine Unendlichkeit, die nicht tatsächlich vorhanden ist, sondern immer im Entstehen begriffen ist. [1] Der aktuellen Unendlichkeit verweigerte er das Dasein. Noch Karl Friedrich Gauß war so der Autorität des Aristoteles hörig, dass er „zuförderst gegen den Gebrauch des aktuell Unendlichen protestierte“. Als Anfang des 20ten Jahrhunderts die Widersprüche in der noch jungen Mengenlehre auftauchten, fiel auch Mathematikern vom Schlage Poincarés nichts besseres ein, als den guten Aristoteles wieder hervorzuzerren: Er meinte „Es gibt kein aktual Unendliches, das haben die Cantorianer vergessen, und haben sich in Widersprüche verwickelt“(zitiert nach Herbert Meschkowski, *Georg Cantor Briefe*, Seite 447 Der antike Philosoph und Dichter Lukrez (ca 96 bis 55 v.Chr) widersprach heftig Aristoteles. Er meinte:

[1] Cantor bemerkt an einer Stelle in seinen Briefen (wo??), dass der Begriff der potentiellen Unendlichkeit, den der aktualen Unendlichkeit voraussetze.

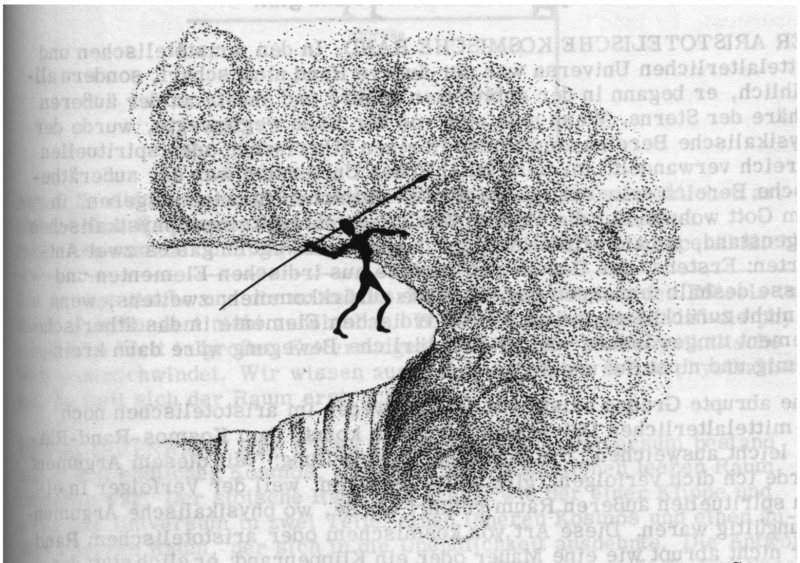


Abb. 5. 2. Das kosmische-Rand-Rätsel: Was geschieht, wenn ein Speer über den kosmischen Rand geworfen wird?

Abb. 1.2: Fliegt der Speer über den Kosmischen Rand?

> „Zeig mir lieber Aristoteles Deine Weltgrenze. Ich will hingehen mich auf die Grenzmauer stellen und meinen Speer werfen. Wohin fliegt er? Wird er zurückgeworfen, oder fliegt er über die Grenze? Was geschieht mit dem Speer? Mit dieser Frage will ich dich verfolgen, bis du mir eine einleuchtende Antwort geben kannst."

Auch Aurelius Augustinus verteidigte das aktual Unendliche mit Leidenschaft. Er braucht in seiner Argumentation gegen die ewige Wiederkehr des Gleichen eine unendliche Welt. Eine Legende erzählt: Sinnend spazierte er morgens am Ufer des Meeres und sieht er einen Knaben am Ufer spielen. Mit einer Muschel füllte er aus dem Meer Wasser in ein kleines Loch. Augustinus fragte ihn. „Was machst du da?" „Ich schöpfe das Meer aus". Augustinus lachte und meinte das Kind belehren zu müssen. Der Junge aber sagte: „Eher hat das Meer in dieser Kuhle Platz, als dass du die Unendlichkeit Gottes verstehst." Die Methode des Ausschöpfens wird uns noch beschäftigen.
Thomas von Aquin hielt an Lehre seines Meisters Aristoteles fest. Meiner Meinung nach hauptsächlich deswegen, weil in einer endlichen Welt die Methode

des Abstiegs so gut funktioniert. Alles was ist, hat ein Ursache. Diese ist wieder verursacht. So erhalten wir eine absteigende Kette von Ursache und Wirkung. In einer endlichen Welt muss jede solche Kette abbrechen. Es gibt einen Erstverursacher. Dies ist Gott. Der Beweis klappt aber nur in einer endlichen Welt.

Giordano Bruno ließ sich für die Unendlichkeit des Universums foltern und verbrennen. Er griff das Argument von Lukrez wieder auf und fragte. „Wenn die Welt endlich ist und außerhalb nichts, wo ist dann die Welt. Hängt sie im Nichts? Wo ist die Hand die ich über den Rand des Universums hinaus ausstrecke? “.

Verrückte oder scheinbar verrückte Fragen wurden im Zusammenhang mit der Unendlichkeit beredet. Engel sind Geister. Wem Engel zu transzendent sind, ersetze sie durch Punkte. Sie dehnen sich nicht wie Körper räumlich aus. Der wissensdurstige Scholastiker fragt sich: „Wieviel Engel haben auf einer Nadelspitze Platz?“ Oder wieviel Engel können von der Decke des Brautzimmers in der „Camera degli Sposi“ den jungen Eheleuten bei ihrem vergnüglichen Tun zuschauen? Eine Nadelspitze hat eine gewisse Breite etwa 1mm. Angenommen auf dieser Nadelspitze haben x solcher Wesen Platz. Dann können sich doch auf 1m sicher $1000x$ dieser transzendenten Wesen lagern. Aber der Strahlensatz belehrt uns eines besseren. Offensichtlich gibt es zu jedem Punkt des 1m genau einen Punkt des 1mm. Also ist $x = 1000x$. Es folgt daraus $x = 0$. Für Heiden, die sowieso nicht an Engel glauben, ist dies nicht absurd. Aber die sollten ja Punkte betrachten. Dass aber kein Punkt auf einem 1m Stab liegen soll, ist mit Sicherheit noch absurder. Daher muss die Voraussetzung falsch sein: Es gibt eine bestimmte Zahl von Punkten auf einer Strecke. Es ist nicht alles durch Anzahlen messbar, wie der weise Pythagoras lehrte. Halten wir nochmal in moderner Sprechweise fest:

Satz 1.1. *Es gibt eine injektive Funktion f von einer Strecke in dieselbe Strecke, welche nicht surjektiv ist.*

Pythagoras hat Unrecht: Nicht alles ist nach Maß und Zahl geordnet.

Noch krasser –schockierender– wurde diese Erkenntnis mit der Entdeckung der Perspektive zu Beginn der Renaissance unter anderen beispielsweise von Mantegna (1431 bis 1506).

Betrachten wir die folgende Situation.

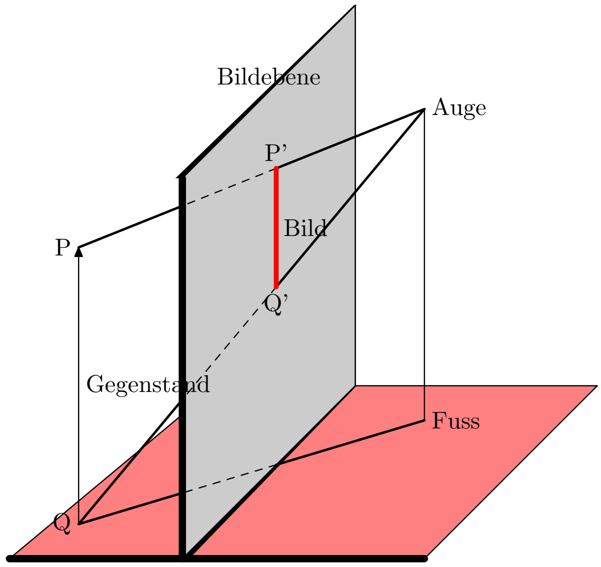


Abb. 1.3: Perspektive

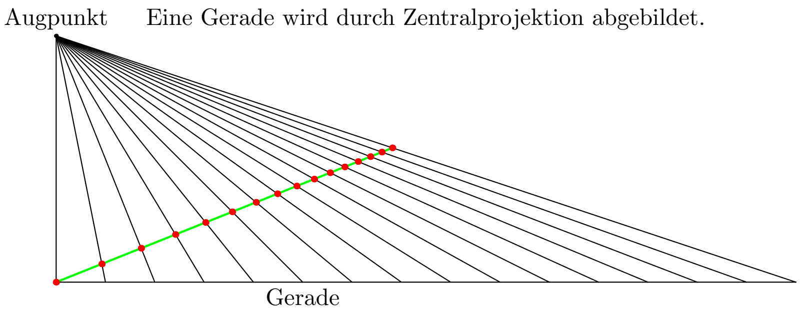


Abb. 1.4: Engel

Jedem Punkt der Halbgeraden entspricht genau ein Punkt der „Leinwand". Das heißt auf der Leinwand sind genau so viele Punkte, wie auf der ganzen Halbgeraden. Es gibt eine injektive Funktion von der ganzen Geraden in eine Strecke. Oder wieder: Es gibt eine injektive Funktion von der Geraden in die Gerade, welche nicht surjektiv ist. Roger Bacon, Wilhelm von Ockham und Nikolaus von Oresme haben solche Fragen im „finsteren Mittelalter" bedacht

Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, Seite 68. Sehr viel später betrachtete Galilei die Quadratfunktion. $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto n^2 \in \mathbb{N}$. Er wunderte sich darüber dass sie injektiv, aber nicht surjektiv ist. Dies heißt doch in einem gewissen Sinn, dass es genausoviel Quadratzahlen wie natürliche Zahlen überhaupt gibt. Schließlich systematisierte Bernhard Bolzano in seiner Schrift „Paradoxien des Unendlichen" diese Wunder. Richard Dedekind griff in seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen" diese Eigenschaft auf und erklärte: Eine Menge A heißt unendlich, wenn es eine injektive Funktion von A nach A gibt, welche nicht surjektiv ist. Dabei heißt eine Funktion von A nach B injektiv, wenn bei jedem Element aus B höchstens ein Pfeil endet. Die Funktion heißt surjektiv, wenn bei jedem Element aus B mindestens ein Pfeil endet. Bis dahin war das Wort „Unendlichkeit" nur mit einer Fülle unklarer Vorstellungen verbunden. Dedekind verband das Wort mit einem klaren Begriff.

2 Ketten

> „Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung eines früheren und als die Ursache des folgenden Zustands betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen. Der menschliche Geist bietet in der Vollendung, die er der Astronomie zu geben verstand, ein schwaches Abbild dieser Intelligenz dar.“ (Diese Zitate gehören an eine andere Stelle).
>
> „Die Regelmäßigkeit, welche uns die Astronomie . . . zeigt, ist ohne Zweifel bei allen Erscheinungen vorhanden. Die von einem einfachen Luft- oder Gasmolekül beschriebene Kurve ist in eben so sicherer Weise geregelt wie die Planetenbahnen: es besteht zwischen ihnen nur der Unterschied, der durch unsere Unsicherheit bewirkt wird.. . . “ (Zitiert nach dem Buch Brigitte, *Mythos Determinismus*, Seite 22)

2.1 Begriff, Beispiele

Die Leserin aber auch der Leser sollte den Begriff der Funktion von einer Menge in die andere in genügender Deutlichkeit kennen und mit ihm umgehen können. Auch sollte sie wissen was injektive, surjektive und bijektive Funktionen sind. Wir wollen unter anderem über das Zählen nachdenken. Richard Dedekind meinte dazu:

> „Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist“(So

> Richard Dedekind in seiner Schrift Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite V)

Definition 2.1.1. Ist A eine Menge und $\alpha : A \to A$ eine Funktion, so heißt das Paar (A, α) eine Kette. Manchmal sagen wir auch *einstellige Algebra*. Oft wird dies auch als ein *diskretes dynamisches System* bezeichnet.

Von Richard Dedekind stammt der Begriff Kette. Die Wortwahl Dedekinds passt gut. Sie weckt die richtige Anschauung.
Eine einstellige Algebra ist ein gerichteter Graph, bei dem von jeder Ecke genau ein Pfeil ausgeht. Man kann an ein Wegenetz denken in dem von jedem Ort genau ein Weg ausgeht. Manchmal heißt so etwas auch diskretes dynamisches System. [1]

Beispiele:

Um die Beispiele kürzer formulieren zu können setze ich die Existenz der natürlichen Zahlen, ja sogar von $\mathbb{R}$ voraus. In die systematische Untersuchung geht dies nicht ein. Dies ist die Methode, wie man sich einen ersten Eindruck von der Bedeutung eines neuen Begriffs macht. Man schaut die bekannte Welt an und überlegt, wie man ihr Verständnis mit Hilfe des neuen Begriffs, dem neuen Werkzeug, ordnen kann. Erst danach ordnet man auch die schon geordneten Sachen in das neue Regalsystem ein.
Ketten sind gut malbar. Ein paar habe ich gezeichnet. In den gerichtete Graphen, geht von jedem Knoten genau ein Pfeil aus (Siehe auch2.4).

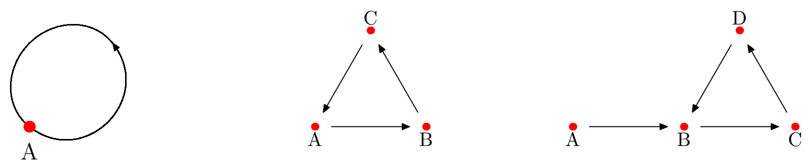


Abb. 2.1: Die ersten beiden Figuren sind einfache Kreise. Die dritte endet in einem Kreis

Beispiele:

[1] Dedekind definiert den Begriff Kette eine Kleinigkeit anders.(Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Erklärung 37.) Er geht aus von einer Menge S und einer Abbildung $\varphi : S \to S$. Eine Teilmenge K von S nennt er Kette, wenn $\varphi(K) \subset K$ ist. Wenn also K abgeschlossen gegenüber φ ist.

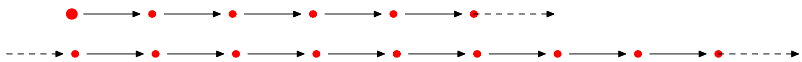
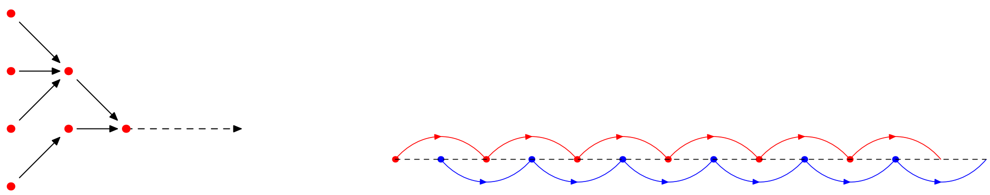


Abb. 2.2: Die obere Kette hat einen Anfang und kein Ende. Die untere Kette hat weder Anfang noch Ende

1. Ein gute Beschäftigung für langweilige Minuten ist es Pfeildiagramme zu zeichnen. Die Leserin setze schwarze, weiße, bunte Punkte auf Papier und verbinde sie mit Pfeilen.

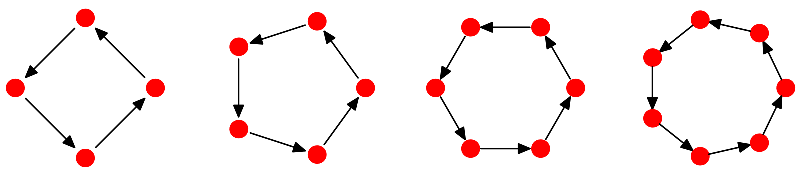
   Sie achte darauf: Von jedem Punkt muss genau ein Pfeil ausgehen. Sie macht sich dadurch unabhängig von der Existenz von $\mathbb{N}$ und erst recht von $\mathbb{R}$. Ein paar weitere Ketten habe ich gezeichnet.



Viele Wurzeln

Zwei Anfaenge kein Ende

Abb. 2.3: Ketten mit mehreren Wurzeln



Viele Zykel

Abb. 2.4: Gerichtete Graphen. Von jedem Punkt geht genau ein Pfeil aus

2. Wir betrachten $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Die Abbildung $1+$ ergibt einen Zyklus der Länge 4. Nämlich $0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0$. Betrachtet man die Abbildung $2+$ und startet mit 0, so erhält man den Zyklus $0 \mapsto 2 \mapsto 0$. Startet man mit 1 erhält man den Zyklus $1 \mapsto 3 \mapsto 1$. Also zwei Zyklen, die kein Element gemeinsam haben. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist elementfremde Vereinigung zweier Zyklen.

3. Wieder $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: Wir betrachten die Funktion $f(x) = (x^2 + 1) \bmod 4$. Startet man mit 0 ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Startet man mit 3, so ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

4. Die Abbildung $2*$ ergibt:
   a) Mit Startpunkt 0: $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
   b) Mit Startpunkt 1 ergibt sich: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
   c) Mit Startpunkt 2 ergibt sich: $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
   d) Mit Startpunkt 3 ergibt sich: $\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$

5. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
   a) $2+$: $0 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 0$.
   b) $3+$: $0 \to 3 \to 1 \to 4 \to 2 \to 0$. Dies ist genau der umgekehrte Pfad wie bei $2+$. Warum?
   c) i. $2*$. $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
      ii. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$. Bei Start 3 oder 4 genauso. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist bezüglich $2*$ die elementfremde Vereinigung von $[0]$ und $[2]$

6. (Das gehört genauer erläutert) Der Urzeithirte wird vielleicht seine Schafe folgendermaßen gezählt haben. Für jedes Schaf legt er ein Hölzchen in den Sand. Er macht sich also eine Strichliste `||||||....` Seine Funktion α ist ganz einfach: Einen Strich dranhängen. Unser Ziffernsystem haben die Inder erfunden. Der Inder Āryabhata hat zum ersten Mal Regeln zum Rechnen im Positionssystem angegeben. Darauf beruht die folgende raffinierte Methode des Zählens.

   `0, 1, 10,11, 100,...`

   Dies ist die Folge der natürlichen Zahlen im Dualsystem. Geistige Nachfahren des Inders Āryabhata haben dieses System entwickelt. Āryabhata hat unser Zehnersystem erfunden. Siehe hierzu das Buch „Lexikon bedeutender Mathematiker" Gottwald, *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Seite 29

7. Fibonacci Zahlen: Wir betrachten die folgende Funktion

$$f : \mathbb{N}^2 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^2$$

Startet man mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich folgende Bahn:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} \dots$$

8. Etwas Seltsames: Man starte mit einer durch 3 teilbaren Zahl etwa 3. Man bilde die Summe der Kubikzahlen mit den Ziffern als Basis. Also in unserem Fall $3^3 = 27$. Wiederhole: $2^3 + 7^3 = 351$. Weiter $3^3 + 5^3 + 1^3 = 153$. Und hier endet die Geschichte. Das klappt scheinbar immer. Zum Beispiel, wenn man mit 12 oder 21 startet. Ich weiß nicht warum! 153 ist auch die 17te Dreieckszahl. Petrus fischte aus dem See Genesaret 153 Fische.

   Starten wir mit 1272

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 7^3 + 2^3 &= 360 \\ 3^3 + 6^3 + 0^3 &= 243 \\ 2^3 + 4^3 + 3^3 &= 99 \\ 9^3 + 9^3 &= 1458 \\ 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 &= 702 \\ 7^3 + 0^3 + 2^3 &= 351 \\ 3^3 + 5^3 + 1^3 &= 153 \end{aligned}$$

   Wir sind wieder bei den Fischen des heiligen Petrus gelandet. Wirklich ein Rätsel oder eine schöne Aufgabe, wenn man zwei freie Nachmittage hat. Wir werden etwa später das Problem genau behandeln.

9. Von dem Mathematiker Lothar Collatz stammt folgende Kette. Sie ist verbunden mit einem ungelösten Problem.

   3n+1 Problem

   Wir definieren:

$$f\colon \mathbb{N} \ni n \mapsto \begin{cases} 3 \cdot n + 1 \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ n/2 \text{ falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \tag{2.1}$$

   Starten wir mit dem Wert 1 so erhalten wir die folgende Kette.

   $1 \to 4 \to 2 \to 1.$

   Es ergibt sich ein Kreis. Starten wir mit 3 so ergibt sich: $3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \ldots.$

   Die Bahn endet im selben Kreis. Ist dies immer der Fall unabhängig vom Startwert? Dies ist ein bis heute ungelöstes Problem.

10. Berühmt sind die quadratischen Iterationen, die unter anderem die sogenannten Feigenbaumdiagramme ergeben. Betrachten wir die logistische Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto r \cdot (1 - x) \cdot x \tag{2.2}$$

Setzt man etwa $r = 2$, so erhält man die linke Bahn von Abbildung 2.5 mit dem Startwert $x = 0.9$. Setzt man etwa $r = 3$, so erhält man die rechte Bahn von Abbildung 2.5 mit dem Startwert $x = 0.9$.

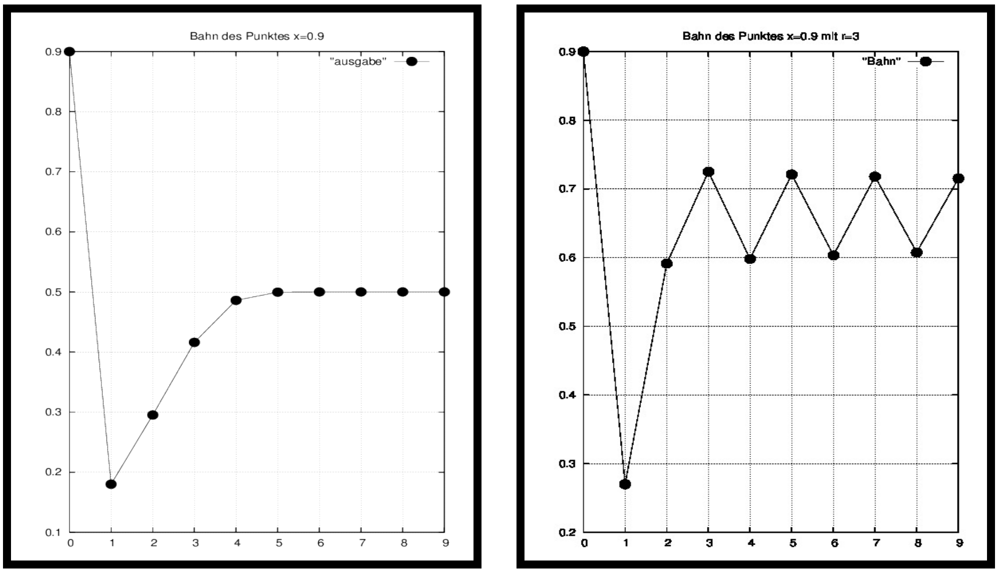


Abb. 2.5: Bahn eines Punktes unter der logistischen Funktion

Fragen:

1. Hat beispielsweise die Funktion f^2 einen Fixpunkt? Sicher ist 0.5 ein solcher. Aber hat die Funktion f Punkte der Periode 2?

2.1.1 Abgeschlossenheit

Definition 2.1.2. Eine Teilmenge $U \subset A$ ist gegenüber der Abbildung $\alpha : A \to A$ abgeschlossen, wenn $\alpha(U) \subset U$ gilt. Sie ist α–koabgeschlossen, wenn $\alpha^{-1}(U) \subset U$ ist.

$[U]$ ist die Menge der Punkte, die von U aus erreichbar sind durch α. Besteht U nur aus einem Element, so heißt $[u]$ die von u erzeugte Bahn. Die leere Menge und die Menge A ist gegenüber jeder Abbildung der Menge in sich abgeschlossen.

Bemerkung 1 (Regeln)

1. Ist $U \subset A$ α-abgeschlossen, so ist $\alpha^{-1}(U)$ gegenüber α abgeschlossen.
2. Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
3. Ist U eine Teilmenge der einstelligen Algebra A, so gibt es eine kleinste abgeschlossen Teilmenge $[U]$, welche U enthält und abgeschlossen ist.
4. Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. □

Zu 1. Sei $y \in \alpha^{-1}(U)$. Dann ist $\alpha(y) \in U$. Da U gegenüber α abgeschlossen ist, ist $\alpha(\alpha(y)) \in U$. Daher ist $\alpha(y) \in \alpha^{-1}(U)$.
Zu 2. Sei $(U_i|i \in I)$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen und $x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$. Dann ist $\alpha(x) \in U_i$ für alle $i \in I$. Das heißt $x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$
Zu 3. Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen, die U enthalten, ist die kleinste abgschlossene Teilmenge, die U enthält.
Zu 4. Sei $(A_i|i \in I)$ eine Familie von gegenüber α abgeschlossenen Teilmengen. Weiter sei a in $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $a \in A_i$. Also ist $\alpha(a) \in A_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. □

Definition 2.1.3. Wir bezeichnen mit $[U]$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die U enthält.

$[U]$ heißt auch abgeschlossene Hülle von U in A.
$U \xrightarrow{\alpha} \alpha(U) \xrightarrow{\alpha} \alpha(\alpha(U)) \longrightarrow \alpha^3(U) \xrightarrow{\alpha}$
Besteht U nur aus einem Element, so heißt $[u]$ die von u erzeugte Bahn oder Orbit. Die leere Menge und die Menge M ist gegenüber jeder Abbildung der Menge in sich abgeschlossen.
Wir sehen warum Dedekind dies eine Kette nennt. Man kann mit Hilfe f eine Kette bilden ohne $[U]$ zu verlassen.

Bemerkung (Induktion). 1. *Will man eine Aussage für alle Elemente von $[U]$ zeigen, so muss man die Aussage für alle Elemente aus U zeigen und, dass der Gültigkeitsbereich der Aussage gegenüber α abgeschlossen ist. Dies nennt Dedekind in Dedekind,* Was sind und was sollen die Zahlen, *Satz 59 in den Satz von der vollständigen Induktion. Es werden hier* *keinerlei besondere Eigenschaften von* $\mathbb{N}$ *gebraucht, sondern nur die Abgeschlossenheit gegenüber* α*.*

2. *Poincaré scheint die vollständige Induktion nicht richtig zu verstehen. Man lese hierzu in dem Buch „Wissenschaft und Hypothese" (Siehe Poincaré,* Wissenschaft und Hypothese*, Seite 5 ff). Mir scheint es, als ob er für die Rechtfertigung der vollständigen Induktion die Theorie der natürlichen Zahlen voraussetzt. Dies ist aber keineswegs der Fall. Dedekind hat dies richtig gestellt. Ich brauche ein vernünftiges Beispiel. In dem Verzeichnis Logik habe ich einen Text geschrieben der die Abgeschlossenheit an einem Beispiel diskutiert. Dies gilt es hier einzufügen.*

3. *„Es ist in der Tat so, dass man das Induktionsprinzip nicht beweisen kann; es bildet vielmehr selbst die Grundlage für alles was wie sein Beweis aussieht." (SieheJacobs,* Resultate Ideen und Entwicklungen in der Mathematik*, Seite 70) Offensichtlich sieht auch Jacobs die Induktion nicht richtig. Es ist die Frage bei weiteren mathematischen Autoren ob sie die Induktion in so klarem Licht sehen, wie es Dedekind getan hat.*

Aufgaben:

1. Zeige: Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind gegenüber der Abbildung $1+\colon n \mapsto 1+n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen.
   a) $T = \{n | 1+3+5\cdots+2\cdot n+1 = n^2\}$.
   b) $T = \{n | 1+2+3+\ldots n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\}$.
   c) $T = \{n | 2^n > 6n+7\}$.
   d) $T = \{n | 2^n > n^2\}$.
   e) k sei eine feste natürlich Zahl $T = \{n | 2^n > n^k\}$.

2. Sei $A = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$. Betrachte die Funktion $f\colon A \ni x \mapsto \frac{2x-4}{x} \in A$. Die Definition ist sinnvoll, denn für alle $x \in A$ ist $f(x) \in A$. Zeige dies.
   a) Zeichne den Graphen der Funktion. Zeige: Sie ist surjektiv und injektiv.
   b) Berechne eine Bahn mit Startwert 3.
   c) Berechne eine Bahn mit Startwert 8.
   d) Zeige: Mit jedem Startwert erhält man eine Bahn der Länge 3. Als Anregung betrachte den folgenden Graph gezeichnet mit Gnuplot.

3. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,-1\} \ni x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$
   a) Berechne die Bahn von 1.

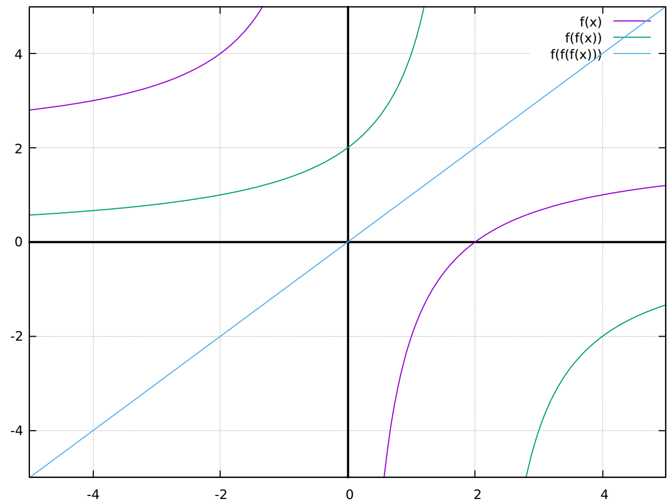


Abb. 2.6: Graph der Funktion $f(x) = \frac{2x-4}{x}$

b) Berechne die Bahn von 10.

c) Welche Länge haben alle Bahnen.

4. Mache dasselbe wie in der vorigen Aufgabe mit der Funktion $f(x) = \frac{3}{4-x}$.

   a) Zeige die Menge $]-\infty, 1]$ ist abgeschlossen gegenüber f.

   b) Die Menge $[1, 4[$ ist nicht abgeschlossen gegenüber f.

   c) Berechne die Bahn von 0 unter f.

5. Betrachte die folgende Funktion $f : [0, 1] \ni x \mapsto (2 * x) \bmod 1 \in [0, 1]$

   a) Berechne die Kette mit Startwert $\frac{3}{17}$.

   b) Berechne die ersten 20 Glieder der Kette mit Startwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Ist die entstehende Kette endlich?

6. a) Wir ordnen jeder Zahl $n = \sum a_i 10^i$ folgendermaßen eine natürliche Zahl zu: $f(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Das ist die Quersumme der Zahle. Wo endet das Verfahren, wenn von einer Zahl ausgeht, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt?

   b) Wir ordnen jeder natürlichen Zahl $n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i 10^i$ folgendermaßen eine Zahl zu: $f(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$. Dies ist die alternierende Quersumme. Wo endet hier das Verfahren?

7. Wir ordnen jeder natürlichen Zahl $n = \sum a_i 10^i$ folgendermaßen eine natürliche Zahl zugeordnet: $f(n) = \sum (a_i)^2$. Dabei sind a_i die Ziffern der natürlichen Zahl. Bilde die Kette $n \to f(n) \to f(f(n)) \to \ldots$.
   a) Berechne für den Anfangswert 2 die Kette. Sie endet in einem Kreis.
   b) Berechne für den Anfangswert 3 die Kette. Sie endet in einem Kreis.
   c) Gibt es überhaupt Anfangswerte, so dass die Kette nicht in einen Kreis übergeht? **??**

Computerecke:

1. a) Die oben betrachtete Funktion $f(x) = \frac{2 \cdot x - 4}{x}$ kann in Lisp programmiert so werden.

```
(defun fu(x)
   (/ (- (* 2 x) 4)
     x))
```

   Dieses Programm ist in Common Lisp geschrieben. Dort wird mit exakten Brüchen gerechnet. In Emacs Lisp müsste man eingeben `(fu 3.0)` In Common Lisp lautet das Ergebnis `(fu 3) => 2/3`. Diese Funktion kann man nun wiederholt auf ein gegebenes Element anwenden. Wir setzen etwa den Startwert $x = 1$. Das geschieht durch `(setq x 1)`. Als zweiten Befehl setzen `(setq x (fu x))` Das ergibt mit Startwert 1 die Folge: $1 \to -2 \to 4 \to 1$. Man kann nun testen, dass für jeden Anfangswert die Länge der Kette 3 ist.
   b) Teste mit anderen Startwerten: Beispielsweise ergibt: $3 \to \frac{2}{3} \to -4 \to 3$. Test mit den Startwerten $5, 6, 7, 8, 9, 10$
   c) Warum ergibt mit dem Startwert 2 der zweite Schritt eine Fehler Meldung?
   d) Beweise. Nach jeweils dreimal ausüben der Funktion ergibt sich der ursprüngliche Wert.
   e) Je zwei auf diese Art erhaltene Kreise sind elementfremd.
2. Untersuche die folgende Funktion auf Zyklen $f(x) = \frac{3 \cdot x + 4}{5 \cdot (4 \cdot x - 3)}$. Programmiere in Lisp die Funktion und untersuche numerisch ob die Funktion eventuell in eine Zyklus endet.
3. Die folgende Lisp Funktion berechnet die Summe der Quadratziffern rekursiv.

```
(defun ziffernquadratsumme (summe zahl)
 "Diese Funktion  berechnet die summe der Quadratziffern"

(if (<= zahl 9) (+ summe (* zahl zahl))
   (ziffernquadratsumme (+ summe (* (mod zahl 10) (mod zahl 10)))
   (/ zahl 10))))
```

```
============================================
(ziffernquadratsumme 0 56)
```

Starten wir etwa mit `(setq n 23)` und wenden die Funktion wiederholt an, so ergibt sich `(setq n (ziffernquadratsumme n))` $23 \to 13 \to 10 \to 1$

4. Die folgende Funktion schreibt die Bahn eines Elementes in eine Liste.

```
(defun bahn(x)
  (setq liste nil)
  (while (not (member x liste))
  (progn
    (setq liste (append liste (list x)))
    (setq x  (ziffernquadratsumme 0 x))
)
  )
  (setq liste (append liste (list x)))
)
(bahn 123) (123 14 17 50 25 29 85 89 145 42 20 4 16 37 58 89)
(bahn 11) (11 2 4 16 37 58 89 145 42 20 4)
(bahn 2) (2 4 16 37 58 89 145 42 20 4)
(bahn 3) (3 9 81 65 61 37 58 89 145 42 20 4 16 37)
(bahn 4) (4 16 37 58 89 145 42 20 4)
(bahn 5) (5 25 29 85 89 145 42 20 4 16 37 58 89)
(bahn 6) (6 36 45 41 17 50 25 29 85 89 145 42 20 4 16 37 58 89)
(bahn 7) (7 49 97 130 10 1 1)
(bahn 15) (15 26 40 16 37 58 89 145 42 20 4 16)
(bahn 18) (18 65 61 37 58 89 145 42 20 4 16 37)
(bahn 19) (19 82 68 100 1 1)
```

Ich vermute, dass jede Bahn in der Bahn

a) $1 \to 1$ oder

b) in $4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$) endet.

5. Die folgende Funktion ist definiert: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto (b, a + b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Ihre Realisation in `Lisp` kann so aussehen.

```
(defun fiba(a)
  "Die Funktion fiba ist folgende Funktion (a,b) => (b,a+b).
   Es ist (fiba '(2 3)) => (3,5) "
     (list (nth 1 a)
 (+ (nth 0 a) (nth 1 a))
 )
 )
```

Berechne bei einem Startwert die ersten 10 Elemente einer Bahn.

6. Damit sich endliche Bahnen ergeben noch die Variante der Funktion. Sie berechnet $(b \bmod m, (a+b) \bmod m)$.

```
(defun fibamod(a m)
  "Die Funktion fiba ist folgende Funktion (a,b)
    => (b mod m,a+b mod m).
   Es ist (fibamod '(13 5) 7) => (5 4) "
  (list (mod (nth 1 a) m)
        (mod (+ (nth 0 a) (nth 1 a)) m)
   )
  )
```

Ziffernssume im 3 er System Ich will noch ein weiteres Beispiel durchrechnen:
Sei

$$g : \mathbb{N} \ni x = 3 \cdot q + r \mapsto \begin{cases} 0 \text{ falls } x = 0 \\ g(q) + r^2 \end{cases}$$

- Es ist $g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 4, g(3) = 1, g(4) = g(1 \cdot 3 + 1) = g(1) + 1 = 2$.
- Ist $x = a_0 + a_1 \cdot 3 + \cdots + a_n \cdot 3^n$ mit $a_i < 3$ so ist $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2$.

Beweis durch Induktion nach der Stellenzahl.

- Die Behauptung ist richtig, wenn x nur eine Stelle hat.
- Sei $x = a_0 + a_1 3 \cdots + a_{n-1} 3^{n-1} + a_n 3^n$. Dann ist $g(x) = a_0^2 + g(3 \cdot (a_1 + \cdots + a_n \cdot 3^{n-1})) = a_0^2 + g(y)$. Dabei ist y eine $n-$stellige Zal im $3-$er System. Also ist $g(y) = a_1^2 + \cdots + a_n^2$. Es folgt $g(x) = a_0^2 + \cdots + a_n^2$.
- Sei $\mathbb{M} = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 3^3\}$. $\mathbb{M}$ ist abgeschlossen gegenüber g. Da $x < 3^3$ ist, ist x von der Form $x = a_0 + a_1 3 + a_2 3^2$. Also ist $g(x)$ von der Form $g(x) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 < 3^2 + 3^2 + 3^2 = 3^3$. Also ist $\mathbb{M}$ abgeschlossen gegenüber g.

- Eine Bahn endet in M, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $g^k(x) \in \mathbb{M}$. Es enden alle Bahnen in $\mathbb{M}$.

  Beweis: Sei $x \in \mathbb{M}$. Dann ist die Behauptung schon gezeigt. Sei $x \notin \mathbb{M}$. Also ist $x \geq 27 = 3^3$.

  Beh. In diesem Fall ist $g(x) < x$.

  Dazu zeige ich:

  Beh: Für alle $n \geq 3$ ist $(n+1) \cdot 4 \leq 3^k$. Für $k = 3$ hat man $(k+1) \cdot 4 = 16 < 27$. Gelte die Behauptung für k. Zu zeigen ist, dass unter dieser Voraussetzung $(k+2) \cdot 4 < 3^{k+1}$ gilt. Dies folgt so:

  $$(k+2) \cdot 4 = (k+1) \cdot 4 + 4$$
  $$(k+1) \cdot 4 + 4 < 3^k + 3^k + 3^k = 3^{k+1}$$

  Ist $x \geq 3^3$, $x = a_0 + a_1 3 + \cdots + a_n 3^n$, so ist

  $$g(x) = a_0^2 + \dot{+} a_n^2 < 4 \cdot (n+1) < 3^n \leq x$$

  Also $g(x) < x$

- Die Bahn von x: $= [x] = \{g^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ hat ein kleinstes Element in $\mathbb{M}$.

  Sie y kleinstes Element der Bahn. Wäre $y > 3^3$, so wäre $g(y) < y$. Das geht nicht. Also ist $y \in \mathbb{M}$.

Wenn wir wissen wollen, wo die verschiedenen Bahnen enden, brauchen wir nur noch zu untersuchen, wo die Bahnen enden, die in $\mathbb{M}$ beginnen. Dies ist eine geeignete Aufgabe für den Rechner. Dies soll im Kapitel Programme erledigt werden.
Es stellt sich heraus, dass es folgende Bahnenden gibt: $1 \to 1$, $4 \to 2 \to 4$, $5 \to 5$, $8 \to 8$.

Definition 2.1.4. Sei (A, α) eine Kette und $U \subset A$ eine Teilmenge. $H(U) := \{x |$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n(x) \in U\}$ heißt Herkunft von U.

Bemerkung. *Sind U, V zwei abgeschlossene Mengen in der Kette (A, α) mit leerem Durchschnitt, so ist $H(U) \cap H(V) = \emptyset$.*

Der Beweis ist einfach.. Denn wäre $x \in H(U) \cap H(V))$, so gäbe es $k, r \in \mathbb{N}$ und $\alpha^k(x) \in U$ und $\alpha^r(x) \in V$. Also ist $\alpha^{l+r} \in U \cap V$. Das geht nicht.
Mit dem $\alpha = g$ das wir eben betrachtet haben erhält man

Folgerung 2.1. $\mathbb{N} = H(\{1\}) \sqcup H(\{2,4\}) \sqcup H(\{5\}) \sqcup H(\{8\})$. *Ich nenne dies den Sockel von* $(\mathbb{N}, g)()$.

Löse die Aufgabe im 4-er System.

Schreibe ein Programm um den Sockel zu bestimmen.

Löse in anderen Systemen.

2.2 Erzeugung

Wegen den Regeln 3 Seite 18 ist jede Menge $U \subset A$ in einer kleinsten abgeschlossenen Teilmenge von A enthalten.

Definition 2.2.1. Sei (A, α) eine Kette und $U \subset A$ eine Teilmenge von A mit $[U] = A$. Dann heißt U Erzeugendensystem von A. Man sagt U erzeugt A.

Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\alpha : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ni x \mapsto x + 2 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Dann erzeugt $\{0, 1\}$ die Menge $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Satz 2.2 (Regeln-1). *Es sei (A, α) eine Kette. Und $U \subset A$. Es gilt:*

1. $[U] = U \cup \alpha([U])$.
2. $\alpha([U]) = [\alpha(U)]$.

Zu 1: Es ist $\alpha(U) \subset [U]$. Daher ist $[\alpha(U)] \subset [U]$.
Außerdem ist $U \subset U \cup [\alpha(U)]$. Es ist $U \cup [\alpha(U)]$ abgeschlossen gegenüber α. Da $[U]$ die kleinste $\alpha-$ abgeschlossene Menge ist, die U enthält ist $[U] = U \cup [\alpha(U)]$.
Zu 2: $\alpha([U])$ ist eine gegenüber α abgeschlossene Menge. Außerdem ist $\alpha(U) \subset \alpha([U])$. Daher ist $[\alpha(U)] \subset \alpha([U])$.
Sei $y = \alpha(x) \in \alpha([U])$ mit $x \in [U] = U \cup [\alpha(U)]$. Ist $x \in U$, so ist $y = \alpha(x) \in \alpha(U)$. Also ist $y \in [\alpha(U)]$. Ist $x \in [\alpha(U)]$, so ist auch $y = \alpha(x) \in [\alpha(U)]$, da $[\alpha(U)]$ abgeschlossen gegenüber α ist. Also ist $y \in [\alpha(U)]$.

Satz 2.3 (Regeln-2). *Es sei (A, α) eine Kette.*

1. *Sei $a \in A$. Sind x, y zwei Elemente aus der Bahn von a, so liegt x in der Bahn von y oder y liegt in der Bahn von x. Achtung! Hier ist nicht „entweder oder“ gemeint, sondern es kann auch beides der Fall sein.*
2. *Für alle $x, y \in [a]$ so gilt: $[x] \bigcap [y] \neq \emptyset$.*
3. *Es ist $[U] = \bigcup\limits_{u \in U} [u]$.*

Zu 1. Die Behauptung besagt: Nur zwei Fälle können auftreten.

- $a \to \cdots \to x \cdots \to y \to \ldots$ oder

- $a \to \cdots \to y \cdots \to x \to \ldots$.

Ich drücke es nochmal anders aus: Sind x und y von a aus erreichbar durch α, so ist y von x aus erreichbar oder x ist von y aus erreichbar.
Wir benutzen das Prinzip von der Induktion (siehe die Bemerkung 1 auf 18)
Sei y beliebig in $[a]$. Sei

$$T = \{x | x \in [a] \text{ mit: } x \in [y] \text{ oder } y \in [x]\}$$

Es ist $a \in T$, denn $y \in [a]$.
Sei $x \in T$.
1. Fall: $x \in [y]$ dann ist $\alpha(x) \in [y]$ und daher $\alpha(x) \in T$.
2. Fall: $y \in [x]$. Ist $y = x$, so ist $\alpha(x) \in [\alpha(x)] \subset [x] = [y]$ und man ist wieder fertig. Andernfalls ist $y \neq x$ und infolgedessen $y \in [\alpha(x)]$. Daher ist wieder $\alpha(x) \in T$. Also ist T abgeschlossen gegenüber α. Daher ist $T = [a]$.
Zu 2.
Dies ist jetzt klar. Denn es ist etwa $x \in [y]$. Daher ist $[x] \subset [y]$. In Worten kann man dies so fassen: Sind x und y von a aus erreichbar, so gibt es Punkte, die von x und y aus erreichbar sind. □

Definition 2.2.2. Wir sagen a liegt in einem Kreis oder a ist ein wiederkehrendes Element, wenn $a \in [\alpha(a)]$ gilt. Das heißt wir haben folgende Situation:
$a \to \alpha(a) \cdots \to a$. Gehen wir mit α von a aus gelangen wir schließlich wieder nach a.

Satz 2.4. *Ist $\alpha\colon [a] \to [a]$ nicht injektiv, so gibt es ein $x \in [a]$ mit $x \in \alpha([x]) = [\alpha(x)]$. Es gibt also in $[a]$ wiederkehrende Elemente.*

Da α nicht injektiv ist gibt es $x \neq y \in [a]$ mit $c := \alpha(x) = \alpha(y)$. Wegen Satz 2.3 Teil 1 ist etwa $x \in [y] = \{y\} \cup [\alpha(y)] = \{y\} \cup [c]$. Da $x \neq y$ ist $x \in [c] = [\alpha(x)]$. □

Satz 2.5. *Ist $\alpha\colon [a] \to [a]$. Äquivalent sind:*

1. *$a \notin \alpha(A)$ und α injektiv.*

2. *In $[a]$ gibt es keine wiederkehrende Elemente.*

1. $\Rightarrow$ 2.: Sei
$$T = \{c | c \notin [\alpha(c)]\}.$$
Es ist $a \in T$ nach Voraussetzung. Sei $b \in T$. Also $b \notin [\alpha(b)]$. Angenommen $\alpha(b) \in \alpha([\alpha(b)]) = [\alpha(\alpha(b))]$. Es gibt dann ein $d \in [\alpha(b)]$ mit $\alpha(b) = \alpha(d)$. Weil α injektiv ist, ist $b = d$. Daher ist $b \in [\alpha(b)]$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
2. $\Rightarrow$ 1.: Es $a \notin [\alpha(a)] = \alpha([a])$ nach Voraussetzung. Wäre α nicht injektiv, so gäbe es wegen Satz 2.4 ein $c \in [a]$ mit $c \in \alpha([c])$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Trifft eine der beiden Aussagen und damit jede der beiden Teilaussagen von Satz 2.5 zu, so sagen wir in $[a]$ gibt es keinen Kreis.

Satz 2.6. *Gibt es in $[a]$ keinen Kreis, so ist $[a]$ durch die folgende Ordnung wohlgeordnet.* $x \leq y \iff [y] \subset [x]$

.

1. Die Reflexivität ist klar.

2. Es sei $x \leq y$ und $y \leq x$ Also ist $[x] = [y]$. Ist $x = y$ ist man fertig. Andernfalls ist $x \in [\alpha(y)] = \alpha([y]) = \alpha([x]) = [\alpha(x)]$. das geht nicht. Also ist $x = y$.

3. Die Transitivtät ist klar.

4. Wegen Satz 2.3 Teil 1 sind zwei Elemente aus $[a]$ stets vergleichbar.

5. Bleibt zu zeigen, dass jede Teilmenge von $[a]$ ein kleinstes Element hat.

   Ich zeige dies zunächst für eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $U \subset [a]$.

   Ist $a \in U$, so ist $a \leq u$ für alle $u \in U$ und man ist fertig. Andernfalls betrachten wir die Menge
   $$T = [a] \setminus U \neq \emptyset$$
   Es ist $a \in T$. Wäre sie abgeschlossen gegenüber α, so wäre $T = [a]$. Das hieße $U = \emptyset$.

Also gibt es ein $c \in T$, also $c \notin U$ mit $\alpha(c) \in U$.

Beh.: $\alpha(c)$ ist minimales Element in U.

Sei $u \in U$ mit $u \leq \alpha(c)$. Ist $u = \alpha(c)$ ist man fertig. Andernfalls ist $u < \alpha(c)$ also $\alpha(c) \neq u$ und da $u \leq \alpha(c)$ ist $\alpha(c) \in [u] = \{u\} \cup \alpha([u])$.

Also gibt es ein $d \in [u]$ mit $\alpha(d) = \alpha(c)$. Daher ist $d = c \in [u] \subset U$. Das geht wegen der Wahl von c nicht.

Also ist $\alpha(c)$ ein minimales Element in U. Da die Ordnnung auf $[a]$ linear ist, - je zwei Elemente lassen sich vergleichen - , folgt $\alpha(c)$ ist auch kleinstes Element in U.

Jetzt sei $\emptyset \neq U$ eine beliebige Teilmenge von $[a]$. Dann hat $[U]$ ein kleinstes Element d. Zu zeigen ist bloß noch, dass d in U liegt. Es ist $d \in [u]$ für ein $u \in U$. Daher ist $u \leq d$. Daher ist $d = u$ und damit ist d das kleinste Element in U □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch in folgendem Sinne.

Satz 2.7. *Ist $[a]$ in obigem Sinne halbgeordnet, und hat α keinen Fixpunkt, so gibt es in $[a]$ keinen Kreis.*

Angenommen es gibt in $[a]$ ein c mit $c \in [\alpha(c)]$. Ist $c = \alpha(c)$, so ist c ein Fixpunkt, den es nach Voraussetzung nicht gibt. Daher gibt es ein $d \in [\alpha(c)], d \neq c$ mit $\alpha(d) = c$. Also ist $c \in [d]$, das heißt $d \leq c$ und natürlich $d \in [c]$, also $c \leq d$. Aber es ist $c \neq d$. Dies widerspricht der vorausgesetzten Halbordnung. □

Bemerkung. *Wir nehmen mal an: Die Welt A habe einen Anfangszustand. Es gebe eine Funktion $\alpha\colon A \to A$, die aus jedem Weltzustand den Weltzustand in der nächsten Zeiteinheit berechnet. Dann besagt der Satz: Ist die Funktion nicht injektiv, so gibt es Weltzustände, die immer wiederkehren. Die Welt endet schließlich in einem Kreis. Es gilt die ewige Wiederkehr des Gleichen.*

2.2.1 Der Satz von Dedekind, Cantor, Bernstein:

Will man Dinge der Größe nach vergleichen, so muss es eine „kleiner“ $\leq$ geben. Eine wichtige Forderung ist etwa: $a \leq b$ und $b \leq c$, dann ist auch $a \leq c$. Weiter ist von Bedeutung $a \leq b$ und $b \leq a$, dann ist $a = b$. Genau diese letzte Tatsache wurde in den Anfangszeiten der Mengenlehre diskutiert. Cantor hatte definiert: Die Menge A hat eine kleinere Mächtigkeit wie die Menge B, es ist $|A| \leq |B|$, wenn es eine injektive Abbildung $A \to B$ gibt. Sie haben gleiche Mächtigkeit, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen gibt. Was ist, wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ gilt. Die Intuition sagt, dass es dann auch eine Bijektion zwischen den Mengen gibt. Cantor hatte diese Intuition, formulierte sie als Satz und verwendete den Satz in seinen Seminaren. Darf man einer Intuition bedenkenlos glauben? Bewiesen wurde der Satz erst 1897 von dem 19 jährigen Felix Bernstein(Siehe Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, Seite 71). Der nächste Satz bereitet vor.

Satz 2.8. *Ist* (A, α) *ein Kette,* $\alpha(A) \subset B \subset A$ *und* $U = A \setminus B$ *so gilt:*

$$B = \alpha([U]) \cup A \setminus [U]$$

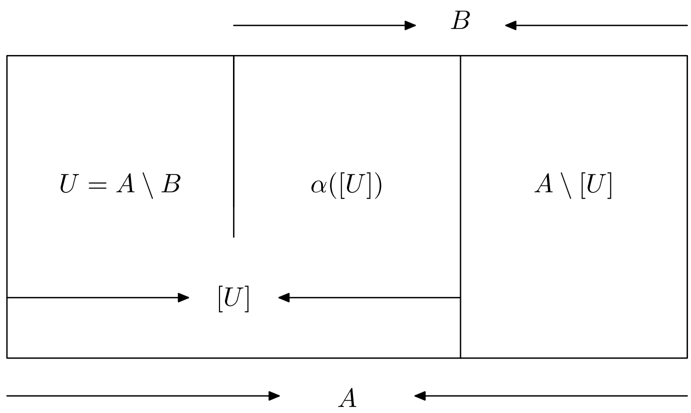


Abb. 2.7: Zum von Dedekind-Bernstein

Es ist

$$\begin{aligned} A \setminus [U] \subset A \setminus U = A \setminus (A \setminus B) = B. \\ B \cap [U] = B \cap (U \cup \alpha([U])) = \alpha([U]) \end{aligned}$$

Daher ist $B = B \cap A = B \cap (A \setminus [U] \cup [U]) = A \setminus [U] \cup \alpha([U])$

Folgerung 2.9. *Ist* $\alpha\colon A \to A$*,* $\alpha(A) \subset B \subset A$ *und* $U = A \setminus B$*, so ist die Abbildung:*

$$\beta\colon A = [U] \cup A \setminus [U] \ni a \mapsto \begin{cases} \alpha(a) & \text{für } a \in [U] \\ a & \text{sonst} \end{cases} \in B = \alpha([U]) \cup A \setminus [U]$$

surjektiv.

Klar oder

- Ist $b \in \alpha([U])$, so gibt es ein $a \in [U]$ mit $\alpha(a) = b = \beta(a)$.
- $b \in A \setminus [U]$, so ist $b = Id(b) = \beta(b)$. □

Satz 2.10 (Dedekind 1887). *Sei* $\alpha\colon A \to A$ *eine injektive Abbildung* $\alpha(A) \subset B \subset A$*. Dann gibt es eine bijektive Abbildung* $\beta\colon A \to B$*.*

Dieser Satz steht im Nachlass von Richard Dedekind Band III unter dem Titel „Ähnliche Abbildungen und ähnliche Systeme" 1887 7.11 (Tagebuch).

Zu zeigen ist noch, dass die Abbildung β aus 2.9 auch injektiv ist. Sei $\beta(a) = \beta(a')$.

- $a, a' \in [U]$. Dann ist $\alpha(a) = \beta(a) = \beta(a') = \alpha(a')$. Da α injektiv ist, ist $a = a'$.
- $a \in [U]$ und $a' \in A \setminus [U]$. Aber $[U] \ni \alpha(a) = \beta(a) = \beta(a') = a' \in A \setminus [U]$ ist unmöglich.
- $a, a' \in A \setminus [U]$. Also ist $a = \beta(a) = \beta(a') = a'$.

Daher ist β auch injektiv und damit bijektiv. □

Satz 2.11 (Dedekind, Cantor, Bernstein). *Gibt es injektive Abbildungen* $\alpha\colon A \to B$ *und* $\beta\colon B \to A$*, so gibt es eine bijektive Abbildung* $\gamma\colon A \to B$*.*

Es ist $\beta\alpha\colon A \to A$ injektiv und $\beta\alpha(a) \subset \beta(B) \subset A$. Daher gibt es eine bijektive Abbildung $\gamma'\colon A \to \beta(B)$. Da $\beta(B)$ ähnlich zu B ist, gibt es eine bijektive Abbildung $\gamma\colon A \to B$. □

Emmy Noether schreibt hierzu in dem Buch: Richard Dedekind „Gesammelte Werke Band 3“ Fricke, Noether und Ore, *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke Bd. 3*, Seite 448

> Dieser nach Datierung vom 11. Juli 1887 stammende Beweis des Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes von 1897 ist genau derselbe, den Zermelo 1908 gegeben hat mit dem ausdrücklichen Hinweis, dass sein Beweis nur auf der Dedekindschen Kettentheorie. In der Tat findet sich der wesentliche Hilfssatz, $T = \mathfrak{M}(\phi(U_0), V)$ (Unser Satz2.8) schon ohne Beweis in Satz 63 §4 „Was sind und was sollen die Zahlen“

In einem Brief vom 29.August 1899 schreibt Dedekind über den Satz an Cantor:

> Als der junge Herr Felix Bernstein mich Pfingsten 1887 in Harzburg besuchte, sprach er von dem Satze B. auf Seite 7 der Übersetzung von Marotte und stutzte ein wenig, als ich meine Überzeugung aussprach, daß derselbe mit meinen Mitteln (Was sind und was sollen die Zahlen?) leicht zu beweisen sei; doch kam es zu keiner weiteren Unterhaltun über seinen oder meinen Beweis. Nach seiner Abreise setzte ich mich daran und konstruierte den hier beiliegenden Beweis des offenbar gleichwertigen Satzes C.

Wieder Emmy Noether:

> Dieser Beweis stimmt mit dem vorliegenden sachlich überein; die Bezeichnung ist geändert, schließt sich nicht mehr so eng an „Was sind und was sollen die Zahlen?“ an. Offenbar hat Dedekind vergessen, dass es sich um die Rekonstruktion eines alten Beweises handelte. Den ursprünglichen Beweis fand J. Cavaillés-Paris im Nachlass.

Der Beweis von Dedekind hat den Vorteil, dass er nicht die Menge der natürlichen Zahlen verwendet. Er gilt auch, wenn man die Existenz einer unendlichen Menge nicht voraussetzt.
Weil dieser Satz so schön ist ein weiterer Beweis.

Satz 2.12 (Fixpunktsatz). *Jede monotone Abbildung $\varphi\colon H \to H$ eines vollständigen Verbandes hat einen Fixpunkt.*

Sei $M{:}\ = \{x|x \leq \varphi(x)\}$ und $s = \sup(M)$. Weil $x \leq s$ folgt $\varphi(x) \leq \varphi(s)$ für alle $x \in M$. Daher ist $\varphi(s)$ obere Schranke von M. Daher ist $s \leq \varphi(s)$. Da φ eine monotone Funktion ist, folgt $\varphi(s) \leq \varphi(\varphi(s))$. Also ist $\varphi(s) \in M$. Daher ist $\varphi(s) \leq s$. Es folgt $\varphi(s) = s$. □

Jetzt folgt wieder der 2.10 und damit der Satz von Cantor Bernstein.

Sei dazu wieder $U = A \setminus B$ Wir haben die monotone Abbildung $F \colon \mathfrak{P}(A) \ni X \mapsto \alpha(X) \cup U \in \mathfrak{P}(A)$. Sei C ein Fixpunkt dieser Abbildung. Also ist $C = \alpha(C) \cup U$. Wir erhalten: $A \setminus C = A \setminus (U \cup \alpha(C)) = (A \setminus U) \cap A \setminus (\alpha(C)) = B \cap (A \setminus \alpha(C)) = B \setminus (\alpha(C))$. Daher ist $A = C \cup B \setminus (\alpha(C)); \alpha(C) \subset B$ und $B = \alpha(C) \cup B \setminus (\alpha(C)) = \alpha(C) \cup (A \setminus C)$. Also liefert

$$\beta \colon A \ni a \mapsto \begin{cases} \alpha(a) & \text{für } a \in C \\ a & \text{sonst} \end{cases} \in B$$

die gewünschte Bijektion. [2] $\square$

2.2.2 Produkt zweier Ketten

Zahnräder Eine der raffiniertesten Erfindungen der Menschheit ist nach der Erfindung des Systems Rad, Straße, das System ineinander greifender Zahnräder. Irgend ein kluger Ingenieur machte diese Erfindung ungefähr 300 vor Christus. In dem Wikipedia Artikel zu Zahnrädern kann man einiges dazu nachlesen. In der folgenden Zeichnung ist eine schematische Zeichnung eines solchen Zahnradpaares, die ineinander greifen.

Uhren Am Ende des Mittelalters zu Beginn der Neuzeit war man vernarrt in mechanische Uhren. Jede Stadt, die etwas auf sich hielt gab ungeheure Mengen von Geld aus, um sich mit dieser neuesten Technik zu versehen. Herrliche Uhren wurden gebaut.

[2] Eigentlich ist der Fixpunktsatz (er stammt von Tarski und Knaster) überflüssig. Denn es ist $[U] = [U] \cup \alpha([U])$ ein Fixpunkt von F.

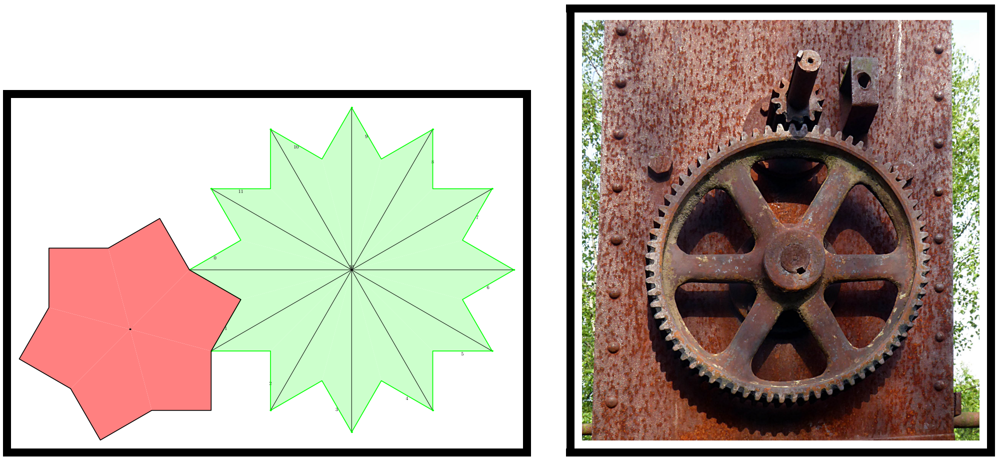


Abb. 2.8: Ineinander greifende Zahnräder. Links schematisch, rechts auf dem ehemaligen Lavasteinbruch in Kottenheim bei Mayen.

Abb. 2.9: Links die Uhr am Rathausturm in Prag, rechts auf dem die astronomische Uhr in Straßburg

Synchronisation Hierzu die Bücher über die Zeit. So etwa Jerimy Riffkin oder ..
Eine große Klasse von Ketten erhalten wir folgendermaßen:

Definition 2.2.3. Sind (A, α) und (B, β) zwei Ketten, dann wird $A \times B$ zu einer Kette durch $\alpha \times \beta \colon A \times B \ni (a, b) \mapsto (\alpha(a), \beta(b))$.

Satz 2.13. *Seien (A, α) und (B, β) zwei Ketten und $(a, b) \in A \times B$. Weiter sei $[(a, b)]$, die von $(\alpha \times \beta)$ erzeugte Bahn in $A \times B$. Es gilt: $(x, y) \in [(a, b)]$, dann ist $x \in [a]$ und $y \in [b]$.*

Die Umkehrung gilt nicht.

Es sei

$$T = \{(x, y) \in [(a, b)] \text{ und } x \in [a] \text{ und } y \in [b]\}$$

Es ist $(a, b) \in T$. Sei $(x, y) \in T$. Dann ist $(\alpha \times \beta)(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)) \in [(a, b)]$ und es ist $\alpha(x) \in [a]$ und $\beta(y) \in [b]$. Daher ist T abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$. Also ist $T = [(a, b)]$. Dies wurde behauptet. □

Beispiele:

11. Wir betrachten die folgende Situation. $(A, \alpha) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1+)$ und $(B, \beta) = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Wir untersuchen $(A \times B, \alpha \times \beta)$.
    $(0, 0) \to (1, 1) \to (0, 2) \to (1, 3) \to (0, 4) \to (1, 0) \to (0, 1) \to (1, 2) \to (0, 3) \to (1, 4) \to (0, 0)$ Wie wir sehen kommt jedes Paar von $A \times B$ in der Bahn von $(0, 0)$ vor. Es sind 10 Elemente.
12. Das braucht keineswegs der Fall zu sein. Sei etwa $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, 1+)$. Wir betrachten $A \times A$. Dann gibt es drei Bahnen:
    a) $(0, 0) \to (1, 1) \to (2, 2) \to (0, 0)$
    b) $(0, 1) \to (1, 2) \to (2, 0) \to (0, 1)$
    c) $(0, 2) \to (1, 0) \to (2, 1) \to (0, 2)$

    Dies sind 3 elementfremde Bahnen.

Aufgaben:

8. Untersuche in den folgenden Fällen $(A \times B, \alpha \times \beta$.
    a) $(A, \alpha) = (\mathbb{Z}/3, 1+\mathbb{Z})$ und $(B, \beta) = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, 1+)$.
    b) Äußere eine Vermutung, wann $(A \times B, \alpha \times \beta)$ aus einer Bahn besteht.

Sind (A, α) und (B, β) und $(a, b) \in A \times B$ beliebig, so ist normalerweise die von (a, b) in $A \times B$ erzeugte Bahn nicht rechtseindeutig. Betrachte als Beispiel: Beispiele:

13. Sei $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\alpha = 1+$ auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Weiter sei $B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\beta = 1+$ auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Starten wir mit $(0, 0)$ in $A \times B$. Es ergibt sich die folgende Bahn.

$$(0, 0) \to (1, 1) \to (0, 2) \to (1, 2) \to (0, 0)$$

Wie man sieht gibt es zu 0 zwei Elemente in der Bahn $[(0, 0)]$. Es gilt aber. Malt man das im Gitter in eine Bahn erhält man

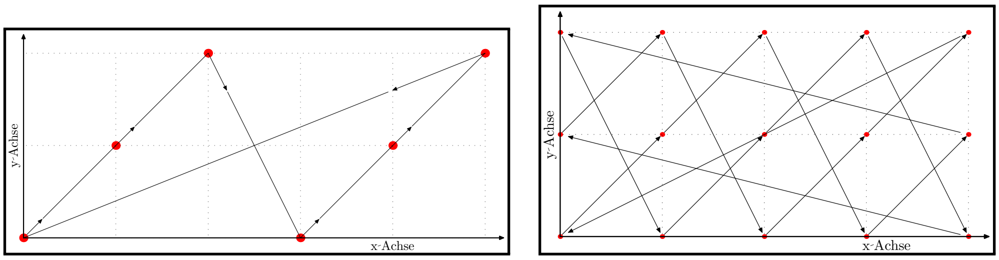


Abb. 2.10: Bahn mit Startpunkt $(0, 0)$.

Satz 2.14. *Ist $\alpha\colon [a] \to [a]$ injektiv und nicht surjekiv. Weiter sei (B, β) eine Kette Dann gilt: Ist $[(a, b)]$ der Abschluss von $\{(a, b)\}$ in $A \times B$ bezüglich $\alpha \times \beta$ ist für beliebiges $b \in B$ rechtseindeutig.*

Da α nicht surjektiv ist, ist $a \notin \alpha([a])$. Wir betrachten $[D]$ der Abschluss von $D = \{(a, b)\}$ in $A \times B$ mit der Abbildung $(\alpha \times \beta)$. Es sei

$$T = \{x | x \in [a] \text{ und } x \text{ rechtseindeutig }\}$$

- $a \in T$. Denn sei $(a, b') \in [D] = D \cup (\alpha \times \beta)[D]$. Wäre $(a, b') \in (\alpha \times \beta)([D])$, so gäbe es (a'', b'') aus $[D]$ mit $(\alpha(a''), \beta(b'')) = (a, b')$. Das hieße $a = \alpha(a'')$. Das geht nach Voraussetzung nicht.

- T ist gegenüber Nachfolgern abgeschlossen. Sei $x \in T$. Das heißt es gibt genau ein $b \in B$ mit $(x, b) \in [D]$. Dann ist $(\alpha \times \beta)(x, b) = (\alpha(x), \beta(b)) \in [D]$.

  Sei auch $(\alpha(x), y') \in [D]$. Dann gibt $(x'', y'') \in [D]$ mit $(\alpha(x''), \beta(y'')) = (\alpha(x), y')$. Das heißt $\alpha(x'') = \alpha(x)$ und $\beta(y'') = y'$. Da α injektiv ist folgt

$x'' = x$. Und daher ist $(x,y) \in [D]$ und $(x,y'') \in [D]$. Also ist $y'' = y$. Daher ist $y' = \beta(y)$. Damit ist die Behauptung klar.

- Es Folgt $T = [a]$. □

Aufgaben:

9. Seien (A,α) und (B,β) Ketten mit injektivem α
   a) Ist $R \subset A \times B$ rechtseindeutig, so ist $(\alpha \times \beta)(R)$ rechtseindeutig.
   b) Es sei $R \subset A \times B$ rechtseindeutig. Ist dann auch $R \cup (\alpha \times \beta)(R)$ rechtseindeutig?

Satz 2.15. *Sei (A,α) mit injektivem α. Für $a,b \in A$ gilt: $[a] \cap [b] = \emptyset$. oder $[a] \subset [b]$ oder $[b] \subset [a]$.*

1. Ist $b \in [a]$ so ist $[b] \subset [a]$. Man ist fertig.
2. Andernfalls ist $b \in [b] \setminus [a] = T$.
   a) Ist $[b] \setminus [a]$ abgeschlossen gegenüber α, so ist $[b] = [b] \setminus [a]$. Das heißt $[b] \cap [a] = \emptyset$.
   b) $[b] \setminus [a]$ ist nicht abgeschlossen gegenüber α. Dann gibt es ein $c \in [b], c \notin [a]$, aber $\alpha(c) \in [a] = \{a\} \cup \alpha([a])$. Ist $\alpha(c) = a$, so ist $[a] \subset [b]$ und man ist wieder fertig. Andernfalls ist $\alpha(c) \in \alpha([a])$. Es gibt daher ein $d \in [a]$ mit $\alpha(c) = \alpha(d)$. Weil α injektiv ist, folgt $c = d$.Daher ist $c \in [a]$. Dies widerspricht der Wahl von c. □

Satz 2.16. *Sei (A,α) eine Kette mit injektivem α. Außerdem sei $E = A \backslash \alpha(A)$. Dann gilt*

1. *$A \backslash [E]$ ist abgeschlossen gegenüber α und diese Einschränkung ist bijektiv.*
2. *$[E] = \bigsqcup_{e \in E} [e]$, wobei die Vereinigung elementfremd ist.*

Zu 1.:
Zunächst zeige ich, dass $C := A \setminus [E]$ gegenüber α abgeschlossen ist. Sei $x \in C$. Angenommen $\alpha(x) \in [E]$. Es ist $\alpha(x) \in E$ unmöglich. Also gibt es y in $\alpha(x) = \alpha(y) \in [E]$. Da α injektiv ist, ist $x = y \in [E]$. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $x \notin [E]$.

Weiter behaupte ich, dass α auf $A \setminus [E]$ surjektiv ist. Ist $y \in A \setminus [E]$. So ist $y \notin [E]$ und erst recht $y \notin E = A \setminus \alpha(A)$. Also ist $y \in \alpha(A)$. Es gibt daher ein $a \in A$ mit $\alpha(a) = y$. Wäre $a \in [E]$, so wäre $\alpha(a) = y \in [E]$. Dies ist nach Voraussetzung nicht der Fall. Also ist $a \in A \setminus [E]$.
Bleibt zu zeigen, dass $[E] = \bigsqcup_{e \in E} [e]$ gilt. Dafür bleibt nur zu zeigen, dass die Vereinigung elementfremd ist. Es ist $[e] \subset [e']$ unmöglich, da $e \notin \alpha([e])$ und $e \neq e'$. Daher ist wegen 2.15 $[e] \cap [e'] = \emptyset$. $\square$

Aufgaben:

10. Es sein $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
    a) Es sei $\alpha\colon A \ni (a, b) \mapsto (a + 3, b + 3) \in A$. Zeige die Bahnen von $(0, 0)$ und $(1, 0)$ sind elementfremd. Gib ein Erzeugendensystem von A bezüglich α an.
    b) $\alpha\colon A \times A \ni (a, b) \mapsto (a+1, a+b+1) \in A$. Zeige: Die Bahnen von $(0, 0), (1, 0)$ sind elementfremd.

Computerecke:

7. Wir wollen das Verhalten der Funktion $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$ numerisch untersuchen. Dafür geben wir beispielsweise ein:

```
(setq x 2.0  y 3.0  i 0)
```

   Dies setzt den Anfangswert von `x` auf `2.0` und den von `y` auf `3.0`. Diese Zeile werten wir aus. Als zweite Zeile geben wir

```
(setq x (sqrt x) y (sqrt y))
```

   Diese Zeile werten wir etwa 10 mal hintereinander aus. Dann ergibt `(- y x) => 0.0003963085940712485` Das heißt es sieht so aus, als ob die Differenz zwischen x und y beliebig klein wird. Schneiden sich die Bahnen?

2.3 Morphismen

2.3.1 Problemstellung

Wie wir wissen ist die Verkettung von Funktionen nicht kommutativ. Aber meist wenn etwas normalerweise falsch ist die Frage gut: Unter welchen Voraussetzung ist es dennoch richtig. So in diesem Fall. Wir stellen die Frage noch der Kommutativität.
Fragen:

2. Gegeben ist eine Menge A und eine Funktion $\alpha : A \to A$. Welche Funktionen $f\colon A \to A$ kommutieren mit α?

Wir fragen also nach Funktionen, für die $f\alpha = \alpha f$ gilt. Die Identität kommutiert mit allen Selbstabbildungen (Endomaps), das ist nicht sehr erhellend. Versuchen wir uns an andern Beispielen.
Beispiele:

14. Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $\alpha(n) = 1 + n \bmod 3$. Angenommen f sei eine Selbstabbildung, die mit α kommutiert. Es sei etwa $f(0) = 1$. Dann ist $f(1) = f(\alpha(0)) = \alpha(1) = 2$ und $f(2) = f(\alpha(1)) = \alpha(2) = 0$. Es ergibt sich $f = \alpha$. Die Funktion f ist daher schon eindeutig bestimmt durch $f(0) = 1$. Ist $f(0) = 2$, so ist $f(1) = 1+2 = 0 \bmod 3$ und $f(2) = 1$. Daher ist $f = \alpha \circ \alpha$: Ist $f(0) = 0$, so ist f die Identität. Es gibt daher genau drei Funktionen, die mit α vertauschbar sind.

15. Sei $\alpha\colon \mathbb{N} \ni n \mapsto n + 1 \in \mathbb{N}$. Es gibt genau eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die mit α vertauschbar ist und einen bestimmten Anfangswert $f(0)$ hat.

    Sei etwa $f(0) = a$. Dann ist $f(1) = f(1 + 0) = 1 + f(0) = 1 + a$. Es liegt die Vermutung nahe, dass $f(n) = n + a$ die gesuchte Funktion ist. Tatsächlich ist f mit α vertauschbar. Denn $f(1 + n) = (1 + n) + a = 1 + (n + a) = 1 + f(n)$. Das war einfach. Aber wenn wir nachdenken, sehen wir, dass das Assoziativgesetz wesentlich gebraucht wir. Bleibt noch zu überlegen, dass dies die einzige Funktion mit den beiden geforderten Eigenschaften ist. Sei g eine Funktion mt $g(0) = a$ und $g(1 + n) = 1 + g(n)$.

    $$T = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ und } g(n) = f(n)\}$$

    Es ist T abgeschlossen gegenüber 1+. Denn ist $n \in T$ so folgt $g(1 + n) = 1 + g(n) = 1 + f(n) = f(1 + n)$. Daher ist $T = \mathbb{N}$. Hier brauchen wir die Tatsache, dass von 0 aus durch weiter zählen jede natürliche Zahl erreichbar ist. □

16. Spannender wird die Frage, wenn wir für α eine andere Funktion wählen. Zum Beispiel: $\alpha(n) = 2 + n$. Legen wir jetzt $f(0)$ fest, etwa $f(0) = 5$, so sehen wir, dass f noch nicht eindeutig bestimmt ist. Zwar lässt sich für alle geraden Zahlen der Funktionswert berechnen. Es ist $f(2) = 7$, $f(4) = 9\ldots.$ Aber $f(1)$ ist noch nicht berechenbar. Etwa erfüllt $f(n) = 5 + n$ diese Bedingung. Aber auch

    $$g(n) = \begin{cases} n + 5 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n + 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

    Aber g und f sind keineswegs gleich. Damit jetzt die Funktion eindeutig bestimmt ist müssen zwei Startwerte vorgegeben werden.

Zu jedem Zahlenpaar (a, b) gibt es genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die mit α kommutiert und für die $f(0) = a$ und $f(1) = b$ ist. Dies löse die Leserin als Übung. Wir müssen daher zwei Startwerte vorgeben.

17. Überlege warum es bei $\alpha(n) = 3 + n$ drei Anfangswerte sein müssen, dass f eindeutig bestimmt ist.

18. Noch spannender ist die folgende Situation. $\alpha(n) = 2 \cdot n + 1$. Schreiben wir $f(0) = 0$ vor, so sind schon alle Funktionswerte von Elementen aus der Bahn $0 \to 3 \to 7 \to \dots$ bestimmt. Aber beispielsweise 2 kommt in der Bahn nicht vor $f(2)$ kann noch willkürlich festgelegt werden. Überlege: Wieviel Startwerte braucht man?

Aufgaben:

11. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist genau dann mit 2+ und 3+ vertauschbar, wenn sie mit 1+ vertauschbar ist.

12. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist mit 4+ und 6+ genau dann vertauschbar, wenn sie mit 2+ vertauschbar ist.

13. Verallgemeiner die Ergebnisse aus den beiden voriigen Aufgaben.

14. Sei $\alpha : \mathbb{N} \ni n \mapsto 3n+2 \in \mathbb{N}.\mathbb{N}$. Die Funktion f sei mit α vertauschbar. Bestimme eine Startmenge A, so dass f durch die Funktionswerte auf A eindeutig bestimmt ist

Im nächsten Paragrafen wollen wir etwas systematischer überlegen. Dazu müssen die Begriffe verdeutlicht werden.

2.3.2 Definition und einfache Eigenschaften

Es ist wichtig die strukturerhaltenden Abbildungen zu betrachten. Dies sind Verallgemeinerungen der Vertauschbarkeitsbedingungen der Vorüberlegung. In dem Bild ist $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\alpha(x) = 1+x \bmod 6$. $B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ und $\beta(x) = 1+x \bmod 3$. Das Diagramm ist so zu deuten. Geht man in $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ einen α Schritt weiter und „übersetzt“ dann nach B, so erhält man dasselbe, wie wenn man zunächst nach $B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit f übersetzt und dann mit β in B eins weiter geht. Außerdem „übersetzt“ f jedes $a \in A$ eindeutig. Das Diagramm ist kommutativ und f ist eine Funktion.
Betrachten wir andererseits das Bild 2.4, so sehen wir sofort, dass eine solche Übersetzung vom „einfachsten Zykel“ in den „Kreis“ nicht gelingen kann.

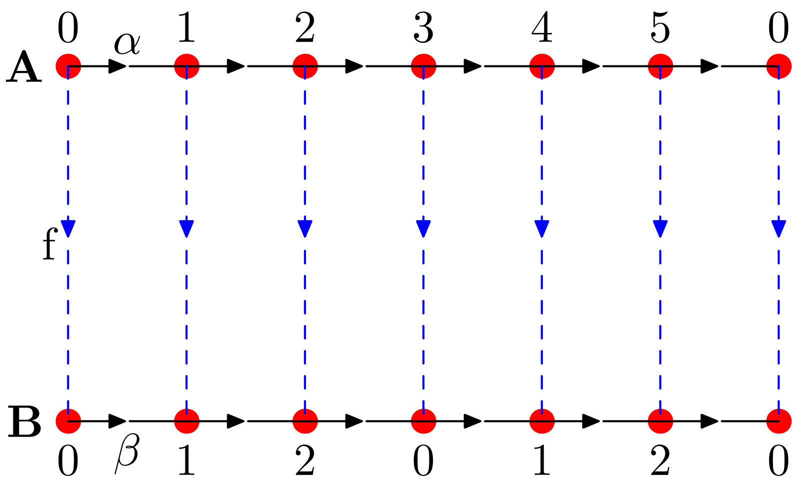


Abb. 2.11: Ein Morphismus zwischen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Satz 2.17. *Sind (A, α) und (B, β) zwei Ketten, so sind für eine Abbildung $f : A \to B$ äquivalent:*

1. *Das Diagramm ist kommutativ.*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

2. *Der Graph $G = \{(a, f(a)) | a \in A\}$ ist gegenüber (α, β) abgeschlossen.*

3. *Es ist $f \circ \alpha = \beta \circ f$.*

1. $\Rightarrow$ 3. Sei $a \in A$. Dann ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a))$ für alle $a \in A$ wegen der Kommutativität des Diagramms.
3. $\Rightarrow$ 2. Es sei $(a, f(a)) \in G$. Dann ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a))$. Also ist $(\alpha(a), f(\alpha(a))) = (\alpha(a), \beta(f(a))) \in G$. Also ist $(\alpha, \beta)(a, f(a))) \in G$. Also ist G gegenüber (α, β) abgeschlossen.
2. $\Rightarrow$ 1. Sei $a \in A$. $(a, f(a))) \in G$. Also ist $(\alpha(a), \beta(f(a))) \in G$. Da f eine Funktion ist, ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a))$. Das war behauptet. $\square$

Definition 1 Sind (A, α) und (B, β) Ketten, so heißt $f : A \to B$ ein Homomorphismus oder Morphismus, wenn f die Eigenschaften des Satzes erfüllt. $\square$

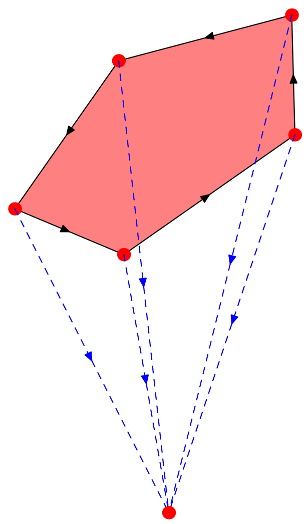
Damit ist $f\colon A \to A$ ein Morphismus, wenn f mit α kommutiert.
Beispiele:

19. Sei $\alpha : \mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$. Wählt man im Ziel $\beta = \alpha$ so sind die Homomorphismen $(\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \alpha)$ gerade die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also die zum 0-Punkt punktsymmetrischen Abbildungen.

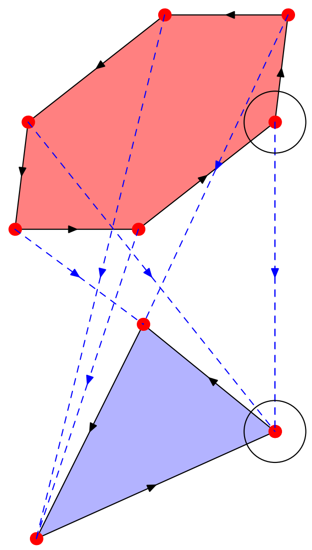
20. Sei $\alpha : \mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$ und $\beta : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ die Identität. Die Homomorphismen $f : (\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \beta)$ sind gerade die Abbildungen, die symmetrisch gegenüber der $y-$ Achse sind.

21. Sei $\alpha : \mathbb{R} \ni x \mapsto x + c \in \mathbb{R}$ und β die Identität. Dann sind die Homomorphismen $f : (\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \beta)$ gerade die periodischen Abbildungen mit der Periode c.

22. Ich habe hier ein paar Beispiele von Homomorphismen gemalt:



Genau-ein-Morphismus



Auch-ein-Morphismus

Satz 2.18. *Bild und Urbild von abgschlossenen Mengen unter Homomorphismen sind abgeschlossen.*

Sehr einfach □

Satz 2.19. *Die Klasse der Ketten bilden zusammen mit den zugehörigen Morphismen eine Kategorie.*

Die Identität ist immer ein Morphismus. Sind $(A,\alpha),(B,\beta)$ und (C,γ) drei Ketten und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Homomorphismen. Dann ist: $(g \circ f)\alpha = g(f\alpha) = g(\beta f) = \gamma(g \circ f)$. Also ist $g \circ f$ ein Morphismus. $\square$

Die Kategorie der Ketten bezeichne ich mit $\overset{\frown}{\mathbf{S}}$.
In dem Buch von F. William Lawvere und Stephan H. Schanuel (Siehe Lawvere und H.Schanuel, *Conceptual Mathematics, A first introduction to categories*) nennen dies die Autoren die Kategorie der Endomaps.
Das einfachste und langweiligste Objekt in dieser Kategorie ist wie in der Kategorie der Mengen, die leere Menge $\emptyset$ mit der leeren Selbstabbildung als Funktion. Ich bezeichne sie als leere Kette. Die leere Kette ist ein Anfangsobjekt in der Kategorie der Ketten. Jede einelementige Menge $\{0\}$ mit der Identität ist ein Endobjekt in dieser Kategorie. Wie in der Kategorie der Mengen gibt es keine Nullobjekte. Auch richtig ist:

Satz 2.20. *Das Inverse eines bijektiven Morphismusses ist ein Morphismus.*[3]

Sei $f\colon (A,\alpha) \to (B,\beta)$ ein bijektiver Morphismus und g die Umkehrabbildung. Dann folgt: $f\alpha = \beta f$. Daher $(gf)\alpha = g\beta f$. Also ist $\alpha = g\beta f$. Es folgt $\alpha g = g\beta$. Daher ist g ein Morphismus. $\square$

Aufgaben:

15. a) Gib zwei Ketten mit jeweils zwei Elementen an, die nicht isomorph sind.
    b) Gib alle Isorphieklassen von Ketten mit 2 Elementen an.
    c) Gib alle Isomorphieklassen von Ketten mit 3 Elementen an.

Aber vieles, was in der Kategorie der Mengen wahr ist, gilt nicht mehr in der Kategorie der Ketten.

- In der Kategorie der Mengen ist jede injektive Abbildung ein Schnitt. Das heißt: Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so gibt es ein $g\colon B \to A$, so dass $g \circ f = 1_A$ ist. Dies gilt hier nicht: Betrachte etwa $A = \{a,b\}$ und $\alpha : a \to b \to b$,

  und $B = \{0,1,2\}$ $\beta : 0 \to 1 \to 2 \to 2$. Dann ist $f : a \mapsto 1, b \mapsto 2$ ein Morphismus.

[3]Dies ist in der Kategorie der topologischen Räume nicht der Fall.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r] \arrow[d, "f"] & b \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 2
\end{tikzcd}$$

Eine linksinverse Abbildung g von f muss erfüllen: $g(1) = a$ und $g(2) = b$. Dies kann kein Morphismus sein. Denn es ist $g(0) = a$ oder $g(0) = b$ möglich.

– Ist $g(0) = a$, so ist $g(1) = g(\beta(0)) = \alpha(g(0)) = \alpha(a) = b$. Das ist ein Widerspruch.

– Ist $g(0) = b$, so ist $g(1) = g(\beta(0)) = \alpha(g(0)) = b$. Das geht nicht, da ja $g(1) = a$ gelten muss.

Also ist in $\overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$ keineswegs jeder Monomorphismus ein Schnitt.

- Das duale ist auch nicht richtig. In **Me** gibt es zu jedem Epimorphismus $f\colon A \to B$ ein $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = 1_B$. Dies ist in $\overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$ nicht der Fall. Betrachte $A = \{0, 1\}$ $\alpha : 0 \mapsto 1 \mapsto 0$ und $B = \{0\}$ mit $\beta(0) = 0$. Dann ist die konstante Abbildung $f\colon A \to B$ ein Morphismus. Aber es gibt keinen Morphismus in die Gegenrichtung.

Aufgaben:

16. Wir betrachten Unterkategorien von $\overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$
    a) Wir betrachten die volle Unterkategorie der Ketten (B, β) mit $\beta^3 = 1_B$. Die Kette A mit $\alpha : 0 \to 2 \to 2 \to 0$ gehört zu dieser Kategorie. Zeige: (B, β) gehört genau dann zu dieser Kategorie, wenn es zu jedem $b \in B$ genau einen Morphismus $f\colon A \to B$ gibt mit $f(0) = b$.
    b) Verallgemeinere die Aussage auf ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.
    c) Sei $A = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $\alpha : 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1$. Dann ist $\alpha^4 = \alpha$. Zeige: (B, β) ist genau dann eine Kette mit $\beta^4 = \beta$, wenn es zu jedem $b \in B$ genau einen Morphismus $f\colon A \to B$ gibt mit $f(0) = b$.

2.3.3 Verträgliche Äquivalenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation auf der Kette (A, α) heißt mit α verträglich, wenn für alle $a \sim a'$ gilt: $\alpha(a) \sim \alpha(a')$. Der Durchschnitt von mit α verträglichen Äquivalenzrelationen ist mit α veträglich. Ist daher $H \subset A \times A$ irgend eine Menge, so gibt es eine kleinste Äquivalenzrelation, die mit α verträglich ist und H enthält.

Satz 2.21. *Ist $\sim$ eine Äquivalentrelation auf der Kette A, so hat man die surjektive Abbildung $\pi\colon A \ni a \mapsto \{a' | a' \sim a\} \in A/\sim :=$ Menge der Äquivalenzklassen. Ist $\sim$ mit α verträglich, so wird $A/\sim$ durch $\overline{\alpha}(\pi(a)) = \pi(\alpha(a))$ zu einer Kette. Und π wird surjektiver Morphismus.*

Der Beweis ist einfach.

Aufgaben:

a) Betrachte $(\mathbb{N}, 1+)$. Berechne $\mathbb{N}/$ wenn 3 7 gelten soll. Male die entstehende Kette.

b)

Satz 2.22 (Homomorphiesatz für Ketten). *Sei $f\colon (A,\alpha) \to (B,\beta)$ ein Morphismus von Ketten. Dann gibt es einen injektiven Morphismus $f^* : A/\sim \to B$ mit $f = f^*\pi$. Dabei ist $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.*

Da f ein Morphismus ist, ist für $x \sim y$: $f(\alpha(x)) = \beta(f(x)) = \beta(f(y)) = f(\alpha(x))$. Also ist die Äquivalenzrelation mit α verträglich. Ich definiere:

$f^*(\pi(x))\colon = f(x)$. Denn $\pi(x) = \pi(y)$, dann ist $x \sim y$ und also $f(x) = f(y)$. Es ist f^* ein Morphismus.

Denn $f^*(\overline{\alpha}(\overline{x})) = f^*(\overline{\alpha(x)}) = f^*(\pi(\alpha(x))) = f(\alpha(x)) = \beta(f(x)) = \beta(f^*(\overline{x}))$.

Es ist f^* injektiv. Denn ist $f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y))$, so ist $f(x) = f(y)$ und daher $x \sim y$. Daher ist $\pi(x) = \pi(y)$. □

Fragen:

a) Was ist los, wenn man den Ketten Struktur gibt. Also zum Beispiel: Die Ketten seien abelsche Gruppen und die Struktuabbildungen Homomorphismen.

Ein wichtiges Beispiel zu dem Satz liefert die folgende Überlegung:

Definition 2 Sei $U \hookrightarrow A$. Wir sagen: Ein Morphismus $f\colon A \to B$ zieht U zusammen oder identifiziert die Elemente aus U, genau dann, wenn $f(u) = f(u')$ für alle u, u' aus U. □

Bemerkung 2 Sei $\emptyset \neq U \hookrightarrow A$ und $A \xrightarrow{f} B$ ein Morphismus, der U zusammenzieht. Dann gibt es in B einen Fixpunkt b von β mit $f(u) = b$ für alle $u \in U$ □

Sei $u \in U$. Dann ist $\alpha(u) \in U$. Daher ist $f(u) = f(\alpha(u)) = \beta(f(u))$. Also ist $b = f(u)$ der gesuchte Fixpunkt. Die Umkehrung der Bemerkung gilt auch. □

Wir definieren nun zu $\emptyset \neq U \hookrightarrow A$ eine besondere Kette A/U. Sei $\omega \notin A$ und $V = A \setminus U$.

$$A/U\colon = \{\omega\} \cup V. \tag{2.3}$$

$$\overline{\alpha}\colon \ni x \mapsto \begin{cases} \omega \text{ falls } x = \omega \\ \omega \text{ falls } x \in V \text{ und } \alpha(x) \in U \\ \alpha(x) \text{ sonst} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dadurch wird A/U zu einer Kette.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \circ \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[dl] & \circ \arrow[r, dotted] \arrow[dll, dotted] & {} \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \bullet \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \bullet \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \omega \arrow[loop right] & & &
\end{tikzcd}$$

In der Zeichnung sind mit $\circ$ die Elemente aus U symbolisiert und mit $\bullet$ die Elemente aus $V = A \setminus U$.

Satz 2.23. *Ist $U \hookrightarrow A$. Dann ist die Abbildung $\pi_U\colon A \ni a \mapsto \begin{cases} \omega \text{ falls } a \in U \\ a \text{ sonst} \end{cases}$ ein surjektiver Morphismus, der auf V eine injektive Abbildung ist.*

a) Sei $u \in U$. Dann ist $\alpha(u) \in U$. Wir erhalten: $\omega = \pi(\alpha(u)) = \overline{\alpha}(\omega) = \overline{\alpha}(\pi(u))$.

b) $\alpha(x) \in U$ und $x \in V$: Dann ist: $\pi(\alpha(x)) = \omega = \overline{\alpha}(x) = \overline{\alpha}(\pi(x))$.

c) $\alpha(x) \notin U$: Dann ist: $\pi(\alpha(x)) = \alpha(x) = \overline{\alpha}(x) = \overline{\alpha}(\pi(x))$.

Dieser surjektive Morphismus π zieht U zusammen und lässt die anderen Elemente in Ruhe. $\square$

Folgerung 2.24. *Jeder Epimorphismus in $\overset{\frown}{\mathbf{S}}$ ist eine surjektive Abbildung.*

Sei $C \xrightarrow{f} A$ ein Epimorphismus. Sei $U\colon = f(C)$, $\pi\colon A \to A/U$ und $k_\omega\colon A \to \{\omega\}$. Es ist $\pi \circ f = k_\omega \circ f$. Da f ein Epimorphismus ist, folgt $\pi = k_\omega$. Also ist f surjektiv.

Satz 2.25. *Ist $U \hookrightarrow A$ und $f\colon A \to B$ ein Morphismus, der U zusammenzieht, so gibt es genau einen Morphismus $f^*\colon A/U \to B$ mit $f^*\pi = f$. Das heißt das folgende Diagramm ist kommutativ.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \\
A/U \arrow[ur, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Da f die Unterkette U zusammenzieht, gibt es in B einen Fixpunkt b von β mit $(u) = b$ für alle $u \in U$. Wir erklären:

$$f^*\colon A/U \ni x \mapsto \begin{cases} b \text{ für } x = \omega \\ f(x) \text{ sonst} \end{cases}$$

f^* ist ein Morphismus. Denn:

a) $x = \omega$. Dann ist $f^*(\overline{\alpha}(\omega)) = f^*(\omega) = b$.

b) $x \in V = A \setminus U$: Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

   i. $\alpha(x) \in U$: Wir erhalten $f^*(\overline{\alpha(x)}) = f^*(\omega) = b$ und $\beta(f^*(x))\beta(f(x)) = f(\alpha(x)) = b$.

   ii. $\alpha(x) \notin U$: $f^*(\overline{\alpha}(x)) = f^*(\alpha(x)) = f(\alpha(x)) = \beta(f(x))$. □

Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen:

Es sei $g \circ \pi = f = f^* \circ \pi$. Da π eine surjektive Abbildung ist, ist $g = f^*$.

Satz 2.26. *Es habe (Q, π') auch die Eigenschaft des Satzes vorher. Dann ist $Q \cong A/U$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"] & Q' \\ A/U \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Es gibt genau ein $g\colon A/U \to Q$ mit $g\pi = \pi'$. Genauso gibt es genau ein $f\colon Q \to A/U$ mit $f\pi' = \pi$. Es folgt $g\pi = gf\pi' = 1_Q\pi'$. Wegen der Eindeutigkeit folgt $1_Q = gf$. Entsprechend folgt die umgekehrte Verkettung. □

Man kann den letzten Satz auch einer allgemeineren Situation unterordnen. Wir betrachten die Klasse

$$\mathfrak{B}\colon = \{(B, \pi) | \pi\colon A \to B \text{ und } \pi \text{ zieht } U \text{ zusammen } \}$$

Sind $(B, \pi), (B', \pi')$ zwei solche Zusammenziehunhungen, so ist ein Morphismus $f\colon B \to B'$ ein Morphismus in der Kategorie der Zusammenziehungen, wenn $f\pi = \pi'$ gilt. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

Diese Zusammenziehungen bilden eine Kategorie.

Satz 2.27. *A/U ist ein Anfangsobjekt in der Kategorie der Zusammenziehungen.*

Der Beweis steht oben.

Vieles bleibt aber richtig.

2.3.4 Zyklische Ketten

Ist (A, α) eine Kette, so kann $[A, A]$ =Menge der Morphismen von A nach A selber in der folgenden Weise als einstellige Algebra aufgefasst werden. Wir erklären:

$$\alpha* := [\alpha, -]\colon [A, A] \ni f \mapsto \alpha \circ f \in [A, A]$$

In $[A, A]$ erzeugt die Idendität bezüglich $\alpha*$ eine Bahn. Ich bezeichne sie mit $[1_A]_{\alpha*}$

Satz 2.28. *Ist $[o]$ eine zyklische Kette (A, α), so ist:*

1. *$\{f(o)|f \in [1_A]_{\alpha*}\} = [o]$.*
2. *Zu jedem $c \in [a]$ gibt es genau ein $f \in [1_A]_{\alpha*}$ mit $f(o) = c$.*

Sei

$$T = \{c|c \in [o] \text{ und } c = f(a) \text{ für ein } f \in [1_A]_{\alpha*}\}$$

Es ist $o \in T$, denn $a = 1_A(a)$. Sei $b \in T$. Dann gibt es ein $f \in [1_A]_{\alpha*}$ mit $f(o) = b$. Wir erhalten $\alpha(b) = (\alpha \circ f)(o)$. Daher ist $\alpha(b) \in T$. Daher ist $T = [o]$. Zu jedem $c \in [o]$ gibt es daher ein $f \in [Id]_{\alpha*}$ mit $f(o) = c$. Dieses f ist auch eindeutig bestimmt. Denn ist $h(o) = f(o)$, so ist $f = h$. □

Definition 2.3.1. Ist also $[o]$ eine zyklische Kette, so hat man eine Abbildung: $\Phi : [o] \ni c \mapsto \Phi(c) \in [A, A]$, dabei ist $\Phi(c)$ der eindeutig bestimmte Morphismus f mit $f(a) = c$.

Satz 2.29. *Ist $[a]$ eine zyklische Kette, so ist Φ ein bijektiver Morphismus zwischen $([a], \alpha) = [1_A]_{\alpha*} = ([A, A], \alpha*)$.*

Es ist Φ surjektiv. Denn wenn f ein Morphismus ist mit $f(o) = c$, so ist $\Phi(c)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\Phi(c)(o) = c$. Außerdem ist Φ injektiv. Denn sei $\Phi(c) = \Phi(c')$. Dann ist $c = \Phi(c)(o) = \Phi(c')(o) = c'$. Bleibt zu zeigen, dass Φ ein Morphismus ist.
Dafür ist zu zeigen, dass $\Phi(\alpha(c)) = \alpha * (\Phi(c))$ ist. Linke und rechte Seite der Gleichung sind Morphismen. Wir müssen sie nur auf o anwenden, um zu sehen ob sie gleich sind.
Man hat: $\Phi(\alpha(c))(o) = \alpha(c)$.
Und $\alpha * (\Phi(c))(o) = (\alpha \circ \Phi(c))(o) = \alpha(c)$. Das war zu zeigen. □

Definition 3 Sei $U \subset [A, A]$ und $V \subset A$. $U \cdot V := \{f(a)|f \in U \wedge v \in V\}$ □

Satz 2.30. *Für alle $a \in A$ ist $[a] = [1_A]_{\alpha*} \cdot a$*

Die rechte Seite der Gleichung ist gegenüber α abgeschlossen und enthält a.

Satz 2.31. *Ist die Kette (A, α) von dem Element a erzeugt, so ist $[A, A]$ kommutativ.*

Es sei $f \in [A, A] = [1_A]_{\alpha*}$. Durch Induktion zeige ich: f kommutiert mit jedem $g \in [A, A]$. Sei

$$T = \{g|g \in [A, A] \wedge f \circ g = g \circ f\}$$

Es ist $1_A \in T$. Sei $g \in T$. Dann $(\alpha * (g)) \circ f = (\alpha \circ g) \circ f = \alpha \circ (g \circ f) = \alpha \circ (f \circ g) = f \circ (\alpha \circ g) = f \circ (\alpha * (g))$. Also kommutiert f mit $\alpha * (g)$. Daher ist T abgeschlossen gegenüber $\alpha*$ und daher ist $T = [1_A]_{\alpha*} = [A, A]$. □

Beispiele:

23. Gegeben sei die Algebra $A = \{a, b\}$ mit der Funktion $\alpha(a) = b$ und $\alpha(b) = b$. Es gibt dann genau zwei Morphismen $f : A \to A$. Nämlich die Identität und den Morphismus $g(a) = b$. Stellen wir die Verknüpfungstafel für diese zwei Morphismen auf, so sieht sie so aus, wenn wir mit g die Abbildung $g(a) = b$ bezeichen.

	1_A	g
1_A	1_A	g
g	g	g

Aufgaben:

3. Sei $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ und
   $\alpha(x) := \begin{cases} 1 + x & \text{für} x < n \\ n & \text{für } x = n \end{cases}$
   Berechne für die folgenden n die Verknüfungstafel von $[A, A]$
   a) $n = 2$.
   b) $n = 4$.
   c) Algemein für n.
4. Sei $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ und
   $\alpha(x) := \begin{cases} 1 + x & \text{für } x < n \\ n - 1 & \text{für } x = n \end{cases}$
   Berechne für die folgenden n die Verknüfungstafel von $[A, A]$
   a) $n = 2$.
   b) $n = 4$.
   c) Algemein für $n > 2$.

Computerecke:

8. Im nächsten Programmstück definieren wir eine Kette die in einem Kreis endet. Zunächst setzen wir

```
(setq lexical-binding t)
(defun alpha(n)
  " Es muss eine natürliche Zahl aus [0,10] eingegeben werden"
  (if (= n 10) 5
    (1+ n)))
(alpha 5) ==> 6
(alpha 10) ==> 5
```

9. Auf dieser Kette (A, α) definieren wir den Morphismus $\Phi(a)$ mit $\Phi(a)(o) = a$

```
(defun Phi(a b)
"Bezüglich der Funktion alpha wird die Funktion plus gebildet
Es ergibt sich z.b ( plus* (plus* 0 6) 6)"
  (dotimes (i b)
  (setq a (alpha a))
  )
a)
```

2.3.5 Addition und Multiplikation auf einer zyklischen Kette

Definition 4 Ist (A, α) zyklisch und erzeugt von o, also $A = [o]$, so kann man folgendermaßen eine Verknüpfung auf A erklären.

$$b \circ c \colon = \Phi(b)(c)$$

Dabei ist $\Phi(b)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\Phi(b)(o) = b$. □

> ... indem meine Töchter bekanntlich (siehe E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, S. V) schon mehrere Semester studieren (Chemie), schon auf der Schule Differential- und Integralrechnung gelernt zu haben glauben und heute noch nicht wissen, warum $x \cdot y = y \cdot x$ ist. (Siehe Landau, *Grundlagen der Analysis*, Seite VI)

Satz 2.32. *Es gilt:*

1. $a \circ b = b \circ a = b$ *für alle* $b \in A$.
2. $(b \circ c) \circ d = b \circ (c \circ d)$ *für alle* $b, c, d \in A$.
3. $b \circ c = c \circ b$ *für alle* $b, c \in A$

Zu 1:
$a \circ b = \Phi(a)(b) = b$, da $\Phi(a)$ die Identität ist. Weiter ist nach Definition $\Phi(b)(a) = b$. Daher folgt die Behauptung.
Zu 2:
Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f \colon A \ni x \mapsto (b \circ c) \circ x \in A$$
$$g \colon A \ni x \mapsto b \circ (c \circ x) \in A$$

Es ist $f(x) = \Phi(b \circ c)(x)$, also $f = \Phi(b \circ c)$. Und es ist $g(x) = \Phi(b)(c \circ x) = (\Phi(b) \circ \Phi(c))(x)$. Also ist $g = \Phi(b) \circ \Phi(c)$. Es sind daher f und g Morphismen. Wir müssen nur noch untersuchen ob sie in dem Argument a übereinstimmen. Es ist

$$\begin{aligned} f(a) &= \Phi(b \circ c)(a) & &= b \circ c \\ g(a) &= (\Phi(b) \circ \Phi(c))(a) & &= \Phi(b)(\Phi(c)(a)) \\ &= \Phi(b)(c) = b \circ c. \end{aligned}$$

Daher folgt das Assoziativgesetz.
Zu 3. Klar da $[A, A]$ kommutativ ist. □

Definition 2.3.2. Ist $([o], \alpha)$ ein zyklische Kette, so schreibe ich in Zukunft $a + b := \Phi(a)(b)$.

Satz 2.33. *Ist $(A, \alpha) = ([o], \alpha)$ ein zyklische Kette und $f : A \to A$ ein Morphismus, so gilt für alle $a, b \in A$: $f(a) + b = a + f(b) = f(a + b)$*

Für $b \in A$ ist der einzige Morphismus mit $\Phi(b)(0) = b$. Nun ist $[A, A]$ kommutativ, bezüglich der Verknüpfung. Sei $f \in [A, A]$. Wir erhalten nach Definition $f(a) + b = \Phi(f(a))(b)$ und: $\Phi(f(a))(o) = f(a)$, $(f \circ \Phi(a))(o) = f(a)$. Daher sind die beiden Morphismen $\Phi(f(a))$ und $f \circ \Phi(a)$ gleich.
Also ist $f(a) + b = \Phi(f(a))(b = (f \circ \Phi(a)))(b) = f(a + b)$.
Und $a+f(b) = f(b)+a = \Phi(f(b))(a) = (f\circ\Phi(b))(a) = (\Phi(b)\circ f)(a) = f(a)+b$.
Damit folgt die Behauptung. □

Satz 2.34. *Folgende Aussagen sind für eine Kette (A, α) äquivalent:*

1. *Nur die leere Menge und A selber sind abgeschlossene Teilmengen von A.*
2. *$A = [a]$ für ein $a \in A$ und α ist surjektiv.*
3. *$A = [a]$ für ein $a \in A$ und α ist bijektiv.*
4. *$A = [a]$ für ein $a \in A$ und alle Elemente in $[A, A]$ sind invertierbar mit Inversen in $[A, A]$.*
5. *Für alle $d \in A = [a]$ ist $[d] = A$.*

[4]

1. ⇒ 2.:
Es ist $\alpha(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von A. Daher ist $\alpha(A) = A$. Also ist α surjektiv. Sei etwa $a \in A$. Dann ist $[a]$ eine abgeschlossene Teilmenge von A. Also ist $[a] = A$.

[4]Dieser Satz erinnert an das Lemma von Schur aus der Modultheorie. Der Endomorphismenring eines einfachen Moduls ist ein Schiefkörper

2. $\Rightarrow$ 3.: Es gibt ein $b \in A$ mit $\alpha(b) = a$. Außerdem gibt es ein $f \in [A, A]$ mit $f(a) = b$. Daher ist $(\alpha \circ f)(a) = (f \circ \alpha)(a) = a$. Also ist $\alpha \circ f = f \circ \alpha = 1_A$. Damit ist α ein Isomorphismus.
3. $\Rightarrow$ 4.: Es ist $[A, A] = [1_A]_{\alpha *}$. Sei

$$T = \{f | f \in [A, A], f \text{ invertierbar in } [A, A]\}$$

Es ist $1_A \in T$. Sei $f \in T$. Dann gibt es $g \in [A, A]$ mit $f \circ g = g \circ f = 1_A$. Mit α ist auch $\alpha^{-1} \in [A, A]$. Denn α^{-1} kommutiert mit α.Es folgt: $\alpha * (f) = \alpha \circ f$ und $(\alpha \circ f) \circ (g \circ \alpha^{-1}) = 1_A$. Daher ist $\alpha * (f)$ in $[A, A]$ invertierbar. Daher ist $T = [1_A]_{\alpha *} = [A, A]$.
4. $\Rightarrow$ 5.: Sei $d \in [a]$. Es gibt ein Morphismus $f : [a] \to [a]$ mit $f(a) = d$. Sei $g \in [A, A]$ der inverse Morphismus. Daher ist $g(b) = a$. Also ist wegen Satz 2.30 $a \in [b]$. Daher ist $[a] = [b]$.
5. $\Rightarrow$ 1.: Sei $U \subset A$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von A. Dann gibt es ein $a \in U$. Daher ist $[a] = A$. Also ist $A = [a] \subset U$. □

Definition 5 Eine Kette heißt einfach, kreisförmig oder einfach ein Kreis, wenn sie die Bedingungen des Satzes erfüllt.

Ich will an dieser Stelle alle von einem Element erzeugten Ketten kennzeichnen von ihrem Ende her..

Lemma 1 *Sei $([o], \alpha)$ eine zyklische Kette und $x \in [c]$. Dann gibt es einen Morphismus $f : [o] \to [o]$ mit $f(c) = x$.* □

Durch Induktion.

$$T := \{x | x \in [c] \text{ und es gibt einen Morphismus } f : [o] \to [o] \text{ mit } f(c) = x\}$$

- Es ist $c \in T$.
- Außerdem ist T abgeschlossen gegenüber α. Denn sei $x \in T$. Dann gibt es einen Morphismus f mit $f(c) = x$. Daher ist $\alpha(x) = (\alpha \circ f)(c) = (f \circ \alpha)(c)$. Es ist $\alpha \circ f$ ein Morphismus. Da $[c]$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die c enthält ist $T = [c]$. □

Lemma 2 *Sei $([o], \alpha)$ eine zyklische Kette. Ist $x \in [o]$ in der Bahn von $c \in [o]$ und $\alpha(x) = c$, so ist die Einschränkung von α auf $[c]$ ein Isomorphismus.* □

x ist in der Bahn von c. Dann gibt es wegen 1 einen Morphismus $f : [o] \to [o]$ mit $f(c) = [x]$. Dann folgt $\alpha \circ f(c) = \alpha(x) = c$. Dann ist der Morphismus $\alpha \circ f = f \circ \alpha$ eingeschränkt auf $[c]$ die Identität. Daher ist α eingeschränkt auf $[c]$ ein Isomorphismus. □

Lemma 3 *Ist $\alpha : [o] \to [o]$ nicht injektiv, so gibt es in $[o]$ einen Kreis.* □

Da α nicht injektiv ist, gibt es ein $x \neq y$ mit $c = \alpha(x) = \alpha(y)$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass $x \in [y] = \{y\} \cup [\alpha(y)] = \{y\} \cup [c]$. Da $x \neq y$ ist, liegt y in der Bahn von c also in $[c]$. Da außerdem $\alpha(x) = c$ kann 2 angewendet werden. Es folgt α eingeschränkt auf $[c]$ ist ein Isomorphismus. Das heißt $[c]$ ist ein Kreis. □

Satz 2.35. *Eine zyklische Kette enthält maximal einen Kreis.*

Sei $[o]$ eine zyklisch Kette und b, $c \in [o]$ derart, dass $[b]$ und $[c]$ Kreis sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $c \in [b]$ liegt. Dann ist, da $[b]$ ein Kreis ist $[c] = [b]$. und man ist fertig. □

Ketten mit einem Anfang enden also in genau einem Kreis oder haben kein Ende.

> Dedekind macht in seiner Schrift (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite X im Vorwort zur 2. Auflage) folgenden Vorschlag: „Ein System heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden lässt, dass kein echter Teil von A in sich selbt abgebildet wird." Weiter schreibt er dazu: „Nun mache man einmal den Versuch, auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu erichten! Man wird alsbald auf große Schwierigkeiten stoßen…". Beachtet man den Satz 2.34, so besagt Dedekinds Vorschlag: Eine Menge A ist endlich, genau dann wenn es eine Abbildung α gibt, so dass (A, α) kreisförmig ist. Später werde ich das Thema nochmal aufgreifen.

Satz 2.36. *Sind $([a], \alpha)$ und (B, β) zwei Ketten und β injektiv. Stimmen zwei Morphismen $f, g : [a] \to B$ in einem Argument überein, so sind gleich.*

Sei $T = \{c | c \in [a] \text{ und } f(c) = g(c) \Rightarrow f = g\}$.
Es ist $a \in T$. Sei $c \in T$. Weiter sei $f(\alpha(c)) = g(\alpha(c))$. Dann ist $(\beta \circ f)(c) = (\beta \circ g)(c)$. Dann ist $f(c) = g(c)$, da β injektiv ist. Also ist $f = g$. Daher ist T gegenüber α abgeschlossen. Also ist $T = [a]$. □

Folgerung 2.37. *Ist (A, α) eine zyklische Kette $A = [a]$ mit injektivem α, so gilt die Kürzungsregel: $b \circ c = b' \circ c$ für ein $c \in A$, so ist $b = b'$ Anders ausgedrückt: Die Abbildung $A \ni x \mapsto c \circ x \in A$ ist injektiv.*

Die beiden Morphismen $\Phi(b)$ und $\Phi(b')$ stimmen in dem Argument c überein. Also sind sie gleich. Daher ist $b = \Phi(b)(a) = \Phi(b')(a) = b'$ □

Definition 6 Sei $([a], \alpha)$ eine zyklische Kette. Dann schreiben wir für die oben definierte Verknüpfung $c \circ b$ meist $c + b$. Da für alle $b \in [a]$ gilt: $a + b = b$ ist a Neutralelement. Dieses ist eindeutig bestimmt. Wir benennen es in dieser Situation mit 0. □

Folgerung 2.38. *Ist $A = ([0], \alpha)$ eine zyklische Kette mit injektivem α, so ist A eine regulärer Monoid. Das heißt es gilt die Kürzungsregel. Für alle $b, c, b' \in A$ gilt: $b + c = b' + c$, dann ist $b = b'$.*

Definition 7 In der Situation der Folgerung 2.38 ist $(A, +)$ eine regulärer kommutativer Monoid. □

Folgerung 2.39. *Ist $A = ([0], \alpha)$ die Abbildung α sogar bijektiv, so gibt es zu jedem $b \in A$ ein eindeutig bestimmtes $c \in A$ mit $b + c = 0$. Man sagt $(A, +)$ ist eine zyklische Gruppe.*

Sei $b \in [a]$. Alle Elemente aus $[A, A]$ sind invertierbar. Daher gibt es ein $c \in [0] = A$ mit $\Phi(c)(b) = 0$. Daher ist $c + b = 0$. ist c' ein weiters solches c, so ist wegen der Kürzungregel $c = c'$. □

Definition 8 Ist $(A, +)$ eine kommutative Gruppe, so heißt das eindeutig bestimmte c mit $b + c = 0$ auch $-b$. □

Ist U eine gegenüber α abgeschlossene Untermenge der Kette (A, α), so ist die Inklusion ein Homomorphismus. Die Abbildung $\alpha : A \to A$ ist natürlich selber ein Homomorphismus.

Satz 2.40. *Sei (A, α) eine von U erzeugte Kette. Dann gilt für alle Ketten (B, β) und alle Abbildungen $U \xrightarrow{f} B$: Es gibt höchstens einen Homomorphismus $A \xrightarrow{f^*} B$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "f^*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Seien $g, h : A \to B$ zwei Homomorphismen, die $g(u) = h(u) = f(u)$ für alle $u \in U$ erfüllen. Durch Induktion zeige ich nun, dass $g(a) = h(a)$ für alle $a \in A$ ist. Sei dazu

$$T = \{a | a \in A \text{ mit } g(a) = h(a)\}$$

Nach Voraussetzung ist $U \subset T$. Ich zeige: T ist gegenüber α abgeschlossen. Sei dazu $a \in T$. Also ist $g(a) = h(a)$. Da g, h Homomorphismen sind folgt: $g(\alpha(a)) = \beta(g(a)) = \beta(h(a)) = h(\alpha(a))$. T ist gegenüber α abgeschlossen. Nun ist aber A die kleinste Menge, die U enthält und gegenüber α abgeschlossen ist. Daher ist $T = A$. Dies war zu zeigen. $\square$

Satz 2.41. *In der Kategorie der Ketten gibt es Differenzkerne.*

Seien $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ zwei Morphismen. Außerdem erfülle der Morphismus $h : C \to A$ die Gleichung $fh = gh$.

$$T = \{a | f(a) = g(a)\}$$

ist abgeschlossen gegenüber α. Denn sei $a \in T$. Dann ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(g(a)) = g(\alpha(a))$. Also ist T mit α selber eine Kette und $\iota : T \ni a \mapsto a \in A$ ein Morphismus mit $f\iota = g\iota$. Es ist $h(C) \subset T$. Erklären wir nun $h^* : C \ni c \mapsto h(c) \in T$,so ist $\iota h^* = h$. h^* ist auch die einzige Abbildung, die dies erfüllt. $\square$

Satz 2.42. *In der Kategorie der Ketten gibt es Differenzkokerne.*

Seien $h, g \colon A \to B$ zwei Morphismen. Es gibt eine kleinste Äquivalenzrelation auf B mit $f(a) \sim g(a)$ für alle $a \in A$, die mit β verträglich ist. Sei $Q := B/\sim$. Weiter sei $B \xrightarrow{\pi} Q$ die kanonische Projektion. Dann ist Q ein Differenzkokern von f, g.
Sei $B \xrightarrow{h} C$ ein Morphismus mit $hf = hg$. Dann definiert $b \sim_1 b' :\iff h(b) = h(b')$ eine mit β verträgliche Äquivalenzrelation auf B und für alle $a \in A$ ist $f(a) \sim_1 g(a)$. Wir definieren

$$h^*(\pi(b)) := h(b)$$

Dies ist wohldefiniert. Denn ist $\pi(b) = \pi(b')$, so ist $b \sim b'$ und also $b \sim_1 b'$. Daher ist $h(b) = h(b')$. Außerdem ist $h^*(\overline{\beta}(\pi(b))) = h^*(\pi(\beta(b))) = h(\beta(b)) = \gamma(h(b))$, wenn (C, γ) die Kette ist. $\square$

Wie schon früher gesagt, verwende ich in den Beispielen $\mathbb{N}$.
Beispiele:

24. Sei $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ mit $f(n) = n+3$. Weiter sei $g(n) = n$. Will man den Differnzkokern von f und g bestimmen, so muss man die kleinsten Äquivalenzrelation bestimmen für die gilt $n + 3 \sim n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher $0 \sim 3$, $1 \sim 4$, $2 \sim 5$ und $3 \sim 6 \sim 0$. Man überlege sich (ohne Teilen mit Rest), dass $\overline{0}, \overline{1}$ und $\overline{2}$ die einzigen Äquivalenzklassen sind. Daher ist $\mathbb{N}/\ = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Die zugehörige Strukturabbildung ist: $\overline{0} \to \overline{1} \to \overline{2} \to \overline{0}$
25. Sei $A = \{0, 1, 2, 3\}$ und $\alpha :$ $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \circlearrowleft$
Es sei f die Identität und $g(0) = 2$. Dadurch ist der Morphismus g eindeutig bestimmt. Ich berechne den Differenzkokern von f und g. Es ist $0 \sim 2$. Geht man jeweils eins weiter erhält man: $1 \sim 3$ und $2 \sim 3$. Also sind alle Elemente miteinander äquivalent. Es ist also $\overline{0}$ die einzige Äquivalenzklasse. Der Differnzkokern von f, g ist daher $\overline{0}$ mit der Identität. Der einfachste Zykel.

Aufgaben:

5. Zeige: In $\overset{\curvearrowleft}{\mathbf{S}}$ gibt es Fasersummen

2.3.6 Koprodukt von Ketten

Satz 2.43. *In der Kategorie der Ketten gibt es Koprodukte.*

Sei $f_i : X_i \to X$ eine Familie von Morphismen zwischen den Ketten (X_i, γ_i) und (X, γ). Es sei

$$\coprod_{i \in I} X_i = \{(i, x) | i \in I \text{ und } x \in X_i\}$$

$\coprod_{i \in I} X_i$ wird zu einer Kette durch:

$$\Gamma : \coprod_{i \in I} X_i \ni (i, x) \mapsto (i, \gamma_i(x)) \in \coprod_{i \in I} X_i$$

Zu jedem $i \in I$ hat man die Injektion $q_i : X_i \ni x \mapsto (i, x) \in \coprod_{i \in I} X_i$. Es ist q_i ein Morphismus. Denn $q_i(\gamma_i(x)) = (i, \gamma_i(x)) = \Gamma(i, x) = \Gamma(q_i(x))$. Wir erklären zu $(f_i | i \in I)$:

$$f^* : \coprod_{i \in I} X_i \ni (i, x) \mapsto f_i(x) \in X$$

Dies ist ein Morphismus. Denn es ist:

$$f^*(\Gamma((i,x))) = f^*((i,\gamma_i(x))) = f_i(\gamma_i(x)) = \gamma(f_i(x)) = \gamma(f^*(i,x))$$

Also ist $f^* \circ \Gamma = \gamma \circ f^*$. Dies Abbildung ist auch einzig. Denn sei h ein Morphismus mit $h \circ q_i = f_i$ für alle $i \in I$. Und sei $y \in \coprod_{i \in I} X_i$. Dann gibt es $i \in I$ und $x \in X_i$ mit $y = (i,x)$. Wir erhalten: $h(y) = h((i,x)) = hq_i(x) = f_i(x) = f^*((i,x)) = f^*(y)$. Also ist $f^* = h$. □

Aufgaben:

6. Gegeben die Kette A mit dem Morphismus:
$0 \xrightarrow{\alpha} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\alpha} 4 \xrightarrow{\alpha} 5 \xrightarrow{\alpha} 0$
Zeige A ist Koprodukt zweier Ketten die isomorph zu (B,β) sind mit
$0 \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\beta} 0$
7. Sei $A = \{0,1,2\}$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = \alpha(2)$. Zeige es gibt keinen Epimorphismus von $(\mathbb{N}, 1+)$ nach (A,α).

2.3.7 Produkt von Ketten

Satz 2.44. *In der Kategorie der Ketten gibt es Produkte.*

Aufgaben:

8. Berechne $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bezüglich $\alpha \times \beta$, wobei $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni x \mapsto x + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\beta : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \ni x \mapsto x + 1 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
9. Sei $\mathbf{1}$ die Kette mit einem Element und der Identität als Strukturabbildung. Zeige: Für eine beliebige Kette ist $(A \times \mathbf{1}) \cong A$.

2.3.8 Der Halbring der Morphismen

Satz 2.45. *Sei $(A, \alpha) = [o]$ zyklisch. Zu jedem Morphismus $f : A \to A$ gibt es genau einen Morphismus $F : (A, \alpha) \to (A, f)$ mit $F(o) = o$.*

Durch Induktion:

- Ist $f = Id$, so erhält man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
o \arrow[r] \arrow[d] & \alpha(o) \arrow[r] \arrow[d] & \alpha(\alpha(o)) \arrow[d] \\
o \arrow[r, "Id"'] & o \arrow[r] & o
\end{tikzcd}$$

$f = \alpha$. Dann ist Id ein solcher Morphismus.

Gelte die Behauptung für den Morphismus f. Also zu f gibt es genau einen Morphismus $F : (A, \alpha) \to (A, f)$ mit $\alpha \circ F =$.
Wir betrachten nun $\alpha \circ f$.
Beh. $G(a) := (f \circ F)(a) + a$ ist ein Morphismus zwischen $\alpha \circ f$ und α.
Bew.:

$$\begin{aligned}
G(\alpha(a)) &= f \circ F(\alpha(a)) + \alpha(a) \\
&= (f \circ \alpha)(F(a)) + \alpha(a) \\
&= \alpha(f \circ F(a)) + \alpha(a) \\
&= \alpha(f \circ F(a) + a) \\
&= \alpha \circ G(a)
\end{aligned}$$

Satz 2.46. *Ist $[o] = (A, \alpha)$ eine zyklische Kette, $f : A \to A$ eine Kette und $F : (A, \alpha) \to (A, f)$ ein Morphismus mit $F(o) = o$, so ist F ein Homomorphismus $F : A \to A$. Das heißt für alle $a, b \in A$ gilt: $F(a + b) = F(a) + F(b)$.*

Durch Induktion
Dies ist richtig, falls f die Identität ist. Dann gilt $F(\alpha(o)) = f(F(o)) = o$. Daher gilt für alle $a \in [o]$:$F(a) = o$. Das ist aber ein Homomorphismus. $F(a) = o$. Daher $F(a + b) = o = F(a) + F(b)$.
Außerdem ist dies richtig für $f = \alpha$. Denn dann ist $F = Id$ der zugehörige Homomorphismus.
Sei f beliebig derart dass es einen Morphismus $(A, \alpha) \to (A, f)$ gibt mit $F(o) = o$, der ein Homomorphismus $(A, +) \to (A, +)$ ist. Dann betrachten wir die Funktion

$$A \ni x \mapsto f(Fx)) + x \in A.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} G(a + b) &= (f \circ F)(a + b) + a + b \\ &= f(F(a + b)) + (a + b) \\ &= f(F(a)) + f(F(b)) + (a + b) \\ &= (f(F(a)) + a) + (F(f(b)) + b) \\ &= G(a) + G(b) \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit.
Seien F, G zwei Morphismen zwischen (A, α) und (A, f) und $F(o) = G(o)$. Dann gilt für alle $a \in A$: $F(\alpha(a)) = f \circ F(a)$ und $G(\alpha(a)) = f \circ G(a)$. Da $F(o) = G(o)$ ist folgt durch Induktion die Behauptung. □

Satz 2.47. *Ist $a \in A = [o]$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $M(a) : A \to A$ mit $M(1) = a$. Dabei ist $1 := \alpha(o)$.*

Zu dem $a \in A$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\Phi(a) : A \to A$ mit $\Phi(a)(o) = a$. Wir betrachten die Kette $(A, \Phi(a))$. Es gibt einen eindeutig bestimmten Momorphismus $M(a) : A \to A$ mit $M(a)(o) = o$. Dies ist, wie wir gesehen haben ein Homomorphismus zwischen $(A, +)$ und $(A, +)$. Es ist $M(a)(1) = M(a)(\alpha(o)) = \Phi(a)(M(a)(o)) = \Phi(a)(o) = a$. Die Eindeutigkeit ist nach dem Satz vorher klar. □

Definition 2.3.3. Sei $A = [o]$ eine zyklische Kette. Wir definieren: $a \cdot b := M(a)(b)$.

Satz 2.48. *Sei $A = [o]$ eine zyklische Kette. Dann gilt:*

1. *$a \cdot o = o \cdot a = o$ für alle $a \in A$.*

2. *$a \cdot 1 = 1 \cdot a$ für alle $a \in A$.*

3. *$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$*

4. *$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ für alle $a, b, x \in A$.*

Zu 1. $a \cdot o = M(a)(o) = o$, da $M(a)$ ein Homomorphismus ist. $o \cdot a = M(o)(a)$. Es ist $M(o)$ der einzige Morphismus $(A, \alpha) \to (A, Id)$ mit $M(o)(o) = o$(Siehe Seite 61).
Zu 2. $M(a)$ ist der einzige Homomorphismus mit $M(a)(1) = a$. Also ist $a \cdot 1 = a$. Andererseits $M(1)$ die Identität. Also ist $1 \cdot a = a$.
Zu 3. $a \cdot (x+y) = M(a)(x+y) = M(a)(x) + M(a)(y) = a \cdot x + a \cdot y$, weil $M(a)$ ein Homomorphismus ist.
Zu 4. Es ist $M(a) + M(b)$ ein Homomorphismus. und $(M(a) + M(b))(1) = M(a)(1) + M(b)(1) = a + b = M(a+b)(1)$. Daher ist $(a+b) \cdot x = M(a+b)(x) = (M(a) + M(b))(x) = M(a)(x) + M(b)(x) = a \cdot x + b \cdot x$. □

Satz 2.49. *Mit der oben erklärten Multiplikation ist für alle $a, b \in A$: $a \cdot b = b \cdot a$. Das heißt das Kommutativgesetz gilt.*

Wir betrachten die beiden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f : [o] \ni x \mapsto a \cdot x \in [o] \qquad & \qquad g : [o] \ni x \mapsto x \cdot a \in [o] \\ f(1) = a \cdot 1 = a \qquad & \qquad g(1) = 1 \cdot a = a \end{aligned} \tag{2.5}$$

Beides sind Homomorphismen wegen Satz 2.48. Daher ist $g = f$. Damit ist für alle x: $a \cdot x = x \cdot a$. □

Satz 2.50. $(A, \alpha) = ([o], \alpha)$. *Dann gilt das Asssoziativgesetz. Das heißt für alle $a, b, c \in A$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*

Betrachten wir wieder zwei Abbildungen:

$$\begin{aligned} f : [o] \ni x \mapsto (a \cdot b) \cdot x \in [o] \text{ und} \qquad & g : [o] \ni x \mapsto a \cdot (b \cdot x) \in [o] \\ f(1) = (a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b \text{ und} \qquad & g(1) = a \cdot (b \cdot 1) = a \cdot b \end{aligned} \tag{2.6}$$

Beides sind Homomorphismen. Also ist $f = g$. Das heißt das Assoziativgesetz gilt.

2.4 Rekursionssatz

Schlägt man ein Mathematikbuch auf, so sieht man wahrscheinlich irgendwann folgendes Definitionsschema.
(B, β) sei irgend eine Kette, wobei B eine beliebige Menge und β eine beliebige Funktion ist. Weiter sei $b \in B$ beliebig. Man erklärt eine Funktion $\mathbb{N} \xrightarrow{f} B$ durch: $f(0) := b$ und $f(1 + n) := \beta(f(n))$. Kaum einer zweifelt daran, dass so eine Funktion tatsächlich gibt. Aber überlegen wir uns, warum dies richtig ist.
Es ist $\mathbb{N}$ eine besondere Menge. $1+$ ist eine besondere Funktion $1+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Außerdem ist $0 \in \mathbb{N}$ ein besonderes Element in $\mathbb{N}$. Man geht den Sachen auf den Grund, wenn man versucht die Voraussetzungen zu verändern. Gelten dann noch ähnliche Argumente? Gelten noch ähnliche Tatsachen?
Es ist $(\mathbb{N}, 1+)$ eine Kette. Die Definition oben ist sinnvoll, wenn es eine Funktion gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "1+"] \arrow[d, "f"] & 1+n \arrow[d, "f"] \\ f(n) \arrow[r, "\beta"] & \beta(f(n)) \end{tikzcd}$$

Will man untersuchen, woran es liegt, dass es eine solche Abbildung gibt, sollte man sich am besten von zu viel „selbstverständlichen“ Wissen über die Abbildung $1+$ und auch von zu viel „Selbstverständlichen“ von $\mathbb{N}$ befreien. Ersetzen wir also $(\mathbb{N}, 1+)$ durch eine beliebige andere Kette (A, α).

Beispiele:

26. $A = 0$ und $\alpha = 1_A$. Weiter sei $B = \{a, b\}$ und $\beta :$ $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$

    Man sieht sofort: Eine solche Funktion f wie gefordert kann es nicht geben. Denn für f müsste das Diagramm $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "\beta"] & b \end{tikzcd}$ kommutativ und rechtseindeutig sein. Das ist aber nicht der Fall.

27. Es sei $A = \{0, 1\}$ und $\alpha(0) = 1 = \alpha(1)$. Die Menge B wie im letzten Beispiel mit der gleichen Abbildung β. Wieder sieht man:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & 1 \arrow[d] \\
a \arrow[r, "\beta"'] & b \arrow[r, "\beta"'] & a
\end{tikzcd}$$

ist nicht rechts-eindeutig. Von 1 gehen zwei Pfeile aus mit verschiedenem Ziel.

Aufgaben:

10. Sei $A = \mathbb{N}$ und $\alpha(n) = (1 + n) \bmod 3$. $B = \mathbb{N}$ und $\beta(n) = (1 + n) \bmod 4$. Zeige: Es gibt keinen Morphismus $f\colon A \to B$ mit $f(0) = 0$.

11. **frei bezüglich (B, β):** Eine zyklische Kette $(A, \alpha) = ([a], \alpha)$ heißt frei bezüglich (B, β), wenn es zu jedem $b \in B$ genau einen Morphismus $f : A \to B$ gibt mit $f(a) = b$.
    a) Sei $A = \{0\}$ und $\alpha : 0 \to 0$. Es ist (A, α) frei bezüglich (B, β) genau dann, wenn β die Identität ist.
    b) Ist $\beta : B \to B$ die Identität so ist jedes $[a]$ frei bezüglich B.
    c) Ist $A = \{0, 1\}$ und $\alpha : 0 \to 1 \to 0$ und A frei bezüglich B, so ist B elementfremde Vereinigung von Kreisen der Länge 2 oder 1.
    d) Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $\alpha : 0 \to 1 \to 2 \to 0$. Kennzeichne die Ketten (B, β) bezüglich denen A frei ist.
    e) Ist (A, α) frei bezüglich (N, β), so gibt es einen surjektiven Morphismus von einem Koprodukt der A nach B.

12. Wir betrachten Ketten, die von zwei Elementen erzeugt sind.
    a) Zeige Jede von zwei Elementen erzeugte Kette ist epimorphises Bild der Kette $(\mathbb{N}, 2+)$.
    b) F$\mathbb{N}$ wird durch folgende Abbildung zu einer Kette mit zwei Anfängen. $\alpha(0) = 1, \alpha(1) = 3, \alpha(2) = 3$ und $\alpha(n) = 1 + n$ für $n \geq 3$. Zeichne die Kette. Ist $f : (\mathbb{N}, 2+) \to (\mathbb{N}, \alpha)$ der Epimorphismus. Bestimme die Äquivalenzklassen bezüglich $a \sim b \iff f(a) = f(b)$.

Der Satz 2.14 besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Rechtseindeutigkeit richtig ist. Ich will dies jetzt allgemein formulieren und beweisen. Es liegt einerseits daran, dass es in A genügend viele verschiedene Elemente gibt. Das erkennt man, wenn man die Situation versucht zu malen.

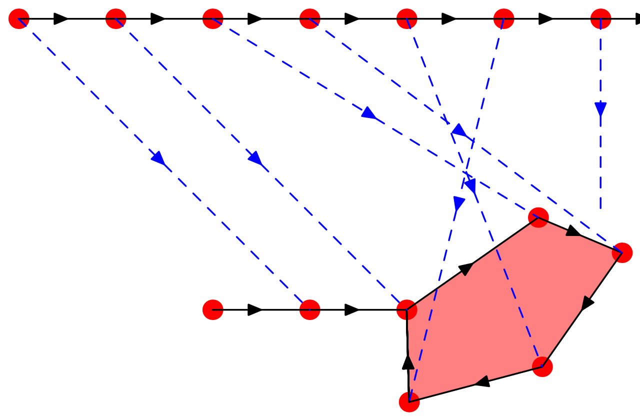


Abb. 2.12: Rekursionssatz

Satz 2.51 (Rekursionsatz Dedekind 1887). *Sei (A,α) eine Kette mit injektivem α. Die zu $\alpha(A)$ disjunkte Teilmenge U von A erzeuge A. Dann gibt es zu jeder einstelligen Algebra (B,β) und jeder Abbildung $f : U \to B$ genau einen Homomorphismus f^*, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "f^*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

$\iota : U \ni u \mapsto u \in A$ ist die Inklusionsabbildung.

Definition 9 Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt heißt (A,α) freie Kette mit Basis U. □

Ich will mehrere Beweise bringen. Ein erster Beweis vielleicht der übersichtlichste. Er braucht das bisher erarbeitete Wissen.

Wir betrachten $D = \{(e, f(e))|e \in E\}$. Es sei $[D]$ der Abschluss von D in $A \times B$ bezüglich $\alpha \times \beta$. Es ist

$$[D] = \bigsqcup_{e\in E} [(e, f(e))]$$

- Die Vereinigung ist tatsächlich elementfremd und es rechte Seite gleich linker Seite. Denn ist $(a, b) \in [(e, f(e))] \cap [(e', f(e'))]$ so ist $a \in [e] \cap [e']$. Wäre e und e' verschieden widerspräche dies 2.16

- Die Vereinigung ist rechtseindeutig. Sei $(a, b) \in [(e, f(e))]$ und $(a, c) \in [(e', f(e'))]$. Dann ist $a \in [e]$ und $a \in [e']$. Also ist $[e] = [e']$. Da $[(e, f(e))]$ rechtseindeutig ist, folgt $b = c$. Das war behauptet.

$[D]$ ist abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$ und zu jedem $a \in A = [E]$ gibt es ein $(a, b) \in [D]$. Dies folgt wieder leicht durch Induktion. Daher ist $[D]$ der Graph einer Funktion f^* mit $f(e) = f^*(e)$ für alle $e \in E$. Das war behauptet. $\square$

Den weiteren Beweis des Satze habe ich dem entsprechenden Beweis im Buch al., *Zahlen*, Seite15 nachempfunden.

Wir betrachten $D = \{(u|f(u))|u \in U\}$. Sie erzeugt eine kleinste Untermenge $[D]$ in $A \times B$, die abgeschlossen gegenüber (α, β) ist.
Beh: $[D]$ ist der Graph einer Funktion.
Bew:

1. Zu jedem $a \in A$ gibt es ein Paar $(a, b) \in [D]$.

   Beweis durch Induktion.

   Sei $u \in U$, dann ist $(u|f(u))$ nach Definition in $[D]$. Sei

   $$T = \{a|a \in A \wedge \exists b \in B : (a|b) \in [D]\}.$$

   Wir haben gesehen $U \subset T$. Sei $a \in T$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $(a|b) \in [D]$. Daher ist $(\alpha \times \beta)(a|b) \in [D]$, da $[D]$ abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$ ist. Also ist $\alpha(a) \in T$. Daher ist T gegenüber α abgeschlossen. Daher ist $T = A$.

2. Für jedes u in U liegt nur $(u, f(u))$ in $[D]$.

   Sei $(u|f(u)) \in [D]$ mit $u \in U$. Angenommen es gibt ein weiteres Paar $(u|b) \in [D]$. Dann ist auch noch $[D] \setminus \{(u|b)\}$ gegenüber (α, β) abgeschlossen. Dazu muss ich nur zeigen, dass $(u|b)$ nicht als Bild eines Elementes aus $[D] \setminus \{(u|b)\}$ vorkommen kann. Angenommen $(\alpha, \beta)(a', c) = (u, b)$. Dann ist $(\alpha(a'), \beta(c)) = (u, b)$. Das bedeutet $u \in \alpha(A)$. Dies kann nach Voraussetzung nicht sein. Also ist nur $(u|f(u)) \in T$.

3. $[D]$ ist rechtseindeutig. Beweis durch Induktion:

   Wieder sei

$$T = \{a|a \in A \wedge \text{ es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in [D]\}$$

Zu zeigen bleibt T ist abgeschlossen gegenüber α. Sei $(a,b) \in [D]$ mit $a \in T$. Das heißt nur dieses b existiert, so dass $(a,b) \in [D]$. Dann ist $(\alpha(a), \beta(b)) \in [D]$. Angenommen es gibt ein weiteres $(\alpha(a), c) \in [D]$. Dann ist auch noch $[D] \setminus \{(\alpha(a)|c)\}$ gegenüber (α, β) abgeschlossen. Denn angenommen $(\alpha, \beta)(a'|b') = (\alpha(a)|c)$. Dann ist $\alpha(a') = \alpha(a)$ und daher (weil α injektiv ist) $a = a'$. Dann ist aber $(a, b') \in [D]$ und $(a,b) \in [D]$. Zu a gab es nur ein b mit $(a,b) \in [D]$. Dann ist $b' = b$. Das heißt $c = \beta(b') = \beta(b)$. Dies widerspricht der Annahme $c \neq \beta(b)$. Also ist $[D]$ der Graph einer Funktion und wegen Satz 1 folgt die Behauptung.

Wir sehen es war wichtig, dass $\alpha : A \to A$ injektiv ist. □

Ich will noch einen abgewandelten Beweis anfügen.

Es sei wieder $D = \{(u, f(u))|u \in U\}$. $[D]$ die von $\alpha \times \beta$ und D erzeugte Unteralgebra (Kette) in $A \times B$.

$$T = \{a|a \in A \text{ Es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in [D]\}$$

Ich behaupte $T = A$. Es ist $U \subset T$. Für $u \in U$ ist $(u|f(u)) \in [D]$. Also gibt es mindestens ein $b \in B$ mit $(u,b) \in [D]$. Sei b mit $(u,b) \in [D] = D \cup (\alpha \times \beta)([D])$. Es ist $(u,b) \in (\alpha \times \beta)([D])$ unmöglich. Denn dann gäbe es ein $(a,b) \in [D]$ mit $(u,b) = (\alpha(a), \beta(b))$. Also wäre $u = \alpha(a)$. Aber $U \cap \alpha(A) = \emptyset$. Daher ist $(u,b) \in D$. Da D ein Funktionsgraph ist, ist D rechtseindeutig. Also ist $b = f(u)$. (Dieser Teil des Beweises geht nur, wenn $U \cap \alpha(A) = \emptyset$ ist. Beispiel: $A = \{0,1\}$ und $\alpha = 1_A$. und $B = \{0,1\}$ mit $\beta(x) = 1 + x \bmod 2$. Dann ist $D = \{(0,0)\}$ und $[D] = \{(0,0),(0,1)\}$. Das heißt $[D]$ ist nicht rechtseindeutig.)
Jetzt zeige ich T ist gegenüber α abgeschlossen.
Sei $a \in T$. und b das einzige b mit $(a,b) \in [D]$. Dann ist $(\alpha(a), \beta(b)) \in [D]$. Sei $(\alpha(a), b_1) \in [D]$. Also $\in (\alpha \times \beta)([D])$. Daher gibt es (a', b') mit $(\alpha \times \beta)(a', b') = (\alpha(a'), \beta(b')) = (\alpha(a), b_1)$. Also ist $\alpha(a') = \alpha(a)$ und daher $a = a'$, weil α injektiv. Mit $(a, b') = (a', b') \in [D]$ und $a \in T$ und $(a,b) \in [D]$ folgt $b' = b$. Also ist auch $B_1 = \beta(b') = \beta(b)$. Daher ist $\alpha(a) \in T$. Daher ist $T = A$.
$[D]$ ist daher der Graph einer Funktion von $A \to B$. Es ist $[D]$ natürlich abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$. Die Eindeutigkeit von f^* ist klar. □

Satz 2.52 (Basissatz). *Seien (A, α) und (B, β) zwei Ketten mit injektivem α und β. Haben A und B gleichmächtige Basen, so sind sie isomorph.*

Sei U ein Basis von A und V eine Basis von B. Nach Voraussetzung gibt es eine umkehrbare Abbildung $f : U \to V$.
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "F"] \\ V \arrow[r, "\iota"'] & B \end{tikzcd}$$
Es gibt genau ein $F : A \to B$, so dass nebenstehendes Diagramm kommutativ ist. Die Umkehrabbildung von f sei g. Zu g gibt es ein G, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "G"] \\ U \arrow[r, "\iota"'] & A \end{tikzcd}$$
Man erhält also $G(F(u)) = G(f(u)) = g(f(u)) = u$ für alle $u \in U$. Andererseits ist $1_A(u) = \iota(u)$ für alle $u \in U$. Es gibt nur eine solche Abbildung. Daher ist $GF = 1_A$. genauso folgt $FG = 1B$. Das war aber behauptet. □

So wie wir den Satz formuliert haben besteht eine Analogie zur Theorie der Vektorräume oder der freien Moduln. Auf der Basis ist man frei Homomorphismen zu definieren. Der definierte Homomorphismus ist eindeutig. Es ist also sinnvoll eine Kette (A, α) mit Basis frei zu nennen.

2.5 Unendliche Mengen

Auf einer Party tummeln sich eine Menge von Damen $\mathbb{D}$ und eine Menge von Herren $\mathbb{H}$. Es ist Damenwahl. Jede der Damen sucht sich einen Tänzer aus. Und siehe da es bleibt keiner übrig. Die Damen sind sehr tanzfreudig und so wird auch in den nächsten Runden keiner der noch so faulen Herren seinem Schicksal entgehen. Mathematisch heißt dies: Es gibt eine bijektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ und jede injektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ ist auch surjektiv. Das heißt insbesondere ist jede injektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ auch surjektiv.
Wer jemals auf einem Wandertag eine Klasse gezählt hat weiß, dass dies nicht selbstverständlich ist. Denn was heißt zählen. Jedem Schüler wird genau ein bestimmtes Wort eines Gedichts zugeordnet. Zugegeben das Gedicht ist meist recht langweilig „Eins Zwei …“. Meist stellt sich beim Experiment heraus,

dass jedesmal ein anderes Wort sich am Ende ergibt. Die reine Theorie sagt uns, dass sich jedesmal dasselbe ergeben sollte.
David Hilbert hat folgendes Bild gebraucht: Ein endliches Hotel hat die folgende Eigenschaft: Angenommen in jedem Zimmer wohnt eine Gast. Das Hotel ist voll belegt. Abends kommt ein Fremder an und fragt nach einem Zimmer. Der Portier muss sagen: „Es tut uns schrecklich leid. Wir können Ihnen kein Zimmer vermieten, da unser Haus voll ist.“
Würde der Fremde fragen, ob man wirklich alle Zuordnungen der Zimmer zu den Gästen bedacht habe, so würde man ihn als verrückt einstufen. Auch wenn die Höflichkeit gebieten würde es nicht zu sagen.
Stellen wir uns aber einen langen Flur ohne Ende vor. In ihm sind die Zimmer wie an einer Perlenschnur angeordnet. Rechts von jedem Zimmer liegt ein weiteres Zimmer.
$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots$
Auch wenn in jedem Zimmer des Ganges eine Person untergebracht ist, kann der neue Gast noch mit einem Bett versorgt werden. Jeder Gast muss einfach das Zimmer rechts von seinem Zimmer beziehen. Dann bleibt das erste Zimmer frei. Hier kann der Fremde seinen Koffer auspacken. Bezeichnen wir mit X die Menge der Zimmer dann bedeutet es: Es gibt einen injektive Funktion, $f\colon X \to X$, welche nicht surjektiv ist.

Definition 2.5.1 (Dedekind). Eine Menge M heißt unendlich, wenn es eine injektive Abbildung $f : M \to M$ gibt, welche nicht surjektiv ist. (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite 13.) In einer Fußnote erklärt Dedekind auf genau diese Weise eine unendliche Menge. Er schreibt dor „S heißt unendlich, wenn es einen echten Teil von S gibt, in welchen sich S deutlich abbilden lässt“. Unter „deutlich“ versteht er eine injektive Funktion. Dies ist übrigens ein schönes Wort für die Sache. Leider hat sich dieser Begriff nicht durchgesetzt.
Entsprechend heißt eine Menge M endlich, wenn jede injektive Abbildung
$f : M \to M$ surjektiv ist.

Er hat auch eine schöne Begründung dafür, dass es eine unendliche Menge gibt: „Meine Gedankenwelt, d.h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s’, dass s der Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S. Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes

s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung φ... “ die gewünschten Eigenschaften.
Ich muss gestehen: Mich überzeugt der Beweis. Es gibt Beckmesser, die ihn nicht schlüssig finden.
Für eine gemalte Erläuterung dieser Idee siehe die Abbildung 2.14

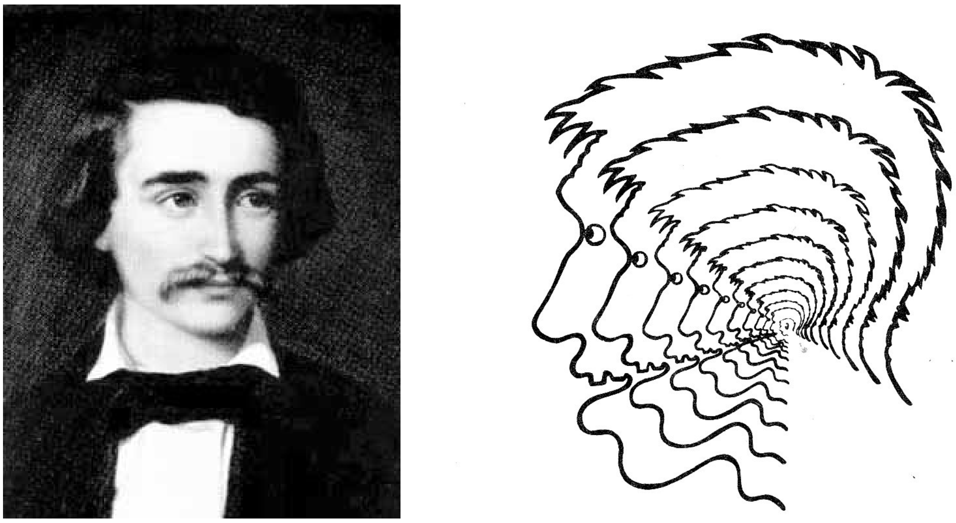


Abb. 2.13: Richard Dedekind und seine Gedanken

Auf jeden Fall erhellt Dedekinds Definition schlaglichtartig, dass das Unendliche näher liegt als das endliche. Einer der Kritiker Dedekinds war sein Freund Georg Cantor. Er hatte übrigens die etwas unangenehme Art die Freundschaft unter wissenschaftlichen Auseinandersetzungen leiden zu lassen. So schreibt er in einem Brief an Hilbert: Herbert Meschkowski, *Georg Cantor Briefe*, Seite 427

> „Dedekind geht offenbar von der Meinung aus, dass die Zahlentheorie keine anderen Axiome voraussetze als die logischen; dasselbe scheinen die Vertreter des Logikcalcüls zu glauben. ... Mein anderer Gegensatz zu Dedekind besteht, wie Sie ja wissen, darin, dass er jede bestimmte Vielheit für consistent hält, also den Unterschied von consistenten und inconsistenten Vielheiten nicht zugibt“

Dedekind definiert Unendlichkeit als mögliche Beziehung einer Menge zu sich. Dedekind erklärt durch soziale Beziehungen die Unendlichkeit.

Satz 2.53. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine unendliche Menge.*
2. *Es gibt eine freie zyklische Kette.*

1. $\Rightarrow$ 2. Es gibt eine unendliche Menge A. Das heißt es gibt eine injektive Abbildung $\alpha : A \to A$, welche nicht surjektiv ist. Also ist $A \setminus \alpha(A) \neq \emptyset$. Sei $a \notin \alpha(A)$ und $[a]$ die kleinste Unteralgebra von A, welche a enthält. $([a], \alpha)$ ist dann eine freie zyklische einstellige Algebra.
2.$\Rightarrow$ 1. Ist klar. □

Hinweise:

1. Der Begriff der Unendlichkeit überträgt sich von der Kategorie der Mengen ganz leicht auf andere Kategorien. So kann man sagen: Ein Vektorraum V hat unendliche Dimension, genau dann wenn es einen injektiven Homomorphismus gibt, der nicht surjektiv ist. [5]

   Definition 2.5.2. Ein Objekt A in einer Kategorie heißt unendlich, wenn es einen Monomorphismus $f : A \to A$ gibt, der kein Epimorphismus ist. Endlich heißt A, wenn dies nicht der Fall ist. Dabei heißt ein Morphismus f Monomorphismus, wenn für alle Morphimen α, β mit $f \circ \alpha = f \circ \beta$ auch $\alpha = \beta$ ist.

2. In diesem Sinne in in der Kategorie der abelschen Gruppen $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ endlich, während $\mathbb{Z}$ unendlich ist. Also etwas als Menge größeres ist endlich. Dies zeigt einen weiteren Aspekt der Definition von Dedekind. Ob etwas endlich erscheint, hängt von den Beziehungen ab, die betrachtet werden.

3. Man hätte auch den dualen Begriff nehmen können etwa

   Definition 2.5.3. Ein Objekt A in einer Kategorie heißt kounendlich, wenn es einen Epimorphismus $f : A \to A$ gibt, der kein Monomorphismus ist. Man könnte vielleicht vernünftiger *epiunendlich* sagen. Dabei heißt ein Morphismus f Epimorphismus, wenn für alle Morphimen α, β mit $\alpha \circ f = \beta \circ f$ auch $\alpha = \beta$ ist.

[5] In diesem Sinne ist auch jeder unzerlegbare injektive Modul endlich.

Satz 2.54. *In der Kategorie der Mengen ist eine Menge genau dann unendlich, wenn sie kounendlich ist.*

Sei E eine unendliche Menge und $E \xrightarrow{f} E$ eine injektive nicht surjektive Abbildung. Es gibt ein $g : E \to E$ mit $gf = 1_E$. Es ist g surjektiv. Wäre g auch injektiv, so wäre g umkehrbar und $f = g^{-1}$. Dem widerspricht, dass f nicht surjektiv ist. Also ist E kounendlich.

Ist umgekehrt E kounendlich und $f : E \to E$ eine surjektive nicht injektive Funktion. Dann gibt es ein $g : E \to E$ mit $fg = 1_E$.[6] g ist sicher injektiv. Wäre g auch surjektiv, so wäre g umkehrbar und wieder $f = g^{-1}$. Dem widerspricht, dass f nicht injektiv ist. Also ist E unendlich. □

Der Satz 2.54 gilt in anderen Kategorien nicht. Beispiele:

28. Beispielsweise ist jeder unendliche Integritätsring, der nicht Körper ist, in der Kategorie der Moduln über diesem Ring unendlich aber keineswegs kounendlch.

29. $\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$ ist in der Kategorie der abelschen Gruppen kounendlich aber endlich.

Ab jetzt stellen wir uns auf den Standpunkt des heiligen Augustinus. Wir glauben also an die Existenz einer unendlichen Menge. Wegen Satz 2.53 gibt es dann eine freie zyklische Kette. Dedekind nennt sie (in seiner Schrift Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite 16) einfach unendlich. Nach dem Basissatz 2.52 ist diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir wählen eine solche aus und nennen sie $(\mathbb{N}, 1+)$. Sie werde erzeugt von 0.

Satz 2.55. *Der einzige Epimorphismus* $f : (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, 1+)$ *ist die Identität.*

Sei $f : (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, 1+)$ ein Epimorphismus. Angenommen $f(0) = n \neq 0$. Ich betrachte die folgende einstellige Algebra mit zwei Elementen (C, γ), $C = \{a, b\}$ und $\gamma(a) = \gamma(b) = b$. $a \xrightarrow{\gamma} b \circlearrowleft$
Ich erkläre zwei Morphismen $g, h : (\mathbb{N}, 1+) \to C$ durch $g(0) = a$ und $h(0) = b$. Ist $x \neq 0$, so ist $x = 1 + y$ also ist $g(x) = g(1 + y) = \gamma(g(y)) = b$. Daher ist für alle $x \neq 0$: $h(x) = g(x)$. Also ist insbesondere $g(f(0)) = h(f(0))$. Daher ist $gf = hf$. Da f als Epimorphismus vorausgesetzt ist, ist $g = h$. Dies war aber gerade nicht der Fall. Daher muss $f(0) = 0$ sein. Dies erfüllt aber nur die Identität. □

[6] Beim Beweis dieser Tatsache ist das Auswahlaxiom notwendig.

Das heißt $(\mathbb{N}, 1+)$ ist in der Kategorie der Ketten koendlich[7]. Das heißt jeder Epimorphismus $(\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, 1+)$ ist schon ein Isomorphismus. Aber $(\mathbb{N}, 1+)$ ist nicht endlich in dieser Kategorie.
Der Beweis des Satzes ist ganz einfach, wenn man die Folgerung 2.24 verwendet. Denn ist $f\colon (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, 1+)$ ein Epimorphismus, so gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $f(a) = 0$. Wäre a von der Form $1 + b$, so wäre $f(a) = 1 + f(b) = 0$. Das kann nicht sein.

Satz 2.56. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

Es gibt eine unendliche Menge.

Für jede Kette (A, α) gilt: Sie ist genau dann zyklisch, wenn sie epimorphes Bild von $(\mathbb{N}, 1+)$ ist.

Sei (A, α) eine zyklische einstellige Algebra. Ein Element a erzeugt also A. Das heißt $[a] = A$. Wegen dem Rekursionssatz 2.51 gibt es zu der Abbildung $\{0\} \ni 0 \mapsto a \in [a] = A$ genau ein Homomorphismus $f^* : \mathbb{N} \to A$ mit $f^*\iota = f$. $f^*(\mathbb{N})$ ist als Bild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Also ist $A = [a] \subset f^*(\mathbb{N})$. Daher ist f surjektiv. Die Umkehrung ist einfach. □

Satz 2.57. *Jede Kette ist epimorphes Bild einer freien Kette.*

Sei (B, β) eine beliebige Kette. Wir betrachten die Menge $F := \mathbb{N} \times B$. Als Funktion $\alpha : F \ni (n, b) \mapsto (s(n), b) \in F$. Diese Funktion ist sicher injektiv. Ist $E := 0 \times B$, so ist $E \cap \alpha(F) = \emptyset$. Also ist F frei mit Basis E. Zu der Abbildung $f : E \ni (0, b) \mapsto b \in B$ gibt es genau einen Morphismus $F \xrightarrow{f^*} B$ mit $f^* \circ \iota = f$. Es ist f surjektiv. Also ist auch f^* surjektiv und damit ein Epimorphismus. □

Satz 2.58.

1. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.*
2. *Ist $f : A \to B$ eine injektive Abbildung in eine endliche Menge B, so ist A endlich.*
3. *Jedes surjektive Bild einer endlichen Menge ist endlich.*[8]

[7]Es wäre vernünftiger epiendlich zu sagen.
[8]Hier braucht man das Auswahlaxiom.

Zu 1. Sei A eine Teilmenge der endlichen Menge B. Dann ist $B = A \cup (B \setminus A)$. Sei $f : A \to A$ eine injektive Abbildung. Wir erklären eine injektive Abbildung $g : B \to B$ mit $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.

$$g(b) := \begin{cases} f(b) & \text{falls } b \in A \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: g ist injektiv.
Es sei $b_1, b_2 \in B$ mit $g(b_1) = g(b_2)$. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1. $b_1, b_2 \in A$. Dann ist $g(b_1) = f(b_1) = g(b_2) = f(b_2)$. Somit ist $b_1 = b_2$, da f injektiv ist.

2. $b_1 \in A$ und $b_2 \in B \setminus A$. Dann ist $g(b_1) = f(b_1) \in A$ aber $g(b_2) = b_2 \notin A$. Dann ist $g(b_1) = g(b_2)$ aber unmöglich.

3. $b_1, b_2 \in B \setminus A$. Dann ist $b_1 = g(b_1) = g(b_2) = b_2$. □

Also ist in jedem Fall, in dem $g(b_1) = g(b_2)$ möglich ist, schon $b_1 = b_2$. Daher ist g injektiv. Da B endlich ist, ist g auch surjektiv. Es gibt daher zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $g(b) = a$. Es ist aber $b \in B \setminus A$ unmöglich. Denn dann wäre $a = g(b) = b \notin A$. Also ist $b \in A$, $g(b) = f(b)$ und man hat: Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $a' \in A$ mit $f(a') = a$. Das heißt f ist surjektiv. Also ist A eine endliche Menge.
Zu 2. Man zeigt leicht, dass die Klasse der endlichen Mengen gegenüber Bijektionen abgeschlossen ist. Damit folgt die Behauptung.
Zu 3. Ist $f : A \to B$ eine surjektive Abbildung mit endlichem A, so gibt ein $g : B \to A$ mit $fg = 1_B$. Daher ist g eine injektive Abbildung. $g(B) \subset A$ ist endlich. Daher ist B endlich.

Aufgaben:

13. a) Zeige: Ist A eine unendliche Menge, und $a \in A$, so ist $A \setminus \{a\}$ unendlich. Nimmt man aus dem unendlichen Meer einen Tropfen heraus, so bleibt das Meer unendlich.

    Lösung:

    Es gibt eine injektive Funktion $\alpha : A \to A$, welche nicht surjektiv ist. Also gibt es ein $b \in A \setminus Bi(\alpha)$.

$a = b$: Dann ist für jedes $x \in A' = A \setminus \{a\}, \alpha(x) \neq a = b \notin Bi(\alpha)$. Also hat man die injektive Funktion

$$\alpha' : A' \ni x \mapsto \alpha(x) \in A'$$

Sie ist als Einschränkung von α sicher injektiv. Sie ist auch nicht surjektiv. Denn es ist $\alpha(a) \neq a \notin Bi(\alpha)$. Also ist $\alpha(a) \in A' = A \setminus \{a\}$. Außerdem ist $\alpha(a) \notin Bi(\alpha')$. Denn wäre $\alpha(a) = \alpha(a')$ mit einem $a' \neq a$, so wäre, weil α injektiv ist $a = a'$. Dies widerspricht sich. Also ist $\alpha' : A' \to A'$ injektiv aber nicht surjektiv. Damit ist $A' = A \setminus \{a\}$ auch unendlich.

$a \neq b$: In diesem Fall sei f die Funktion, die a und b vertauscht. Die ist sicher bijektiv. Sie ist zu sich selbst invers.

Beh.: $a \notin Bi(f\alpha)$.

Angenommen es gibt ein $x \in A$ mit $f(a) = (f\alpha)(x)$. Dann ist $b = f(a) = \alpha(x)$. Dies widerspricht der Wahl von b. Die Einschränkung:

$$\widehat{f\alpha} : A' \ni x \mapsto f\alpha(x) \in A'$$

ist dann eine injektive Funktion, welche nicht surjektiv ist.

b) Ist die Menge E endlich und x beliebig, so ist $E \cup \{x\}$ endlich.

Lösung: Wäre $E \cup \{x\}$ unendlich, so wäre E unendlich.

c) Sei $([a], \alpha)$ eine einstellige zyklische Algebra, so ist für alle $x \in [a]$ die Menge $[a] \setminus [x]$ endlich.

Lösung:

Ich bezeichne mit $\overline{[x]} := [a] \setminus [x]$. Die Behauptung ist für $x = a$ sicher richtig. Denn dann ist $\overline{[x]} = \emptyset$. Sei

$$\mathbb{T} = \{x | \overline{[x]} \text{ endlich } x \in [a]\}$$

Es ist $a \in \mathbb{T}$. Sei $x \in \mathbb{T}$.

- $x \in \overline{[\alpha(x)]}$: In diesem Fall ist $[\alpha(x)] = [x]$ und daher $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]}$ endlich.
- $x \notin [\alpha(x]$: In diesem Fall ist $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]} \cup \{x\}$ und das ist endlich.

Hinweise:

4. Glaubt man an die Existenz einer unendlichen Menge, so ist wahrscheinlich die metasprachliche Induktion, welche die Logiker immer machen und die ich nie verstanden habe (Sie wollen doch die Induktion begründen) überflüssig. Ich kann ja in der unendlichen Menge Induktion führen.

2.6 Die natürlichen Zahlen als Monoid

> „Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppenverstandes entsprechenden Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschuung von vorneherein einleuchtend und gewiß erscheinen" (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite IV)

Wir wählen eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte freie Kette und nennen sie $(\mathbb{N}|1+)$. Dabei ist $1+$ die injektive Strukturabbildung. Früher habe ich sie s genannt. Es werde $\mathbb{N}$ von dem Element 0 erzeugt. Wir erinnern uns an die Definition einer Verknüpfung bei zyklischen Ketten (Siehe Definition 4). Wenden wir sie auf $(\mathbb{N}, 1+)$ an. Es sei also $\Phi(a)$ der eindeutig bestimmte Morphismus $\Phi(a) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\Phi(a)(0) = a$. Dann ist $a + b := \Phi(a)(b)$. Wegen der Folgerung 2.38 gilt folgender Satz:

Satz 2.59. $(\mathbb{N}, +)$ *ist ein regulärer, kommutativer Monoid mit dem neutralen Element* 0*.*

Man beachte, dass bisher noch nicht der Rekursionssatz benutzt wurde. Im nächsten Satz wird er benutzt.

Definition 2.6.1. Ist (A, α) eine Kette, so gibt es wegen dem Rekursionssatz 2.51 zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus
$p(a, -) : \mathbb{N} \ni m \mapsto p(a, m) \in A$ mit $p(a, 0) = a$.

Insbesondere gibt es genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ mit $f(0) = 0$ nämlich die Identität.

Satz 2.60. *Die Abbildung*

$$\Phi(A)\colon A \ni a \mapsto p(a, -) \in [\mathbb{N}, A] \tag{2.7}$$

ist ein funktorieller Isomorphismus. Für alle $(a, n) \in A \times \mathbb{N}$ *gilt:*

$$p(\alpha(a), n) = \alpha(p(a, n)) = p(a, s(n)).$$

Zunächst zeige ich, dass $\{\Phi(A) | (A, \alpha) \text{ eine Kette } \}$ funktoriell ist. Ich muss zeigen, dass für alle Morphismen $A \xrightarrow{f} B$ zwischen einstelligen Algebren folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & B \arrow[d, "\Phi(B)"] \\ {[\mathbb{N}, A]} \arrow[r, "{[\mathbb{N},f]}"'] & {[\mathbb{N}, B]} \end{tikzcd}$$

Sei zu $a \in A$, $\Phi(A)(a) = p(a, -)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $p(a, 0) = a$. Es ist $[\mathbb{N}, f] \circ \Phi(A)(a) = f(p(a, -))$. Dies ist ein Morphismus mit $f(p(a, -))(0) = f(a)$.
Außerdem ist

$$(\Phi(B) \circ f)(a) = \Phi(B)(f(a)) = p(f(a), -).$$

Dies ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\mathbb{N} \to B$ mit $p(f(a), 0) = f(a)$. Also folgt die Kommutativität des Diagramms.
Jetzt muss noch gezeigt werden: $\Phi(A)$ ist ein Isomorphismus für beliebiges A. Sei $\Phi(a) = \Phi(a')$ Das heißt es ist $p(a, -) = p(a', -)$. Insbesondere ist $a = p(a, 0) = p(a', 0) = a'$. Als ist $\Phi(A)$ injektiv. Sei $f\colon \mathbb{N} \to A$ ein Morphismus. Dann gibt es $f(0) = a$ für ein gewisses $a \in A$. Andererseits ist $p(a, -)$ der einzige Morphismus mit $p(a, 0) = a$. Daher ist $p(a, -) = f$. Also ist $\Phi(A)$ bijektiv.
Da insbesondere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & A \arrow[d, "\Phi(A)"] \\ {[\mathbb{N}, A]} \arrow[r, "{[\mathbb{N},\alpha]}"'] & {[\mathbb{N}, A]} \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, folgt $\Phi(\alpha(a)) = \alpha \circ \Phi(a)$. Das heißt $p(\alpha(a), -) = \alpha \circ p(a, -)$. Dies war zu zeigen. $\square$

Beispiele:

30. Wir betrachten die Kette $A := (\mathbb{N}, \alpha)$ mit $\alpha(n) := 2 + n$. Da die Basis von $(\mathbb{N}, \alpha)$ gleich $\{0, 1\}$ ist, ist ein Morphismus in eine andere Kette durch zwei

Anfangswerte bestimmt. Ist $f\colon A \to A$ ein Morphismus mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, so ist f die Identität. Ein Morphismus, der auf der Basis identisch wirkt, wirkt auf ganz A identisch.

31. Betrachte man dieselbe Menge wie im letzten Beispiel. Jetzt seien die Anfangswerte $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$. Dann ergibt sich $f(2) = f(2+0) = 2 + f(0) = 2$ und $f(3) = f(2+1) = 2 + f(1) = 2$, $f(4) = f(2+2) = 2+2 = 4$. Bestimme f!
32. Spannender ist die Frage, wenn wir etwa $\alpha = 2+$ und $\beta = 1+$ wählen. Wir betrachten die Morphismen $f : (\mathbb{N}, 2+) \to (\mathbb{N}, 1+)$. Wir setzen beispielsweise die Anfangswerte $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$. Wir erhalten $f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2 \ldots$. Bestimme f.
33. Das ganze hat Ähnlichkeit mit dem Anfangswertproblem bei Differentialgleichungen.
34. Übrigens hat Das Problem hat was mit dem Geldwechselproblem zu tun! Wieveil Möglichkeiten gibt es einen 20 Euro Schein in 1 Euro und 2 Euro zu wechseln? $10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1+1+1+1$ etc. Muss noch überlegt werden.
35. Berechne den Morphismus $f\colon (\mathbb{N}, 2+) \to (\mathbb{N}, 1+)$ mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$!
36. Schreibe ein Programm um das möglichst geschickt zu berechnen!
37. Gegeben sei folgende Kette: $a \xrightarrow{\alpha} b \underset{\alpha}{\overset{\alpha}{\longleftrightarrow}} c \xleftarrow[\alpha]{} d$ Wir berechnen den eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon (\mathbb{N}, 2+) \to A$ mit den Anfangswerten $f(0) = a$ und $f(1) = d$. Es ergibt sich $f(2) = f(2+0) = \alpha(a) = b$. $f(3) = f(2+1) = \alpha(f(1)) = \alpha(d) = c$. Rechnet man weiter ergibt sich die folgende Tabelle:

0	1	2	3	4	5	6	...
a	d	b	c	c	b	b	...

2.7 Multiplikation

Die Methode aus 2.6.1 kann wiederholt angewendet werden. Ab jetzt schreibe ich wieder wie gewohnt $a + b$ für $p(a, b)$ und 1 für $s(0)$.
Diese Wiederholung soll etwas allgemeiner durchgeführt werden. Denn sie wird langweilig, wenn man einfach wiederholt. Es ist wie bei vielen menschlichen Tätigkeiten. Wir wiederholen auf einer höheren Stufe. Wir haben schon genügend viele Beispiele um den folgenden Begriff zu erläutern.

Definition 2.7.1. Eine Menge $(A, +)$ zusammen mit der zweistelligen Verknüpfung $+$ heißt regulär, kommutativer Monoid mit dem Neutralelement 0, wenn gilt:

1. $0 + a = a + 0$ für alle $a \in A$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in A$.
3. $a + b = a' + b$, dann ist $a = a'$ für alle $a, a', b \in A$.

Ein solcher regulärer, kommutativer Monoid wird auch kommutativ, kürzbarer Monoid geneannt.
Wir kennen schon eine Reihe solcher Monoide. Die Folgerung 2.38 beschreibt eine ganze Klasse solcher Monoide. $(\mathbb{N}, +)$ ist ein solcher Monoid. In diesem Abschnitt meine ich mit Monoid immer einen Monoid dieser Sorte.
Ist eine Teilmenge eines Monoid gegenüber der Addition abgeschlossen,und enthält sie 0, so heißt er *Untermonoid*. Der Durschnitt von Untermonoiden ist ein Untermonoid. Zu jeder Teilmenge $U \subset A$ gibt es einen kleinsten Monoid, der U enthält. Ich bezeichne ihn mit $[U]$, der von U erzeugte Untermonoid. $\mathbb{N}$ ist von $\{1\}$ erzeugt. Die Potenzmenge einer Menge X zusammen mit der elementfremden Vereinigung ist ein kommutativ regulärer Monoid.

Definition 2.7.2. Sind A, B zwei Monoide, so heißt eine Abbildung $A \xrightarrow{f} B$ ein Homomorphismus, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Satz 2.61. *1. Ist $A \xrightarrow{f} B$ ein Homomorphismus, so ist $f(0) = 0$.*

2. $Ke(f) \colon = \{x | f(x) = 0\}$ ist ein Untermonoid.

3. $Bi(f) \colon = \{f(x) | x \in A\}$ ist ein Untermonoid von B.

Zu 1.: Es ist $0 + f(0) = f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Wegen der Kürzbarkeit von A folgt $f(0) = 0$.
Zu 2.: Seien $x, y \in Ke(f)$. Dann ist $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$.
Zu 3.: Seien b_1, b_2 in $Bild(f)$. Es gibt daher $x_1, x_2 \in A$ mit $f(x_1) = b_1$ und $f(x_2) = b_2$. Damit ist $b_1 + b_2 = f(x_1 + x_2) \in Bild(f)$. □

Beispiele:

38. Ist I eine Menge und $(A, +)$ eine regulärer, kommutativer Monoid, so ist A^I mit der komponentenweisen Addition ein regulär kommutativer Monoid.
39. Sei $H \subset \mathbb{N}$. H enthalte die 0 und H sei abgeschlossen gegenüber der Addition. In diesem Fall heißt H numerische Halbgruppe.

a) H = kleinste Untermenge von $\mathbb{N}$, welche $2, 3$ enthält und abgeschlossen gegenüber der Addition ist und 0 enthält.
Beh.: $H = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Beweis: Aufgabe.

40. Sind $(A, +)$ und $(B, +)$ zwei kommutativ, reguläre (kürzbare) Monoide, so ist $Hom(A, B)$ mit der Verknüpfung $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$ ein kommutaiv regulärer Monoid.

Satz 2.62. *Die kommutativen Monoide bilden eine Kategorie.*

Klar. □

Sei nun $(A, +)$ ein kommutativer Monoid und $a \in A$. Wir haben die Abbildung

$$a+ : A \ni x \mapsto a + x \in A$$

Dadurch wird $(A, a+)$ zu einer Kette.

Satz 2.63. *Ist A ein Monoid, dann gibt es genau einen Homomorphismus $M(a) \in Hom(\mathbb{N}, A)$ mit $M(a)(1) = a$.*

Wir betrachten auf A die Abbildung $a+$. Dadurch wird A zu einer Kette. Es gibt daher genau einen Morphismus $M(a) : \mathbb{N} \to A$ mit $M(a)(0) = 0$. Da $M(a)$ ein Morphismus zwischen den Ketten $(\mathbb{N}, 1+)$ und $(A, a+)$ ist gilt $M(a)(1) = M(a)(1 + 0) = a + M(a)(0) = a$.
Behauptung: $f := M(a)$ ist ein Homomorphismus.
Bew.: Sei $T := \{y|f(y + z) = f(y) + f(z)$ für alle $z \in \mathbb{N}\}$
Es ist $0 \in T$. Denn für jedes $z \in \mathbb{N}$ ist $f(z) = f(0+z) = 0+f(z) = f(0)+f(z)$. Sei $y \in T$. Wir betrachten $1+y$. $f((1+y)+z) = f(1+(y+z)) = a+f(y+z) = a+(f(y)+f(z)) = (a+f(y))+(f(z)) = f(1+y)+f(z)$. Also ist $f = M(a)$ ein Homomorphismus. $T = \mathbb{N}$. Bleibt zu zeigen, dass $M(a)$ mit obigen Bedingungen eindeutig ist.
Sei $g : \mathbb{N} \to A$ mit $g(1) = a$ ein Homomorphismus. Dann ist $g(0) = 0$. Da $g(1 + y) = g(1) + g(y) = a + g(y)$ ist, ist g ein Morphismus zwischen $(\mathbb{N}, 1+)$ und $(A, a+)$ mit $g(0) = 0$. Daher ist $f = g$.
In dem Beweis wird nicht verwendet, dass der Monoid regulär ist. □

Dieser Satz gilt natürlich auch, wenn der Monoid multiplikativ geschrieben wird. Die Rolle der 0 übernimmt dann die Identität und die Rolle des Verknüpfungszeichens + übernimmt das Kompositionszeichen $\circ$. Ist daher $\alpha \in A$, so gibt es genau Homomorphismus. $f : \mathbb{N} \to A$ mit $f(1) = \alpha$. Wir schreiben $f(n) = \alpha^{n.}$

Satz 2.64. *Ist $(A, +)$ ein regulärer kommutativer Monoid, so ist $Hom(\mathbb{N}, A)$ ein regulärer kommutativer Monoid mit der Addition $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$.*

Sei $f + g = f + g'$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) + g(n) = f(n) + g'(n)$. Daher ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $g(n) = g'(n)$. Daher ist $g = g'$. □

Satz 2.65. *Die Abbildung $M(A) : A \ni a \mapsto M(a) \in Hom(\mathbb{N}, A)$ ist ein Isomorphismus.*

Seien $x, y \in A$. Dann ist $M(x + y)(1) = x + y = M(x)(1) + M(y)(1) = (M(x) + M(y))(1)$. Also ist $M(x + y) = M(x) + M(y)$. Daher ist $M(A)$ ein Homomorphismus. Bleibt zu zeigen. dass $M(A)$ ein Isomorphismus ist.
Sei f ein Hommorphismus. Es sei $f(1) = a$. Dann ist $M(a)(1) = a = f(1)$. Also ist $f = M(a)$. Daher ist $M(A)$ surjektiv. $M(A)$ ist auch injektiv. Denn sei $M(a) = M(a')$. Man erhält: $a = M(a)(1) = M(a')(1) = a'$. Daher ist $M(A)$ ein Isomorphismus. □

Satz 2.66. *Die Familie $\{M(A)|A$ kommutativ regulärer Monoid $\}$ ist ein funktorieller Isomorphismus.*

Zu zeigen ist, dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "M(A)"'] & B \arrow[d, "M(B)"] \\
Hom(\mathbb{N}, A) \arrow[r, "Hom(\mathbb{N}, f)"'] & Hom(\mathbb{N}, B)
\end{tikzcd}$$

Sei $a \in A$. $(M(B) \circ f)(a) = M(B)(f(a))$. $M(B)(f(a))(1) = f(a)$. Es ist $M(B)(f(a))$ der einzige Homomorphismus h mit $h(1) = f(a)$. Andererseits ist
$(f \circ M(A))(a)(1) = f(M(A)(a))(1) = f(a)$. Daher ist $f \circ M(A) = M(B) \circ f$.
Also ist die Familie eine natürliche Transformation.
Betrachten wir die Auswertfunktion

$$W(A) : Hom(\mathbb{N}, A) \ni f \mapsto f(1) \in A$$

Sie ist invers zu $M(A)$. Beweis: Es ist $W(A) \circ M(A)(a) = W(A)(M(A)(a)) = M(a)(1) = a$. Zur Umkehrung: $M(A) \circ W(A)(f) = M(A)(f(1)) =$ Einziger Homomomorphismus $f : \mathbb{N} \to A$ mit $h(1) = f(1)$. Das ist aber f. Daher ist $M(A) \circ W(A) = Id$. Man rechnet auch nach, dass W ein funktorieller Morphismus ist. □

Definition 2.7.3. Ist $(A, +)$ ein regulärer kommutativer Monoid. Wir definieren:

$$\odot : \mathbb{N} \times A \ni (n, a) \mapsto M(A)(a)(n) \in A$$

Dies ist eine äußere Verknüpfung auf A

Satz 2.67. *Es gilt für einen regulären kommutativen Monoid* $(A, +)$

1. $0 \odot a = 0$ *für alle* $a \in A$. *Außerdem ist* $n \odot 0 = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
2. $1 \odot a = a$ *für alle* $a \in A$.
3. $(x + y) \odot a = x \odot a + y \odot a$ *für alle* $a \in A$ *und alle* $x, y \in \mathbb{N}$.
4. $x \odot (a + b) = x \odot a + x \odot b$ *für alle* $x \in \mathbb{N}$ *und* $a, b \in A$.

Ich schreibe im Beweis einfach M anstelle von $M(A)$, da die Menge A ja fest liegt.
Zu 1. $0 \odot a = M(a)(0) = 0$, da $M(a)$ ein Homomorphismus ist. Ist $n \in \mathbb{N}$ so ist $n \odot 0 = M(0)(n)$. Es ist $M(0)$ der einzige Homomorphismus $\mathbb{N} \to A$, welcher die $1 \in \mathbb{N}$ auf $0 \in A$ abbildet. Das ist aber der Nullhomomorphismus. Daher ist $M(0)(n) = 0 = n \odot 0$.
Zu 2. $1 \odot a = M(a)(1) = a$ nach Definition von $M(a)$.
Zu 3. $(x + y) \odot a = M(a)(x + y) = M(a)(x) + M(a)(y) = x \odot a + y \odot a$.
Zu 4. $x \odot (a + b) = M(a + b)(x) = M(a)(x) + M(b)(x) = x \odot a + x \odot b$, weil wegen Satz 2.65 $M : \mathbb{N} \to Hom(\mathbb{N}, A)$ ein Homomorphismus ist. □

9

Wendet man diesen Satz Auf $A = (\mathbb{N}, +)$ an, so hat man auf $\mathbb{N}$ eine zweistellige Verknüpfung die Multiplikation. Ich bezeichne sie mit dem einfachen Punkt.

Satz 2.68. $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *hat die folgenden Eigenschaften.*

[9] Es ist zu überlegen, ob die Kommutativtät der Addition in A tatsächlich gebraucht wird.

1. *$0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$(n+m) \cdot x = n \cdot x + m \cdot x$ für alle $n, m, x \in \mathbb{N}$.*
3. *$n \cdot (x+y) = n \cdot x + n \cdot y$ für alle $x, y, n \in \mathbb{N}$*

Die Beweise stehen oben.

Satz 2.69. *Die Verknüpfung $\cdot$ ist auf $\mathbb{N}$ kommutativ.*

Wir betrachten zu bestimmtem $n \in \mathbb{N}$ die beiden Homomorphismen:

$$f \colon \mathbb{N} \ni x \mapsto x \cdot n \in \mathbb{N}$$
$$g \colon \mathbb{N} \ni x \mapsto n \cdot x \in \mathbb{N}$$

Es ist $f(1) = 1 \cdot n = M(n)(1) = n$ und $g(1) = 1 \cdot n = n$. Also ist $\cdot$ kommutativ. $\square$

Es bleibt das Assoziativgesetz zu überlegen.

Satz 2.70. *Sein $(A, +)$ ein regulärer kommutativer Monoid. Dann gilt für alle $a \in A$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$: $(n \cdot m) \odot a = n \odot (m \odot a)$.*

Betrachten wir die beiden Abbildungen:

$$f \colon \mathbb{N} \ni x \mapsto (x \cdot m) \odot a \in A$$
$$g \colon \mathbb{N} \ni x \mapsto x \odot (m \odot a) \in A$$

Es sind beides Homomorphismen und es ist $f(1) = (1 \cdot m) \odot a = m \odot a$. Weiter ist $g(1) = 1 \odot (m \odot a) = m \odot a$. Daher sind die beiden Homomorphismen gleich. Es folgt die Behauptung. $\square$

Insbesondere folgt das Assozitivgesetz für die Multiplikation in $\mathbb{N}$. Fassen wir die Gesetze der Multiplikation in $\mathbb{N}$ noch einmal zusammen.

Satz 2.71. *Auf dem regulären kommutativen Monoid $(\mathbb{N}, +)$ gilt für die Multiplikation $\cdot$ folgendes:*

1. *$1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$.*
3. *$a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.*
4. *$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$*

2.7.1 Konstruktive Durchführung der Multiplikation

Ich habe schon bemerkt, dass es einen Nachteil hat, wenn man die gewohnte Schreibweise für die Addition wählt. Man vergisst dann leicht die Freiheiten, die man noch hat. Daher möchte ich die Multiplikation in Abhängigkeit von einer Nachfolgebeziehung in $(\mathbb{N}, s)$ programmieren. Einzige Voraussetzung soll sein, dass s eine injektive Funktion ist.

2.7.2 Potenzrechnung

Ist $a \in \mathbb{N}$ so gibt es nach dem Abschnitt2.7 eine Abbildung $m(a, -) : \mathbb{N} \ni \mapsto a \cdot n \in \mathbb{N}$. Zu dieser Abbildung gibt es nach dem Rekursionssatz genau ein Homomorphismus $e(a, -) : (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, m(a, -))$ mit $e(a, 1) = 1$.

Satz 2.72. *Es ist* $e(a, b + c) = e(a, b) \cdot e(a, c)$.

Weil $e(a, -) : (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, m(a, -))$ ein Homomorphismus ist, gilt $e(a, b + 1) = a \cdot e(a, b) = e(a, b) \cdot e(b, 1)$. □

Dies muss allgemeiner Durchgeführt werden mit einem Monoid multiplikativ geschrieben. (Der braucht nicht regulär sein)

2.7.3 Ordnung

Satz 2.73. *Ist* $\alpha : A \to A$ *injektiv und* $a \notin Bi(\alpha)$, *dann ist die Abbildung:*

$$\Phi : [a] \ni x \mapsto [x] \in \textit{Menge der abgeschlossenen Teilmengen von } [a] \tag{2.8}$$

bijektiv.

Seien $x, y \in [a]$ mit $[x] = [y]$. Dann ist $x \in [y]$. Wäre $x \neq y$, so wäre $x \in \alpha([y])$. Es gäbe ein $c \in [y] = [x]$ mit $\alpha(c) = x$. Dieses c wäre auch in $[x]$. Das hieße $x \in \alpha([x]) = [\alpha(x)]$ im Widerspruch zum Lemma 2.5. Daher ist Φ injektiv. Zu zeigen bleibt die Surjektivität von Φ.
Sei U eine gegenüber α abgeschlossene Teilmenge von $[a]$. Ist $a \in U$, so ist $[a] = U$ und man ist fertig. Andernfalls ist $a \notin U$. Sei

$$T = \{c | c \notin U\}$$

T ist nicht gegenüber α abgeschlossen, da sonst $T = [a]$, also U die leere Menge wäre. Also gibt es $c \notin U$ aber $\alpha(c) \in U$.

Beh.:$[\alpha(c))] = U$
Bew.: Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein $u \in U$ mit $u \notin [\alpha(c)]$. Also ist $[u] \not\subset [\alpha(c)]$ und wegen Satz ist $[u] \cap [\alpha(c)] \neq \emptyset$.
Ist daher $u \notin [\alpha(c)]$, so ist wegen Satz 2.15 $[\alpha(c)] \subset [u]$ und $u \neq \alpha(c)$. Also ist $\alpha(c) \in \alpha([u])$. Es gibt daher ein $d \in [u]$ mit $\alpha(d) = \alpha(c)$. Weil α injektiv ist, ist $c = d \in U$. Das kann aber nicht sein. Es kann also ein $u \in U \setminus [\alpha(c)]$ nicht geben. Daher ist $U = [\alpha(c)]$. Das heißt die Abbildung Φ ist surjektiv.

Satz 2.74. *Ist (A, α) eine freie Kette mit Basis E, so ist $A = \bigcup\limits_{e \in E} [e]$. Wobei die Vereinigung disjunkt ist.*

Jedes Element aus A ist von genau einem Basiselement aus erreichbar.

Dies gilt wegen Satz 2.16. □

Definition 2.7.4. Ist (A, α) eine einstellige Algebra, so erklären wir $a \leq b :\Longleftrightarrow [b] \subset [a]$. Das heißt von a aus ist b erreichbar durch α.

Satz 2.75. *Ist (A, α) eine freie einstellige Algebra mit der Basis E, so ist die in der Definition 2.7.4 erklärte Relation eine Halbordnung auf A, in der jede nichtleere Menge ein minimales Element hat.*

Die Relation ist sicher reflexiv das heißt $[a] \subset [a]$. Außerdem ist sie transitiv. Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so ist $[y] \subset [x]$ und $[x] \subset [y]$. Daher ist $[x] = [y]$. Dann ist $y \in [x]$. Wäre $y \neq x$, so wäre $y \in [\alpha(x)]$. Das hieße $[y] = [x] \subset [\alpha(x)]$ und damit $x \in [\alpha(x)]$. Da $x \in [e]$ für ein Basiselement e ist, widerspricht dies 2.5 auf Seite 27
Zu zeigen bleibt: Jede nichtleere Menge $V \subset A$ hat ein minimales Element. Sei V eine nichtleere Teilmenge von A. 1.Fall: $E \cap V \neq \emptyset :$ Dann gibt es ein $e \in V$. Dieses e ist sicher minimal.
2. Fall: $E \cap V = \emptyset :$ Es ist dann $E \subset A \setminus [V] = [E] \setminus [V]$. (Da $[V] = V \cup \alpha([V])$ ist.) Diese Menge ist nicht abgeschlossen gegenüber α. Wäre sie das, so wäre $[E] \setminus [V] = A$ und also $[V] = \emptyset$. Also gibt es ein $c \in [E] \setminus [V]$ mit $\alpha(c) \in [V]$.
Beh.: $\alpha(c) \in V$ und $\alpha(c)$ ist minimal in $[V]$ und damit in V.
Es gibt ein $v \in V$, so dass $\alpha(c) \in [v]$. Wäre $\alpha(c) \neq v$, so wäre $\alpha(c) \in \alpha([v])$. Also gäbe es ein $d \in [v]$ mit $\alpha(c) = \alpha(d)$. Da α injektiv ist, folgt $c = d \in [v] \subset [V]$. Dies widerspricht der Voraussetzung. Also ist $\alpha(c) \in V$.

Beh: $\alpha(c)$ ist minimales Element in $[V]$.
Angenommen es gäbe ein $v_1 \in V$ mit $v_1 < v = \alpha(c)$. Dann ist $[v] \subsetneq [v_1]$. Es gibt also ein $d \in [v_1] \subset [V]$ mit $\alpha(d) = v = \alpha(c)$. Daher ist $c = d$, was wieder nicht der Fall sein kann. Denn es war $c \notin [V]$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 2.76. $(\mathbb{N}, 1+)$ *ist wohlgeordnet*

Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{N}$ ist wegen Satz $[x] \subset [y]$ oder $[y] \subset [x]$. Daher ist $y \leq x$ oder $x \leq y$. Somit ist $(\mathbb{N}, 1+)$ linear geordnet. Dann ist jedes in einer Menge V minimale Element auch schon ein kleinstes Element. $\square$

Folgerung 2.77. *Jede Unterkette von* $(\mathbb{N}, 1+)$ *ist von einem Element erzeugt.*

Sei $U \hookrightarrow \mathbb{N}$ eine Unterkette. Dann enthält U ein kleinstes Element $u \in U$. Ist $b \in U$, so ist $u \leq b$. Daher ist $[b] \hookrightarrow [u]$. Daher ist $b \in [u]$ und somit $U = [u]$. $\square$

Bemerkung 3 Ist $a \in \mathbb{N}$, so ist $[a] = \{a + t | t \in \mathbb{N}\}$. Es ist $a \leq b$ genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ gibt mit $a + t = b$. Diese t ist eindeutig bestimmt und wird mit $b - a$ bezeichnet. $\square$

Die eindeutig bestimmte Abbildung $p(a, -) \colon \mathbb{N} \to [a]$ mit $p(a, 0) = a$ ist surjektiv. Daher gibt es zu jedem $b \in [a]$ ein t mit $p(a, t) = a + t = b$. Ist $a \leq b \iff [b] \subset [a] \iff b \in [a]$ genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ gibt mit $a + t = b$. Diese t ist eindeutig bestimmt. $\square$

Bemerkung 4 Für $m \in \mathbb{N}$ und $a \leq b$ ist $m \cdot (b - a) = m \cdot b - m \cdot a$. $\square$

Wir haben:

$$\begin{aligned} a + (b - a) &= b \\ a \cdot c + (b - a) \cdot c &= b \cdot c \\ (b - a) \cdot c &= b \cdot c - a \cdot c \end{aligned}$$

Satz 2.78. *Für* $a, b \in \mathbb{N}$ *gilt: Ist* $a \leq b \leq 1 + a$ *so ist* $b = a$ *oder* $b = 1 + a$

$b \leq 1 + a$, dann ist $1 + a \in [b]$. Ist $1 + a = b$ so ist man fertig. Andernfalls gibt es ein $c \in [b]$ mit $1 + a = 1 + c$. Dann ist $a = c \in [b]$. Also ist $b \leq a$. Wir haben also $b \leq a$ und $a \leq b$. Daher ist $a = b$. $\square$

Satz 2.79. *Ist $a \leq b$, so folgt für alle $0 \leq c$*

1. $a + c \leq b + c$.
2. $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Ist $a < b$, so folgt für alle $0 < c$:

1. $a + c < b + c$.
2. $a \cdot c < b \cdot c$.

Es gibt ein $t \in \mathbb{N}$ mit $a + t = b$. Daher ist $(a + c) + t = (b + c) + t$. Daher ist $a + c \leq b + c$.
$a \cdot c + t \cdot c = b \cdot c$. Daher ist $a \cdot c \leq b \cdot c$.
Zum zweiten Teil: Ist $a < b$ so ist $a + c \leq b + c$. $a + c = b + c$ kann nicht sein, denn dann wäre $a = b$. Also ist $a + c < b + c$.
Ist $0 < c$ und $0 < t$, so ist $1 \leq t$ Also ist $0 < t < c \cdot t$. Ist $a < b$, so ist $a + t = b$ mit einem $0 < t$, so ist $a \cdot c + t \cdot c = b \cdot c$, mit $0 < t \cdot c$. Daher ist $a \cdot c < b \cdot c$ □

Folgerung 2.80. *Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.*

Satz 2.81 (Teilen mit Rest.). *Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $b > 0$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{N}$ mit $a = q \cdot b + r$ und $r < b$. Die Zahlen q, r sind eindeutig bestimmt.*

Durch Induktion nach a. Sei

$$T = \{a | a = q \cdot b + r, r < b\}.$$

- Es ist sicher $0 \in T$. Denn $0 = 0 \cdot b + 0$.
- Sei die Behauptung richtig für ein $a \in T$. Also $a = q \cdot b + r$, mit $r < b$. Daher ist $a + 1 = q \cdot b + (r + 1)$. Ist $r + 1 < b$ ist man fertig. Andernfalls ist $r < b \leq r + 1$. Also ist $b = r + 1$. Daher ist $a + 1 = q \cdot b + b = (q + 1) \cdot b$ wegen dem Distributivgesetz. □

Die Eindeutigkeit zeigt man wie üblich Eindeutigkeit.

Jetzt sind wir so weit, um das Beispiel auf der Seite **??** genauer zu diskutieren.

$$g : \mathbb{N} \ni x \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ falls } x < 3 \\ r^2 + g(q) \text{ falls } x = 3 \cdot q + r \text{ mit } r < 3 \end{cases}$$

Es ist $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = 4$, $g(3) = 1$, $g(4) = g(1 \cdot 3 + 1) = 2$

Bemerkung 5 Ist $x = a_0 + \cdots + a_n \cdot 3^n$ mit $a_i \in \{0,1,2\}$ so ist $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2$. Das ist die Summe der Ziffern zum Qudrat im 3-adischen System. □

Durch Induktion nach der Stellenzahl. Es ist richtig, wenn x nur eine Stelle hat. Sei

$$T := \{k | g(k) = \text{ Summe der Ziffern zum Quadrat von } k\}$$

- $0 \in T$.
- Sei $x = (a_0 + \cdots + a_{n-1}3^{n-1}) + a_n 3^n$. Dann ist $g(x) = a_0^2 + g(3 \cdot (a_1 + \cdots + a_n 3^{n-1})) = a_0^2 + g(a_1 + \dot{a}_n 3^{n-1}) = a_0^2 + g(y)$. Es ist y eine n-stellige Zahl im 3-er System. Daher ist $g(y) = a_1^2 + \cdots + a_n^2$. Und daher ist $g(x) = a_0^2 + \cdots + a_n^2$. □

Sei $M = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 3^3 = 27\}$.
Beh.: M ist abgeschlossen gegenüber g.

Da $x < 3^3$ ist x von der Form: $x = a_0 + a_1^3 + a_2 \cdot 3^2$ mit $a_i \in \{0,1,2\}$. Es $g(x) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \leq 4 + 4 + 4 = 12$. Also ist M abgeschlossen gegenüber g. □

Definition 2.7.5. Eine Bahn $[a]$ endet in M, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $g^k(a) \in M$. Das heißt ab einem gewissen k sind allle weiteren Elemente in M. [10]

Beh.: Alle Bahnen enden in M.

Sei $x \in M$. Dann ist die Behauptung schon gezeigt.
Sei $x \notin M$. Also ist $x < 27 = 3^3$. In diesem Fall ist $g(x) < x$. Denn $x = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ und $g(x) = a_0^2 + \cdots + a_n^2 \leq (n+1) \cdot 4$. Es ist daher zu entscheiden wann $4(n+1) \leq 3^n$ ist. Durch Induktion zeigt man, dass die ab $n \geq 3$ richtig ist. □

Aufgaben:

14. Sei (A, α) eine freie einstellige Algebra mit der Basis E. Außerdem sei

$$\beta : A \times A \ni (a,b) \mapsto \begin{cases} (b, \alpha(a)) \text{ falls } b \in E \\ (\alpha(a), \alpha^{-1}(b)) \text{ falls } b \notin E \end{cases}$$

Dann ist $(A \times A, \beta)$ eine freie einstellige Algebra mit $E \times E$ als Basis.

[10] Das spielt bei der Konvergenz von Folgen eine große Rolle

Satz 2.82. *Ist* $(A, 1+)$ *eine Unteralgebra von* $(\mathbb{N}, 1+)$ *und* $A \neq \emptyset$*, dann ist* $(A, 1+)$ *zyklisch.*

A hat ein kleinstes Element a.
Beh.: $A = [a]$.
Angenommen es ist $A \setminus [a] \neq \emptyset$. Sei $b \in A \setminus [a]$. Da $\mathbb{N}$ linear geordnet ist, ist $a \leq b$ oder $b \leq a$. Wäre $a \leq b$, so wäre $b \in [a]$, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Also ist $b \leq a$. Da a das kleinste Element in A war folgt $b = a$. Dies geht wieder nicht. Daher ist $[a] = A$. □

Satz 2.83. *Das surjektive Bild einer einfachen Kette ist ist eine einfache Kette.*

Sei $([a], \alpha)$ eine zyklische Algebra und (B, β) eine weitere einstellige Algebra und $f : [a] \to B$ eine surjektive Abbildung.
Beh.: $[fa] = B$. Sei $b \in B$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $c \in [a]$ mit $f(c) = b$. Es ist $f(c) \in [f(a)]$. Es sei $T = \{c | f(c) \in [f(a)]\} = f^{-1}([f(a)])$. T ist abgeschlossen gegenüber α und $a \in T$. Dahei ist $T = [a]$. Also ist $b = f(c) \in [f(a)]$. Daher ist $B = [f(a)]$. □

Satz 2.84. *Ist* $([a], \alpha)$ *eine zyklische Kette, so ist jede Unterkette zyklisch.*

Es sei $[a] = A$. Es gibt einen Morphismus $f \colon \mathbb{N} \to A$ mit $f(0) = a$. Es ist f surjektiv. Sei $U \subset A$ eine Unteralgebra. Dann ist $f^{-1}(U) \subset \mathbb{N}$ eine Unteralgebra von $(\mathbb{N}, 1+)$. Diese Unteralgebra ist zyklisch. Daher ist $f(f^{-1}(U)) = U$ auch zyklisch.
Hier brauch ich den Rekursionssatz. □

Satz 2.85. *Sei* $f \colon [a] \to [a]$ *ein Morphismus mit* $f(a) = a$*. Dann ist* f *die Identität.*

Zwei Morphismen, die auf einem Erzeugendensystem übereinstimmen sind gleich. (Hier brauche ich nicht den Rekursionssatz) □

Satz 2.86. *Sei* $\alpha : [a] \to [a]$ *surjektiv. Dann ist* α *schon bijektiv und die Umkehrabbildung ist auch ein* α *Morphismus. (Das ist immer der Fall).*

Es gibt ein $b \in [a]$ mit $\alpha(b) = a$. Es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $\Phi(a)\colon \mathbb{N} \to [a]$ mit $\Phi(a)(0) = a$. Es ist $\Phi(a)$ surjektiv. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Phi(a)(n) = b$. Es ist $\Phi(\alpha(c)) = \alpha \circ \Phi(c)$ für alle $c \in [a]$. Zu dem oben gefunden $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Abbildung

$$g : A \ni c \mapsto \Phi(c)(n) \in A.$$

Es ist $g(\alpha(c)) = \Phi(\alpha(c))(n) = (\alpha \circ \Phi(c))(n) = (\alpha \circ g)(c) = \alpha(g(c))$. Also ist g ein Morphismus. Wir haben $(\alpha \circ g)(a) = \alpha(\Phi(a)(n)) = \alpha(b) = a$. Daher ist $\alpha \circ g = Id$. Und da g ein Morphismus ist, ist auch $g \circ \alpha = Id$. Also ist α invertierbar. □

Aufgaben:

15. Sei (A, α) eine Kette und $f\colon A \to A$ ein Morphismus. Dann ist die Menge der Fixpunkte abgeschlossen gegenüber α.
16. Ist (A, α) eine einfache Kette (Siehe **??** Seite**??**) so gilt: Hat f einen Fixpunkt, so ist f die Identität.

Unendliche Mengen in der Mengenlehre In der Mengenlehre hat man eine auf den ersten Blick etwas andere Einstellung zu dem Begriff der unendlichen Menge. Eines der Mengenaxiome besagt:

Ist x eine Menge, so ist $x \cup \{x\}$ auch eine Menge.

Definition 2.7.6. Eine Menge x heißt transitiv genau dann , wenn für alle $t \in x$ gilt: $t \subset x$.

Beispiele:

41. Die leere Menge ist transitiv. Denn $t \in \emptyset \Longrightarrow t \subset \emptyset$. Dies ist richtig auf Grund des „Ex falso quodlibet“. Aus Falschem folgt beliebiges.
42. $\{\emptyset\}$ ist transitiv. Das einzige Elemet aus $\{\emptyset\}$ ist die leere Menge. Diese ist aber Untermenge einer jeden Menge.
43. $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist transitiv. Denn:
    - $\emptyset \in M$ und $\emptyset \subset M$.
    - $\{\emptyset\} \in M$ und $\{\emptyset\} \subset M$, da $\emptyset \in M$.

Hilfssatz. *Ist M eine transitive Menge, so ist $\alpha(M) = M \cup \{M\}$ eine transitive Menge.*

Sei $t \in \alpha(M)$. Dann ist $t \in M$ oder $t = M$.

1. Ist $t \in M$, so ist $t \subset M$, da M transitiv ist.
2. Ist $t = M$, so ist $M = t \subset M$. □

Definition 2.7.7. Eine Menge A heißt induktiv genau dann, wenn

- $\emptyset \in A$
- Ist $y \in A$, so ist $y \cup \{y\} \in A$

Das heißt $\alpha : A \ni y \mapsto y \cup \{y\} \in A$ ist eine Selbstabbildung. Das Paar (A, α) ist eine Kette

Diese Definition steht in dem Buch „Mengenlehre für den Mathematiker“ (Siehe Friedrichsdorf und Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, Seite 20). Nun wird als Axiom gefordert:

(Unendlichkeitsaxiom) *Es gibt eine induktive Menge.*

Es stellt sich heraus, dass dies nichts anderes ist, als die Forderung einer unendlichen Menge im Sinne von Dedekind. Nur ist der Weg dahin denkbar verklausuliert. Um dies zu zeigen verwende ich meine bisherige Bezeichnung. Sei daher A eine induktive Menge.

1. Es gibt kein $a \in A$ mit $\alpha(a) = \emptyset$.

   Denn es ist $\alpha(a) = a \cup \{a\}$. Also ist $a \in \alpha(a)$.

2. Die leere Menge $\emptyset$ erzeugt vermöge α eine Bahn $[\emptyset]$.

3. α ist eingeschränkt auf $[\emptyset]$ injektiv.

   Bew. Seien $x, y \in [\emptyset]$. Jedes Element aus $[\emptyset]$ ist transitiv, da die leere Menge transitiv ist und die Eigenschaft transitiv zu sein unter α erblich ist.

   Sei nun $\alpha(x) = \alpha(y)$. Das heißt es ist $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$.

   a) Ist $x \in \{y\}$ so ist $x = y$. Ist $x \in y$ so ist $x \subset y$. Auf jeden Fall ist $x \subset y$.

b) Genauso erhält man $y \subset x$. Daher ist $x = y$.

Wir haben daher folgendes: $\alpha\colon [\emptyset] \to [\emptyset]$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

Satz 2.87. *Gilt das Unendlichkeitsaxiom, so gibt es eine im Sinne von Dedekind unendliche Menge.*

Der „Beweis“ von Dedekind wurde nicht anerkannt wegen Beckmesserei. Aber die obige sehr umständliche Konstruktion ist natürlich seinem Beweis nachempfunden. Aus seinem Beweis wurde das Unendlichkeitsaxiom heraus destilliert. Einfacher wäre es zu fordern: Es gibt eine Kette (A, α) wobei α injektiv aber nicht surjektiv ist.
In dem Buch von Oliver Deiser (Siehe Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, Seite 427)

Es existiert eine Menge x, die die leere Menge als Element enthält und die mit jedem ihrer Elemente y auch $\{y\}$ enthält.
Formaler: Es gibt eine Menge A mit $\emptyset \in$ und: Ist $x \in A$ so auch $\{x\} \in A$.

In dieser Form stammt das Unendlichkeitsaxiom von Zermelo.
Auch in diesem Falle ist $\alpha : A \to A$ eine injektive Funktion. Die Injektivität ist diesmal trivial. Außerdem ist $\emptyset \notin A$. Also ist α nicht surjektiv. Damit ist A unendlich im Sinne von Dedekind.
In dem Buch von Keith Devlin (Siehe Devlin, *The Joy of Sets*, Seite 42) ist das Unendlichkeitsaxiom genauso formuliert. Das Buch von H.D. Ebbinghaus „Einführung in die Mengenlehre“ (Siehe H.-D.Ebbinghaus, *Einführung in dei Mengenlehre*, Seite 45) verwendet dieselbe Definition wie bei Friedrichsdorf.

Eine Anwendung der Ordnung auf $\mathbb{N}$:

Satz 2.88. *Seien (A, α) und (B, β) zwei Ketten mit bijektiven α, β Dann gilt:*

1. *Ist $f : A \to B$ ein Morphismus bezüglich α, β, so ist f auch ein Morphismus bezüglich den inversen Abbildungen.*

2. *Ist $f : A \to B$ ein Morphismus, so sind $Bi(f)$ und $B \backslash Bi(f)$ abgeschlossen gegenüber α*

1. Es ist $f\alpha = \beta f$. Daher ist $f = \beta f \alpha^{-1}$ Und damit ist $\beta^{-1} f = f \alpha^{-1}$.

2. $f(A)$ ist abgeschlossen gegenüber α. Sei $b \in B \setminus f(A)$. Wäre $\beta(b) \in f(A)$, so wäre $\beta^{-1}(\beta(b)) = b \in f(A)$. Das geht nicht. □

Ist U irgend eine Teilmenge der Kette (A, α), so kann man den Abstand der Elemente $a \in A$ von U durch folgende Funktion $d(U)$ messen.

$$d(U)(a) := \begin{cases} n \text{ falls } n \text{ die kleinste natürliche Zahl ist mit } \alpha^n(a) \in U \\ \infty \text{ falls } [a] \cap U = \emptyset \end{cases} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Es ist $a \in U \iff d(U, a) = 0$.
Wir erklären auf $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung.

$$\gamma(x) := \begin{cases} x - 1 \text{ falls } x > 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \\ \infty \text{ falls } x = \infty \end{cases}$$

Dadurch wird $\overline{\mathbb{N}}$ zu einer Kette. Malt man ein Bild dazu so sieht das beispielsweise so aus

Satz 2.89. *Ist U abgeschlossen in A, so ist $d(U) : A \to \overline{\mathbb{N}}$ ein Morphismus.*

Sei $a \in A$.

1. Gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(n) \in U$ so ist auch $\alpha(a)$ von dem Typ. Daher ist $d(U)(\alpha(a)) = \infty = \gamma(\infty) = \gamma(d(U)(a))$
2. Sei $\alpha^n(a) = \alpha^{n-1}(\alpha(a)) \in U$ mit $n > 0$. Dann ist $d(U)(\alpha(a)) = n - 1 = \gamma(d(U, a))$.
3. Es sei $a \in U$. Dann ist $\alpha(a) \in U$. Also $d(U)(\alpha(a)) = 0 = \gamma(0) = \gamma(d(U(a))$.

Damit ist $d(U)$ ein Morphismus. □

Folgerung 2.90. *Ist $h : B \to A$ ein Epimorphismus von Ketten, so ist h surjektiv als Abbildung.*

Es ist $U := h(B)$ abgeschlossen in A. Sei k_0 der Morphismus, der alles auf $0 \in \overline{\mathbb{N}}$ abbildet. Dann ist $d(U)h = k_0 h$. Da h ein Epimorphismus ist folgt $d(U) = k_0$. Für ein $a \notin U$ ist $d(U)(a) \neq 0$. Also gibt es kein $a \notin U = h(B)$. Daher ist $h(B) = A$. Es ist daher h surjektiv. □

Fragen:

3. Gibt es in der Kategorie der Ketten einen Kogenerator?

2.7.4 Die Diagonalkette

y

Um jedem ganzzahligen Punkt der Ebene eine eindeutige Hausnummer geben, hat Georg Cantor 1878 das folgende Verfahren vorgeschlagen. Der Punkt $(0,0)$

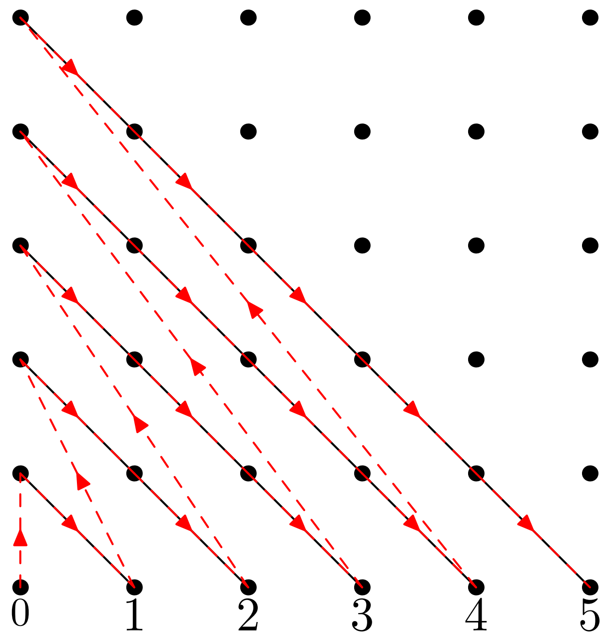


Abb. 2.14: Diagonalverfahren

erhält die Nummer 0. Der Punkt $(0,1)$ die Nummer 1. Dann wendet man sich wieder in Richtung $x-$Achse. $(1,0)$ erhält dei Nummer 2. Jetzt springen wir zu $(0,2) \to (1,1) \to (2,0)$. Gen auer sieht dies so aus:

Definition 10

$$\alpha \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a,b) \mapsto \begin{cases} (0, a+1) & \text{falls } b = 0 \\ (a+1, b-1) & \text{falls } b > 0 \end{cases}$$

Satz 2.91. *Durch α wird $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einer freien Kette mit Basis $(0,0)$*

Es ist $(0,0) \notin \mathrm{Bild}(\alpha)$. Es ist α injektiv. Sei dazu $\alpha(a,b) = \alpha(a',b')$.
1. Fall: $b > 0$. Dann ist $\alpha(a,b) = (a+1, b-1)$. Angenommen in diesem Fall wäre $b' = 0$. Dann ist $\alpha(a',b') = (0, a'+1)$. Dann ist $0 = a+1$. Dies kann nicht sein. Daher ist $b' > 0$. Wir erhalten $\alpha(a',b') = (a'+1, b'-1) = (a+1, b-1)$. Daher ist $(a,b) = (a',b')$.
2. Fall: $b = 0$. Daher ist $\alpha(a,b) = (0, a+1)$. Wäre in diesem Fall $b' > 0$, so wäre $\alpha(a',b') = (a'+1, b'-1)$. Also ist $a'+1 = 0$. Dies kann wieder nicht sein. Daher ist $b' = 0$. Also folgt $(0, a+1) = (0, a'+1)$. Also ist $a = a'$ und $b = b'$. Damit ist α injektiv.
Zu zeigen bleibt: Jedes Paar außer $(0,0)$ ist im Bild von α.
Beh. Jedes Paar der Form $(0,b)$ mit $b > 0$ ist in $\mathrm{Bild}(\alpha)$.
Es ist $(0,1) = \alpha(0,0)$. Sei $(0,k) \in \mathrm{Bild}(\alpha)$. Dann ist $(0, k+1) = \alpha(k, 0) = \alpha^{k+1}(0,k)$. Es folgt: Auch $(0, k+1) \in \mathrm{Bild}(\alpha)$.
Für beliebiges (a,b) mit $a \neq 0$ ergibt sich nun: $(a,b) = \alpha^a(0, a+b)$. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 2.92. *Es gibt genau einen Morphismus von Ketten $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(0,0) = 0$. Dieser Morphismus ist ein Isomorphismus.*

Satz 2.93. *Der Isomorphismus $f \colon (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \alpha) \to (\mathbb{N}, 1+)$ ist die Abbildung, $f(a,b) = \frac{a+b+1}{2} \cdot (a+b) + a$.*

Diese Abbildung stammt von Georg Cantor. Zu zeigen ist, dass sie ein Morphismus ist. Es ist $f(0,0) = 0$. Weiter ist zu zeigen, dass für alle $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt: $f(\alpha(a,b)) = 1 + f(a,b)$.
1. Fall: $b = 0$. $f(\alpha(a,0)) = f(0, a+1) = \frac{a+2}{2} \cdot (a+1) + a$. Und $f(a,0) = \frac{a+1}{2} \cdot a + a$. Es ist

$$\begin{aligned} f(0, a+1) - f(a,0) &= \frac{a+2}{2} \cdot (a+1) - \frac{a+1}{2} \cdot a - a \\ &= \frac{a+1}{2} \cdot [a+2-a] - a \\ &= a+1-a = 1 \end{aligned}$$

2. Fall: $b > 0$. Auch hier rechnet man nach, dass die Differenz 1 ist. □

Aufgaben:

17. Sei $\alpha : \mathbb{N} \ni n \mapsto n+2 \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ni (a,b) \mapsto \begin{cases} (b, \alpha(a)) & \text{falls } b \in \{0,1\} = E \\ (\alpha(a), \alpha^{-1}(b)) & \text{sonst} \end{cases}$)
    a) φ ist eine injektive Funktion.
    b) $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ ist eine Basis von $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \varphi)$.
    c) Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $(2n, 2m)$ in der Bahn von $(0,0)$.
    d) Zeige $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus E = \text{Bild}(\varphi)$.
    e) Es ist $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = [E]$.
18. Verallgemeinere diese Aufgabe mit der Funktion $\alpha : \mathbb{N} \ni x \mapsto x + n \in \mathbb{N}$.
19. Gibt es so etwa auch bei $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$. Etwa: Sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung derart, dass $\mathbb{N}$ als α Kette p dimensional ist. Außerdem sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^q$ bijektiv.

2.8 Andere Kennzeichnung der Unendlichkeit

2.8.1 Nietzsche

> [4]Ein Geschlecht geht, und ein anderes kommt; doch die Erde bleibt ewig bestehen. [5] Die Sonne geht auf, und die Sonne geht unter und eilt an ihren Ort, wo sie aufgeht. [6] Der Wind weht nach Süden, dann wendet er nach Norden; er dreht sich, kehrt um, kommt wieder; so wiederholt der Wind seinen Umlauf, [7] Alle Flüsse laufen ins Meer, doch wird das Meer nicht voll. Zum Ort, wohin die Flüsse gehen, dahin geht ihr Lauf immer wieder. Alle Worte erlahmen. Keiner vermag zu sagen: das Auge werde nicht satt beim Sehen und das Ohr nicht vom Hören voll. [9] Was gewesen, dasselbe vird (wieder) sein, und was geschehen, wird (wieder) geschehen: Nichts Neues gibt es unter der Sonne. [10] Sagt man von etwas: „Sieh, das ist neu“, so war es schon längst zu den Zeiten, die vor uns gewesen. [11] Kein Gedenken bleibt den Früheren; aber auch den Späteren, die kommen, wird kein Gedenken bleiben bei denen, die noch später sind.

So lehrt das Buch der Prediger (Koholet oder Ecclesiastes) im Kapitel 1 ab Vers 4Beuron, *Die Bibel. Die heilige Schrift des alten und neuen Testamentes*, Seite 723. Diese These, dass auf der Welt immer wieder das Gleiche passiert, wurde in der Antike heftig diskutiert. Aber auch in der Neuzeit wurde die Lehre immer wieder aufgegriffen. So schreibt Nietzsche in hohepriesterlichen Ton:

> ICH ERZÄHLE nunmehr die Geschichte des Zarathustra. Die Grundkonzeption des Werks, der Ewige Wiederkunfts-Gedanke, diese höchste Formel Bejahung, die überhaupt erreicht werden kann —, gehört in den August des Jahres 1881: er ist auf ein Blatt hingeworfen, mit der Unterschrift: „6000 Fuß jenseits – ' Mensch und Zeit“. Ich ging an jenem Tage am See Silvaplana durch die Wälder; bei einem mächtigen pyramidal aufgetürmten Block unweit Surlei machte ich halt. Da kam mir dieser Gedanke. — Rechne ich von diesem Tage ein paar Monate zurück, so finde ich, als Vorzeichen, eine plötzliche und im tiefsten entscheidende Veränderung meines Geschmacks, vor allem in der Musik. Man darf vielleicht den ganzen Zarathustra unter die Musik rechnen; —- sicherlich war eine Wiedergeburt in der Kunst zu hören, eine Vorausbedingung dazu. In einem kleinen Gebirgsbade unweit Vicenza, Recoaro, wo ich den Frühling des Jahrs 1881 verbrachte, entdedeckte ich, zusammen mit meinem maästro und Freunde Peter Gast, einem gleichfalls „Wiedergebornen“, daß der Phönix Musik mit leichterem und leuchtenderem Gefieder, als er je gezeigt, an uns vorüberflog. Rechne ich dagegen von jenem Tage an vorwärts, bis zur plötzlichen und unter den unwahrscheinlichsten Verhältnissen eintretenden Niederkunft im Februar 1883 — die Schlusspartie, dieselbe, aus der ich im Vorwort ein paar Sätze zitiert habe, wurde genau in der heiligen Stunde fertig gemacht, in der Richard Wagner in Venedig starb ——- so ergeben sich achtzehn Monate für die Schwangerschaft. Diese Zahl gerade von achtzehn Monaten dürfte den Gedanken nahelegen, unter Buddhisten wenigstens, daß ich im Grunde ein Elefanten—Weibchen bin. — In die Zwischenzeit gehört die „gaya scienza“, die hundert Anzeichen der Nähe von etwas Unvergleichlichem hat; zuletzt gibt sie den Anfang des Zarathustra selbst noch, sie gibt im vorletzten Stück des vierten Buchs den Grundgedanken des Zarathustra. — (Siehe Nietzsche, *Ecce Homo*, Seite 370)

Nietzsche deklamiert hier im Sing Sang eines Hochamtes mit Weihrauch und Glockengeläut. Er schreitet wie ein Bischof mit Mitra einher. Die Gongschläger fehlen nicht,- (wie bei der Wandlung in der katholischen Messe). Er wählt grundsätzlich die feierlichen altertümlichen Worte. „6000 Fuss jenseits von Mensch und Zeit“. Wie alltäglich, langweilig hätte sich angehört. „3 km von Surlei entfernt“. Altertümliches findet der normale Leser weihevoller es geht einen priesterlichen Gang „Andante Majestoso“. Kaum eine Lisa, ein Sepp oder eine Heidi weiß was ein „Fuß“ ist. Er hätte die Geschichte auch anders erzählen können. Zum Beispiel so: Gestern nach dem Mittagessen in dem Gasthaus „zum Ochsen“ spazierte ich zu einem dicken Felsen am Silvaplana. Die Sonne

schien wie gestern, wie voriges Jahr um diese Zeit. Am Fuss des Felsens döste ich. Ich sah, wie Fische immer wieder nach Fliegen schnappten. Ihr Schnappen zeichnete Kreise in die Wasseroberfläche. Die Wellen breiteten sich über den ganzen See aus. Sie prägten ihr kreisförmiges Muster über dem ganzen See ein. Ist es ähnlich mit der Zeit. Hat auch sie einen Rythmus. Was ist der Takt der Zeit?
Ich packte meine Brotzeit: Schweizer Käse mit der gewohnten Verteilung der Löcher. Wie zwei Jahre zuvor verzehrte ich zwei Semmeln. Ich wiederholte Gedanken, die andere vor mir gedacht haben. Wiederholt sich nicht vieles? Wiederholt sich alles??
Aber so wäre es ein Gedanke, den jeder Handwerksbursche, einer der von ihm Verachteten „Viel zu vielen" hätte haben können und auch sicher schon hatte. Aber mit viel Pathos geölt wird auch ein Mäusegdanke zur Weltoffenbarung.
Wie wir am Buch der Prediger gesehen haben. Die ewige Wiederkehr des Gleichen wurde auch in der Antike schon oft diskutiert. Dafür braucht es keine Offenbarung „Gottes" des Weltgeistes an den Jünger des Zaratustras. Auch braucht es keine buddistischen Elefantenweibchen.
Die Frage, ob die These des Predigers richtig ist, hängt eng zusammen mit der Frage: Gibt es unendliche Mengen? Um dies nochmal in klarer Sprache zu erläutern, erinnere ich: $\mathfrak{P}(A)$ sei Menge aller Teilmengen von A, das ist die Potenzmenge von A.

Bemerkung 6 Ist die Welt ein langweiliges Spielzeug in der Hand Gottes. Gott hat sich seinen Fähigkeiten entsprechend einen gigantischen 3D Drucker gebastelt. Den hat er mit einem lustigen einem KI Programm gefüttert mit Fehlern mit eingebauter Idiotie. Diese Maschine zaubert Kasperlfiguren auf die Bühne, die sich vermehren. Dann wieder erschlagen neue Kasperfiguren erzeugen und schließlich die Bühne zerstören.
Hat er in einem öden Augenblick eine Folge von Zuständen, Bildern entworfen, die er nun nacheinander ablaufen lässt. Ist die Welt ein Daumenkino Gottes? Augustinus diskutiert in seinem Werk der Gottesstaat an irgend einer Stelle die Frage. Warum Gott die Welt vor zu einem bestimmten Zeitpunkt geschaffen hat. War ihm langweilig? (Ein Daumenkino könnte auch mit einer Bildbearbeitung hergestellt werden.) □

Satz 2.94 (Unendliche Menge). *Für eine Menge sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist unendlich.*
2. *Es gibt eine streng monoton fallende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(A)$*
3. *$\mathfrak{P}(A)$ enthält eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ ohne kleinstes Element.*

1. $\Longrightarrow$2. $\alpha : A \to A$ sei eine injektive nicht surjektive Funktion und $a \notin \alpha(A)$. Weiter sei $[a]$ die von a erzeugte einstellige Unteralgebra. Ich betrachte die Menge der zyklischen Unteralgebren von $[a]$. Durch

$$\beta : [b] \mapsto [\alpha(b)] = \alpha([b]) \tag{2.9}$$

wird jeder solchen zyklischen Unteralgebra eine echte zyklische Unteralgebra zugeordnet. Nach dem Rekursionssatz gibt es eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \text{Menge der zyklischen Unteralgebren}$$

mit $f(0) = [a]$ und $f(n+1) = \beta(f(n))$. (Dies kann man auch so formulieren: Es gibt eine Funktion $g : [a] \to$ Menge der zyklischen Unteralgebren mit $g(a) = [a]$ und $g(\alpha(x)) = \beta(g(x)))$
Beh.: f ist streng monoton fallend.
Bew: Es sei

$$T = \{t | f(n+t) \subsetneq f(n)\}$$

Es ist $f(n) = [b]$ und $f(n+1) = [\alpha(b)] \subsetneq [b]$. Also ist $1 \in T$. Sei $t \in T$ und $f(n+t) = [b]$. Dann ist $f(n+t+1) = \beta([b]) = [\alpha(b) \subsetneq [b] = f(n+t) \subsetneq f(n)$. Also ist T abgeschlossen gegenüber Nachfolgern. Daher ist $T = \mathbb{N}$. Die Funktion f ist daher echt monoton fallend.
2. $\Longrightarrow$3.: Ist

$$f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(A)$$

echt monoton fallend, dann enthält $\{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$ kein minimales Element.
3. $\Longrightarrow$2. Sei $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(A)$ eine Menge ohne minimales Element. Das bedeutet. Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ ist

$$K(U) = \{V | V \subsetneq U, V \in \mathfrak{U}\} \neq \emptyset.$$

Nach dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Funktion

$$\alpha : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$$

mit $\alpha(U) \in K(U)$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Wir wählen ein beliebiges $U_0 \in \mathfrak{U}$ aus. Nach dem Rekursionssatz gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{U}$, mit $f(0) = U_0$ und $f(n+1) = \alpha(f(n))$. Man zeigt leicht: f ist echt monoton fallend.
2.$\Longrightarrow$1. Da es eine streng monoton fallende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(A)$ gibt, gibt es eine echt absteigende Kette $U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq \dots$. Daher ist $B_0 = U_0 \setminus U_1, B_1 = U_1 \setminus U_2 \dots$ eine Folge von nichtleeren paarweise disjunkten Mengen. Nach dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Folge $x_0, x_1, \dots$ mit $x_i \in B_i$. Die x_i sind daher paarweise verschieden. Wir haben daher eine injektive Funktion $h : \mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in A$. Das heißt A ist unendlich[11]. □

Es ist natürlich auch A unendlich genau dann, wenn es Teilmenge von $\mathfrak{P}(A)$ ohne maximales Element gibt.
Kehren wir noch einmal zurück zu Augustinus. Im Zusammenhang mit der Theorie von der ewigen Wiederkehr des Gleichen verteidigte er die reale Existenz einer unendlichen Menge. Wir verdeutlichen:

2.8.2 Weiter Unendlichkeitskriterien

Definition 2.8.1. (A, α) eine Kette. Die von einem $a \in A$ erzeugte Bahn kehrt nicht wieder, wenn für alle $c \in [a]$ gilt: $c \notin [\alpha(c)]$. Wir sagen a ist azyklisch.

Es gilt:

Satz 2.95. *Für eine Menge A sind äquivalent:*

1. *A ist unendlich.*
2. *Es gibt ein $a \in A$ und ein $\alpha : A \to A$, so dass die von a erzeugte Bahn nicht wiederkehrt.*

Ist A unendlich, dann gibt es ein injektives $\alpha : A \to A$, welches nicht surjektiv ist. Sei $a \notin \alpha(A)$. Wegen dem Hilfsatz 2.5 kehrt die von a erzeugte Bahn nicht wieder.
Ist umgekehrt $\alpha : A \to A$ eine Abbildung und unter dieser Abbildung $[a]$ eine Bahn ohne Wiederkehr, so ist die Menge $\mathfrak{A} = \{[x] | x \in [a]\}$ eine Menge ohne minimales Element. Das heißt wegen Satz 2.94 auf Seite 99 ist A eine unendliche Menge. □

[11] Wir haben also tatsächlich das Auswahlaxiom hier gebraucht

Bemerkung. *Man braucht den vorherigen Satz nicht. Denn nach der Eigenschaft 2. Ist* $\alpha\colon [a] \to [a]$ *injektiv und* $a \notin [\alpha(a)] = \alpha([a])$ *wegen Satz 2.5 Also ist* $[a]$ *unendlich und damit* A*.*

Wir sehen, der Prediger im alten Testament hatte also Unrecht, wenn es eine unendliche Menge gibt. Augustinus hatte dagegen Recht. Er war der Meinung, dass die ewige Wiederkehr des Gleichen unsinnig ist. Jedenfalls kann man der ewigen Wiederkehr ausweichen, wenn es eine unendliche Menge gibt. Dann gibt es ein Modell einer azyklischen Welt.

> Auf jene (die Vertreter der Wiederkehrlehre) aber treffen, wie ich meine, die darauffolgenden Worte zu: „Im Kreise laufen die Gottlosen herum“, nicht als ob ihr Leben in jenen vermeintlichen Kreisläufen sich wiederholen würde, sondern weil schon jetzt ihr Irrtumspfad, das ist, ihre falsche Lehre, sich im Kreise dreht. (Siehe Augustinus, *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*, Seite 81)

Satz 2.96. *Ist* A *eine endliche Menge und* x *beliebig, so ist* $A \cup \{x\}$ *endlich.*

Angenommen es gibt eine injektive Funktion $\alpha : A \cup \{x\} \to A \cup \{x\}$, welche nicht surjektiv ist. Also gibt es ein $a \in A \cup \{x\}$ mit $[a] \cong \mathbb{N}$.
1. Fall: $x \notin [a]$. Dann ist $[a] \subset A$ und daher A unendlich.
2. Fall: $x \in [a]$. Dann ist aber $x \notin [\alpha(x))] \subset A$. Es ist aber auch $[\alpha(x)] \cong \mathbb{N}$. Also ist wieder A unendlich. Dies widerspricht der Voraussetzung. $\square$

Folgerung 2.97. *Sei* $([a], \alpha)$ *eine zyklische Kette. Dann ist für alle* $x \in [a]$ *die Menge* $\overline{[x]} = [a] \setminus [x]$ *endlich.*

Dies ist sicher für $x = a$ richtig, denn dann ist $[a] \setminus [a] = \emptyset$ endlich. Sei

$$T = \{x | \overline{[x]} \text{ ist endlich und } x \in [a]\}$$

Es ist $a \in T$. Sei $x \in T$. Dann ist $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]} \cup \{x\}$ endlich. Also ist $T = [a]$. Dies war zu zeigen. $\square$

Was erreicht worden ist (durch α) ist endlich. Nur die „ das noch nicht Erreichte“ ist eventuell unendlich.

Definition 2.8.2. Wir wollen eine Menge zählbar nennen, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt und eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N} \setminus [n] = \overline{[n]}$, wenn es also eine Bijektion auf einen unteren Abschnitt von $\mathbb{N}$ gibt. Wir sagen jede Bijektion f von A in einen unterern Abschnitt von $\mathbb{N}$ zählt die Menge A. . Die Zahl n heißt Anzahl von A.

Bemerkung 7 Ist eine Menge A zählbar, so ist die Anzahl von A eindeutig bestimmt. $\square$

Seien $f : A \to \mathbb{N} \setminus [n]$ und $g : A \to \mathbb{N} \setminus [m]$ zwei Bijektionen. Angenommen es ist $m \neq n$. Da $\mathbb{N}$ linear geordnet ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n < m$ ist. Also ist $[m] \subsetneq [n]$ und daher $\mathbb{N} \setminus [n] \subsetneq \mathbb{N} \setminus [m]$. Wir betrachten die Abbildung $\iota f g^{-1} : \mathbb{N} \setminus [m] \to \mathbb{N} \setminus [m]$. Es ist eine Injektion, welche nicht surjektiv ist. Dies widerspricht Folgerung 2.97. $\square$

Satz 2.98. *Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie zählbar ist.*

Dies ist vielleicht das Endlichkeitskriterium, welches den meisten Leuten zuerst einfällt. Zu jeder endlichen Menge gehört also die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, die Anzahl der Menge.

Sei A endlich. Dann enthält die Menge der zählbaren Teilmengen von A ein maximales Element U^* und eine bijektive Funktion $f : U^* \to \{0, 1 \ldots, n-1\}$. Beh. $U^* = A$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $a \in A$ aber $a \notin U^*$. Wir betrachten $U_0 := U^* \cup \{a\}$. und die Funktion:

$$f^* : U_0 \ni u \mapsto \begin{cases} f(u) \text{ falls } u \in U^* \\ n \text{ falls } u = a \end{cases} \tag{2.10}$$

Diese Funktion ist bijektiv. Das geht aber nicht, da schon U^* maximal war. Die Umkehrung gilt wegen der Folgerung 2.97 $\square$

Wir haben also folgendes Ergebnis. Die endlichen Mengen sind genau die Mengen, die einem unteren Abschnitt von $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.
Jetzt kann die intuitiv klare Tatsache gezeigt werden, dass jede endliche Menge von natürlichen Zahlen ein größtes Element hat:

Definition 2.8.3. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ heißt beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m \in M$ gilt: $m \leq c$.

Satz 2.99. *Für eine nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Die Teilmenge M ist beschränkt.*
2. *M ist endlich.*

3. *M hat ein größtes Element.*

1. $\Longrightarrow$2. Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, die beschränkt ist, so gibt es ein $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $a \in M$ gilt: $a \leq b$. Es ist daher $M \subset \mathbb{N} \setminus [b+1]$. Dies ist ein endliche Menge. Daher ist die Teilmenge M endlich.
2. $\Longrightarrow$3.: Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, so ist wegen der linearen Ordnung von $\mathbb{N}$ jeds Maximale Element schon ein größtes. Ich muss daher nur zeigen, dass es in M ein maximales Element gibt. Zu
$a \in M$ sei

$$G(a) := \{x | a < x \text{ und } x \in M\}$$

Unter diesen Mengen gibt es eine minimale etwa $G(m)$.
Beh. m ist ein maximales Element in M.
Bew.: Sei $a \in M$. Angenommen es ist $m < a$. Dann ist $G(a) \subset G(m)$ und daher ist $G(m) = G(a)$. Aber nach Voraussetzung ist $a \in G(m)$ und nicht in $G(a)$. Dies ist ein Widerspruch. Daher ist $a \leq m$ und m ist maximal. Hierbei wurde das Auswahlaxiom verwendet.
3. $\Longrightarrow$1. Dies ist klar.

Jetzt ist einfach:

Satz 2.100. *Die Vereinigung zweier endlicher Mengen A, B ist endlich. Sind A und B elementfremd, so ist*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Dabei ist $|A|$ die Anzahl von A

Zähle $f : A \to \{0, \ldots, a-1\}$ die Menge A und $g : B \to \{0, \ldots, b-1\}$ zähle die Menge B. Sind A, B elementfremd, so zählt die Funktion

$$h : A \cup B \ni x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in A \\ g(x) + a \text{ falls } x \in B \end{cases}$$

die Menge $A \cup B$. Also ist die Vereinigung zweier elementfremder Mengen endlicher Mengen endlich. Da die Vereinigung epimorphes Bild der elementfremder Vereinigung ist, ist auch die Vereinigung von endlichen Mengen endlich. □

2.9 Besondere Eigenschaften von

2.9.1 Monomorphismen, Epimorphismen

Ein Morphismus $B \xrightarrow{f} C$ in einer Kategorie heißt Monomorphismus, wenn für alle $A \xrightarrow{\alpha} B, A \xrightarrow{\beta} B$ mit $f\alpha = f\beta$ folgt: $\alpha = \beta$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $A \in \overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$ die Abbildung $[A, B] \ni \alpha \mapsto f \circ \alpha \in [A, C]$ injektiv ist.

Satz 2.101. *In der Kategorie der Ketten ist jeder Monomorphismus eine injektive Abbildung.*

Sei $A \xrightarrow{f} B$ ein Monomorphismus. Ich will zeigen, dass f eine injektive Abbildung ist. Sei $f(x) = f(y)$. Nach dem Rekursionsatz gibt es genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{g} A$ mit $g(0) = x$. Und es gibt genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{h} A$ mit $h(0) = y$. Also ist $f(x) = f(g(0)) = f(y) = f(h(0))$. Nach dem Rekursionssatz gibt es nur einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{k} B$ mit $k(0) = f(x) = f(y)$. Daher ist $f \circ g = f \circ h$. Da f monomorph ist, folgt $g = h$. Daher ist $g(0) = x = y = h(0)$.□

Es wurde wesentlich der Rekursionssatz verwendet.
Fragen:

4. Gilt auch die Umkehrung des Satzes? Ist in $\overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$ jeder Monomorphismus eine injektive Abbildung, so gilt der Rekursionssatz.

In der Folgerung 2.24 wurde gezeigt, dass jeder Epimorphismus von Ketten als Abbildung surjektiv ist.

2.10 Struktur freier Ketten

Satz 2.102. *Jede Unterkette einer freien Kette ist frei.*

Zunächst für $(\mathbb{N}, 1+)$ selber: Es sei $U \hookrightarrow \mathbb{N}$ eine Unterkette von $\mathbb{N}$. Sie ist von einem Element erzeugt wegen 2.77. Also ist $U = [u]$. Es ist $[u]$ frei.
Sei jetzt A eine freie Kette mit der Strukturabbildung $\alpha\colon A \to A$. Es sei E die Basis von A. Dann ist $A = \bigsqcup [e]$. Jedes $[e]$ ist wohlgeordnet, weil es isomorph zu $\mathbb{N}$ ist. Also gibt es zu jedem e ein kleinstes Element $f(e)$ mit $[f(e)] = U \cap [e]$.
Beh: $U = \bigsqcup_{e \in E} [f(e)]$. Sei $u \in U$. Dann gibt es ein $e \in E$ mit $u \in [e]$. Das heißt $u \in [f(e)]$. Also ist $U \hookrightarrow \bigsqcup_{e \in E} [f(e)]$. Die umgekehrte Inklusion gilt sowieso. □

2.11 Projektive Ketten

Definition 11 Eine Kette (P, π) heißt projektiv , wenn für alle epimorphen Morphismen $f\colon A \to B$ die Abbildung $[P, f]\colon [P, A,] \to [P, B]$ surjektiv ist. □

Satz 2.103. *Jede freie Kette ist auch projektiv. Das heißt: Ist $f : B \to C$ ein surjektiver Homomorphismus zwischen einstelligen Algebren und $g : A \to C$ auch ein Homomorphismus, so gibt es ein $g^* : A \to B$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g^*"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Sei (A, α) eine freie Kette mit der Basis $(a_i|i \in I)$. Wir betrachten die Familie $(g(a_i)|i \in I) \subset C$. Zu dieser Familie gibt es nach dem Auswahlaxiom eine Familie $(b_i|i \in I)$ mit $f(b_i) = g(a_i)$ für alle $i \in I$. Wir erklären $g'(a_i) := b_i$. Nach dem Rekursionssatz gibt es einen eindeutigen bestimmten Morphismus $g^* : A \to B$ mit $g^*(a_i) = b_i$. Damit ist $f \circ g^*(a_i) = g(a_i)$ und damit $f \circ g^* = g$. Dies war zu zeigen. □

Satz 2.104. *Das Koprodukt projektiver Ketten ist projektiv.*

Sei $(P_i|i \in I)$ eine Familie projektiver Ketten und $P = \coprod_{i \in I} P_i$ das Koprodukt. Sei $f\colon A \to B$ ein Epimorphismus. Also ist f surjektiv als Abbildung. Sei $h\colon P \to B$ ein Morphismus.. Zu jedem $hq_i\colon P_i \to B$ gibt es jeweils $h_i : P_i \to A$ mit $fh_i = hq_i$. Zu dieser Familie der $(h_i|i \in I)$ gibt es genau einen Morphismus $h^*\colon P \to A$ mit $h_i = h^* q_i$ für alle $i \in I$. Daher ist $fh^* = h$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Satz 2.105. *Jede projektive Kette ist Schnitt einer freien Kette.*

Es gibt eine freie Kette F und einen Epimorphismus $F \to P$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "1_P"] \\ F \arrow[r, "f"'] & P \end{tikzcd}$$

Es gibt ein $g\colon P \to F$ mit $fg = 1_P$. □

Satz 2.106. *Jeder Schnitt einer projektiven Kette ist selber projektiv.*

Folgerung 2.107. *Für eine Kette sind äquivalent:*

1. *P ist frei.*
2. *P ist projektiv.*
3. *P ist Schnitt einer freien Kette.*

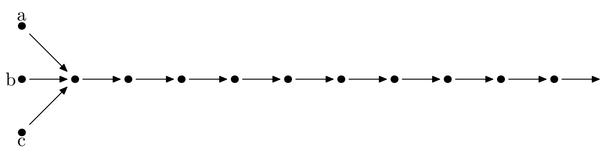
Einfach.
Aufgaben:

20. Betrachte die folgende Kette (A, α) mit zwei Anfängen:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & \\ & 1 \arrow[d] & & \\ 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

    a) Zeige. Es gibt genau einen Morphismus $f : (\mathbb{N}, 2+) \to A$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 2$.
    b) Berechne die Äquivalenzklassen dieses Morphismus.
    c) Zeige. Jede Kette mit zwei Anfängen ist epimorphes Bild von $(\mathbb{N}, 2+)$.

21. Betrachte folgende Kette mit den drei Anfängen a,b,c.



Nach rechts habe die Kette kein Ende.

    a) Zeige. Sie ist epimorphes Bild von $(\mathbb{N}, 3+)$.
    b) Berechne die Äquivalenzklassen diese Morphismus.
    c) Zeige: Jede Kette mit drei Anfängen ist epimorphes Bild von $(\mathbb{N}, 3+)$.

22. Gegeben sei die Menge $A = \{0, 1, , 2, \dots, 11\}$ und $\alpha(x) := (2 \cdot x + 1) \bmod 12$.
    a) Erstelle ein inneres Diagramm der Kette (A, α).
    b) Wieviel Morphismen $A \to A$ gibt es?

2.12 Ketten mit bijektiver Strukturabbildung

> Die Mathematik kommt also durch „Konstruktionen" vorwärts, sie „konstruiert" immer verwickeltere Kombinationen. Indem sie dann durch die Analyse dieser Kombinationen, die man als selbständige Gesamtheiten bezeichnen könnte, zu ihren ursprünglichen Elementen zurückkehrt, wird sie sich der gegenseitigen Beziehungen dieser Elemente bewusst und leitet daraus die Beziehungen zwischen diesen Gesamtheiten selbst ab. Das ist ein rein analytisches Vorgehen, aber nicht ein Vorgehen vom Allgemeinen zum Besonderen, denn die Gesamtheiten können ,offenbar nicht so angesehen werden, als wären sie von speziellerer Natur wie ihre Elemente.
>
> Man hat mit Recht diesem Prozesse der Konstruktion eine große Wichtigkeit beigelegt, und man hat darin die notwendige und hinreichende Bedingung für die Fortschritte der exakten Wissenschaften erkennen wollen.
>
> Notwendig? ohne Zweifel; aber hinreichend? nein!
>
> Damit eine Konstruktion nützlich sein kann, damit sie nicht nur eine überflüssige Anstrengung des Verstandes darstellt, damit sie jedem als Sprungbrett dienen kann, der sich höher erheben will, muss sie vor allem eine Art Einheit besitzen, welche erlaubt, darin etwas anderes zu sehen als die bloße Anhäufung von Elementen.
>
> Oder genauer: man muß einen Vorteil darin erkennen, dass man lieber die Konstruktion als die einzelnen Elemente betrachtet.
>
> Welcher Art kann dieser Vorteil sein? ...(Siehe Poincaré, *Wissenschaft und Hypothese*, Seite 15/16

Ich will mich mit Ketten mit surjektiver Strukturabbildung beschäftigen. Dazu konstruieren - oder entdecken wir- wir zunächst ein wichtiges Beispiel. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Lassen wir uns von der folgenden Vorstellung leiten. Um das Vermögen einer Person zu beschreiben sind eigentlich zwei Zahlen notwendig sein Guthaben und seine Schulden. Tatsächlich hat einer ein Guthaben oder Schulden. verschaffen uns zwei Kopien von $(\mathbb{N}, 1+)$. $\mathbb{N}^- := \{(0, n)|1 \leq n\}$ und $\mathbb{N}^+ := \{(n, 0)|n \in \mathbb{N}\}$ und setzten. [12]

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}^- \cup \mathbb{N}^+ \tag{2.11}$$

[12] Dies ist allgemeiner zu formulieren. Sei (A, α) eine freie zyklische Kette. Die kann eingebettet werden in eine Kette mit bijektivem α durch Umkehrung der Pfeile und dranhängen an die 0

Das ist eigentlich etwas ganz einfaches. Wir drehen die Pfeile von $\mathbb{N}$ um und hängen dieses umgedrehte $\mathbb{N}$ an die 0. Wir erhalten eine Kette, die keinen Anfang und kein Ende hat.
Auf $\mathbb{Z}$ muss noch die Strukturabbildung erklärt werden.

$$\alpha : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} (0, n-1) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^- \\ (n+1, 0) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \tag{2.12}$$

Es gilt:

Satz 2.108. *Die Abbildung $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist bijektiv.*

Zunächst ist α injektiv. Sei $\alpha(z_1) = \alpha(z_2)$. Sind z_1, z_2 beide aus $\mathbb{N}^-$, so ist $z_1 = (0, n_1)$ und $z_2 = (0, n_2)$ mit $n_1 \geq 1$ und $n_2 \geq 1$. Daher ist $\alpha(z_1) = (0, n_1 - 1) = \alpha(z_2) = (0, n_2 - 1)$ und daher $z_1 = z_2$. Ist $z_1 = (0, n_1) \in \mathbb{N}^-$ und $z_2 = (n_2, 0) \in \mathbb{N}^+$, so ist auf jeden Fall $\alpha(z_1) = (0, n_1 - 1) \neq (n_2 + 1, 0) = \alpha(z_2)$. Sind z_1, z_2 beide aus $\mathbb{N}^+$ so muss $z_1 = z_2$ sein.
Bleibt zu zeigen, dass α surjektiv ist. Ist $z = (0, n) \in \mathbb{N}^-$ so ist $z = \alpha((0, n+1))$. Ist $z = (n, 0)$ mit $n \geq 1$, so ist $z = \alpha((n-1), 0)$, Ist $z = (0, 0)$, so ist $z = (\alpha(0, 1))$. Also ist α surjektiv.

Satz 2.109. *Ist $\emptyset \neq U \subset \mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber α und α^{-1}, so ist $U = \mathbb{Z}$.*

1. Fall: $(0, 0) \in \mathbb{Z}$. Da U abgeschlossen gegenüber α ist, ist $\mathbb{N}^+ \subset U$. Genauso ist, da U abgeschlossen gegenüber α^{-1} ist $\mathbb{N}^- \subset U$. Also ist $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \mathbb{N}^+ \subset U$.
2. Fall: Ist $(0, 0) \notin U$, so ist $(0, 0) \in \mathbb{Z} \backslash U$. Diese Menge kann nicht abgeschlossen gegenüber α und α^{-1} sein, sonst wäre sie gleich $\mathbb{Z}$. Dies widerspräche $U \neq \emptyset$. Also gibt es ein $c \in \mathbb{Z} \setminus U$ mit $\alpha(c)$ oder $\alpha^{-1} \in U$. Es ist $c = \alpha(\alpha^{-1}(c)) = \alpha^{-1})\alpha(c)$. Dies widerspricht der Voraussetzung. □

Satz 2.110. *Seien (A, α) und (B, β) zwei Ketten mit bijektiven Strukturabbildungen. Dann ist jeder Morphismus $f \colon (A, \alpha) \to (B, \beta)$ ein Morphismus bezüglich der Umkehrabbildungen.*

Sei $f \colon (A, \alpha) \to (B, \beta)$ ein Morphismus. Das heißt

$$\begin{aligned} f \circ \alpha &= \beta \circ f \\ \beta^{-1} \circ f \circ \alpha &= f \\ \beta^{-1} \circ f &= f \circ \alpha^{-1} \end{aligned}$$

Satz 2.111. *Für eine Kette (B, β) sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *(B, β) ist eine Kette mit bijektivem β.*

2. *Zu jedem $b \in B$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon \mathbb{Z} \to B$ mit $f(0) = b$*

1. $\Longrightarrow$2. Sei γ die Umkehrabbildung von β Es gibt genau einen Morphismus $f\colon \mathbb{N}^+ \to B$ mit $f(0) = b$. Auf $\mathbb{N}^+$ gilt also $f \circ \alpha = \beta \circ f$.
Genauso gibt es einen Morphismus $g\colon \mathbb{N}^- \to B$ mit $g \circ \alpha^{-1} = \gamma g$ und $g(0) = 0 = f(0)$. Daher ist die Funktion

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^+ \\ g(z) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^- \end{cases}$$

wohldefiniert. f^* ist auch ein Morphismus. Für $z \in \mathbb{N}^+$ ist das klar. Sei $z \in \mathbb{N}^- \setminus \{0\}$. Also ist $\alpha(z) \in \mathbb{N}^-$. Es folgt $f^*(\alpha(z)) = g(\alpha(z)) = \beta \circ \gamma \circ g(\alpha(z)) = \beta \circ g(\alpha^{-1}\alpha(z)) = \beta \circ g(z)$. Also folgt die Behauptung. Es gibt auch nur einen solchen Morphismus.
Sei dazu ein Morphismus $h\colon \mathbb{Z} \to B$ gegeben mit $h(0) = f^*(0) = b$.

$$T := \{z | f^*(z) = h(z), z \in \mathbb{Z}\}$$

Ist gegenüber α und α^{-1} abgeschlossen und daher ist $T = \mathbb{Z}$. Also ist $f^* = h$.
2. $\Longrightarrow$1.: Sei $b \in B$. Dann gibt es einen Morphismus $f : \mathbb{Z} \to B$ mit $f(0) = b$. Dann hat man: $\beta(f(-1))) = f(1 + (-1))) = f(0) = b$. Daher ist β surjektiv.
Zu zeigen bleibt, dass β injektiv ist. Sei $\beta(x) = \beta(y)$. Es gibt einen Morphismus f mit $f(0) = x$ und einen Morphismus $g\colon \mathbb{Z} \to B$ mit $g(0) = y$. Daher ist $\beta(x) = \beta \circ f(0) = f(\alpha(0)) = g(\alpha(0))$. Daher ist $f \circ \alpha = g \circ \alpha$. Das α surjektiv ist, ist $f = g$. Daher ist $x = f(0) = g(0) = y$. Daher ist β injektiv. $\square$

Satz 2.112. *Sei (B, β) eine Kette mit bijektivem β. Dann gibt es zu jedem Morphismus $f\colon \mathbb{N} \to Q$ genau einen Morphismus $f^*\colon \mathbb{Z} \to Q$ mit $f^*\iota = f$. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "f^*"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Sei $f\colon \mathbb{N} \to Q$. Es sei $q = f(0)$. Nach dem Satz 2.111 gibt es genau einen Morphismus $f^*\colon \mathbb{Z} \to B$ mit $g(0) = f(0)$. Schränkt man g auf $\mathbb{N}$ ein, so ergibt sich die Behauptung. Die Umkehrung gilt auch. □

Sei (A, α) eine Kette mit bijektivem α. Wir betrachten die Menge der Morphismen von $\mathbb{Z}$ nach A bezeichnen diese Menge mit $[\mathbb{Z}, A]$. Diese Menge wird durch die Abbildungen:

$$\alpha^*\colon [\mathbb{Z}, A] \ni f \mapsto \alpha \circ f \in [\mathbb{Z}, A]$$
$$(\alpha^{-1})^*\colon [\mathbb{Z}, A] \ni f \mapsto \alpha^{-1} \circ f \in [\mathbb{Z}, A]$$

jeweils zu einer Kette.
Beh.: α^* ist invertierbar und es ist $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$.
Der Beweis sie Übung. Ist $\alpha\colon A \to A$ invertierbar, so ist jedes Element aus der Bahn von α^* invertierbar.

Satz 2.113. *Die Zuordnung*

$$\Phi(A)\colon A \ni a \mapsto \Phi(a) \in [\mathbb{Z}, A]$$

wobei $\Phi(a)$ der einzige Morphismus mit $\Phi(a)(0) = a$ ist, ist ein funktorieller Morphismus. Dieser Morphismus hat die zusätzliche Eigenschaft: $\Phi \circ \alpha = \alpha^* \circ \Phi$. Das heißt Φ ist für alle Ketten ein Morphismus.

[13]

Es sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus zwischen A und B. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & B \arrow[d, "\Phi(B)"] \\
{[\mathbb{Z}, A]} \arrow[r, "{[\mathbb{Z}, f]}"'] & {[\mathbb{Z}, B]}
\end{tikzcd}$$

Wir müssen zeigen $[\mathbb{Z}, f] \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ f$. Sei dazu $a \in A$. Also ist zu zeigen:

$$([\mathbb{Z}, f] \circ \Phi(A))(a) = [\mathbb{Z}, f](\Phi(A))(a) = f \circ (\Phi(A)(a)) \overset{!}{=} (\Phi(B) \circ f)(a) = \Phi(B)(f(a)).$$

[13] Das hat was mit darstellbaren Funktoren zu tun! Dies muss ich studieren

Um das einzusehen wende man beide Seiten (beim Ausrufezteichen auf 0 an. Beide Seiten sind Morphismen $\mathbb{Z} \to B$. Es ist $f \circ (\Phi(A)(a))(0) = f((\Phi(A)(a)(0))) = f(a)$. Also ist $f \circ \Phi(A)(a)$ der einzige Morphismus $\mathbb{Z} \to B$ mit dem Funktionswert $f(a)$. Auch $(\Phi(B)(f(a))(0)$ ist $f(a)$. Daher sind beide gleich. Das Diagramm ist daher kommutativ.
Es bleibt zu zeigen, dass dies ein Isomorphismus ist.
Betrachten wir

$$\Psi(A)\colon [\mathbb{Z}, A] \ni \gamma \mapsto \gamma(0) \in A \text{ die Auswertungsabbildung}$$

Dann hat man, wenn wir Φ für $\Phi(A)$ schreiben: $(\Phi \circ \Psi)(\gamma) = \Phi(\psi(\gamma)) = \Phi(\gamma(0))$. Dies ist der einzige Morphiusmus $h\colon \mathbb{Z} \to A$ mit $h(0) = \gamma(0)$. Daher ist $h = \gamma$. Also ist $\Phi \circ \psi = Id_{[\mathbb{Z},A}$.
Außerdem ist

$$(\psi \circ \Phi)(a) = \Psi(\Phi(a)) = \Phi(a)(0) = a.$$

Also ist $\Psi \circ \Phi = Id$. Daher ist dies ein funktorieller Isomorphismus.

Bemerkung 8 $[A, A]$ kann durch $\alpha^*\colon [A, A] \ni f \mapsto \alpha \circ f \in [A, A]$ gemacht werden. In diesem Sinne sind Φ und Ψ Morphismen. □

Es ist $\Phi(\alpha(a))$ = eindeutig bestimmter Morphismus mit $\Phi(\alpha(a))(0) = \alpha(a)$. Und $\alpha^*(\Phi(a)) = \alpha \circ \Phi(a)$ ist auch ein Morphismus. Es ist $\alpha \circ \Phi(a)(0) = \alpha(\Phi(a)(0)) = \alpha(a)$. Daher ist $\Phi(\alpha(a)) = \alpha^*(\Phi(a))$. Und damit $\Phi \circ \alpha = \alpha^* \circ \Phi$. Also ist Φ ein Morphismus und damit die Umkehrabbildung Ψ. □

Definition 12 Wir erklären auf $\mathbb{Z}$ eine Verknüpfung:

$$a + b := \Phi(a)(b) \tag{2.13}$$

Satz 2.114 (Kommutative Gruppe). *Es gilt:*

1. $0 + z = z + 0 = z$ *für alle* $z \in \mathbb{Z}$.
2. $\alpha(a + b) = \alpha(a) + b = a + \alpha(b)$ *für alle* $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. $a + b = b + a$ *für alle* $a, b \in \mathbb{Z}$.

4. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

5. Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ *gibt es ein eindeutig bestimmtes* $-a$ *mit* $a + (-a) = 0$ *und* $(-a) + a = 0$.

1. $0 + z == \Phi(0)(z) = z$, für alle $z \in \mathbb{Z}$, da $\Phi(0)$ die Identität auf $\mathbb{Z}$ ist. $z + 0 = \Phi(z)(0) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, da $\Phi(z)$ da $\Phi(z)(0) = z$ ist. Also ist für alle $z \in \mathbb{Z}$: $0 + z = z + 0$.

2. Es ist $\alpha(a)+b = \Phi(\alpha(a))(b) = (\alpha\circ\Phi(a))(b) = (\Phi(a)\circ\alpha)(b) = \Phi(a)(\alpha(b)) = a+\alpha(b)$, weil $\Phi(a)$ ein Morphismus ist. Außerdem ist $\alpha(a+b) = \alpha(\Phi(a)(b)) = \Phi(a))(\alpha(b)) = a + \alpha(b)$.

3. Betrachte den Morphismus $f_b \colon \mathbb{Z} \ni z + b \in \mathbb{Z}$ für ein $b \in \mathbb{Z}$. Es ist $f_b(0) = b$. Also ist $f_b = \Phi(b)$. Also ist für alle $a \in \mathbb{Z}$: $f_b(a) = \Phi(b)(a) = b + a$. Also insbesondere ist $a + b = f_b(a) = b + a$.

4. Die Abbildung $f \colon \mathbb{Z} \ni z \to (a + b) + z \in \mathbb{Z})$ ist ein Morphismus mit $f(z) = a + b$. Genauso ist $g \colon \mathbb{Z} \ni z \to a + (b + z) \in \mathbb{Z}$ ein Morphismus mit $g(0) = a + b$. Also ist $f(c) = g(c)$ für alle $c \in \mathbb{Z}$.

5. Sei $T = \{a \in \mathbb{Z}| \text{ es gibt } -a \in \mathbb{Z} \text{ mit } a + (-a) = 0\}$. Es ist $0 \in T$. Sei $a \in T$. Das heißt es gibt $(-a) \in \mathbb{Z}$ mit $a + (-a) = 0$. Wir erhalten $\alpha(a) + \alpha^{-1}(-a) = a + \alpha \circ \alpha^{-1}(a) = a + (-1) = 0$. Daher ist die Menge der invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}$ gegenüber α abgeschlossen. Daher ist T auch gegenüber α^{-1} angeschlossen. Daher ist $T = \mathbb{Z}$.

Fassen wir zusammen, so heißt dies. $\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe. Und zwar eine ganz besondere:

Satz 2.115. *Ist* $(A, +)$ *eine abelsche Gruppe, so gibt es zu jedem* $a \in A$ *genau einen Homomorphismus* $\mathbb{Z} \to A$ *mit* $f(1) = a$.

Die Abbildung $a+ \colon A \ni x \mapsto a + x \in A$ ist invertierbar. Also gibt es zu genau einen Morphismus $f \colon \mathbb{Z} \to A$ mit $f(0) = 0$. Dann ist $f(1) = f(1+0) = a+0 = a$.
Beh.: f ist ein Homomorphismus.
Beweis: $a+$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $x \mapsto (-a) + x$. Es ist für $z \in \mathbb{Z} : f(z) = f(z + (-1) + (1)) = a + f(z + (-1))$. Daher ist $f(z) + (-1)) = (-a) + f(z)$. Sei

$$T := \{y|f(y + z) = f(y) + f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{Z}\}$$

T ist gegenüber $(1+)$ abgeschlossen. Sei $y \in T$ und $z \in \mathbb{Z}$ beliebig. Es folgt: $f((1+y)+z) = f(y+(1+z)) = f(y)+f(1+z) = f(y)+a+f(z) = f(1+y)+f(z)$. Also ist T gegenüber $1+$ abgeschlossen.
Außerdem ist T gegenüber dem Morphismus $x \mapsto x + (-1)$ abgeschlossen. Das zeigt man genauso. Also ist f ein Homomorphismus. Auch ist es der einzige wie man nachrechnet. □

Ich bezeichne mit $M(a) :=$ einziger Homomorphismus $\mathbb{Z} \to A$ mit $M(a)(1) = a$. Es ist $M(0)$ die Nullabbildung. $Hom(\mathbb{Z}, A)$ ist selber eine abelsche Gruppe. Die Abbildung $A \ni a \mapsto M(a) \in Hom(\mathbb{Z}, A)$ ist ein Homomorphismus.

Satz 2.116. *Die Familie der Abbildungen $\{M(A)|A$ abelsche Gruppe $\}$ ist ein funktorieller Isomorphismus.*

Wie üblich. □

Der Satz2.111 lässt sich in eingeschränktem Sinne ausdehnen auf Ketten mit surjektiver Strukturabbildung.

Satz 2.117 (Ketten ohne Anfang). *Für eine Kette (B, β) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *β ist surjektiv.*
2. *Zu jedem $b \in B$ gibt es einen Morphismus $f : \mathbb{Z} \to B$ mit $f(0) = b$.*

1.⇒ 2.: Da β surjektiv ist, gibt es ein $\gamma : B \to B$ mit $\beta \circ \gamma = 1_B$. Hierbei wird das Auswahlaxiom benutzt. Zu einem $b \in B$ gibt es einen Morphismus $(\mathbb{N}, 1+) \to (B, \beta)$ mit $f(0) = b$. Genauso gibt es einen Morphismus $f_2 : \mathbb{N}^- \cup \{(0,0)\} \to (B, \gamma)$ mit $f_{2(0,0)} = b$.

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} f_1(z) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^+ \\ f_2(z) \text{ sonst.} \end{cases}$$

f ist wohldefiniert, da das einzige gemeinsame Element $(0,0)$ ist. Dort haben f_1 und f_2 den gleichen Funktionswert.
Beh.: f ist ein Morphismus.

1. $z = (n, 0)$. Dann ist $\alpha(z) = (n+1, 0)$. Infolgedessen ist $f(\alpha(z)) = f_1((1+n, 0)) = \beta(f_1)(z) = \beta(f(z))$.

2. Ist $z = (0, n)$ mit $n \geq 1$, so ist $\alpha(z) = (0, n-1)$. Daher ist $f(\alpha(z)) = f_2((0, n-1)) = \beta \circ \gamma(f_2((0, n-1)) = \beta f_2(\alpha^{-1}(0, n-1)) = \beta f_2((0, n)) = \beta(f(z))$. Daher ist f ein Morphismus.

   Dieser Morphismus hängt von der Wahl von γ ab. Da γ nicht eindeutig bestimmt ist, ist auch f nicht eindeutig bestimmt.

2. $\Longrightarrow$1.: Sei $b \in B$. Dann gibt es einen Morphismus $f : \mathbb{Z} \to B$ mit $f(0) = b$. Dann hat man: $\beta(f(-1))) = f(1 + (-1))) = f(0) = b$. Daher ist β surjektiv.$\square$

Noch einmal betone ich: Der existierende Morphismus ist keineswegs eindeutig bestimmt, weil das γ mit $\beta \circ \gamma = 1_B$ nicht eindeutig bestimmt ist. [14]

Bemerkung. *Nicht unbedingt an diese Stelle passend: Aber für Glaube in Mathematik und Religion genau richtig: Er ist zitiert nach Rudy Rucker (Siehe Rucker,* Die Ufer der Unendlichkeit*, Seite 122) So war es beispielsweise bei den komplexen Zahlen. Man gebrauchte sie auf geheimnisvolle ja geheimmnistuerische Weise. Keiner verstand so richtig die Existenz dieser Zahlen. Durch den ständigen Gebrauch wurden sie vertraut. Man verkehrte mit ihnen freundschaftlich. Und siehe da kaum waren sie Freunde wurde auch ihre Existenz selbstverständlich!*

Definition 2.12.1. Sei (A, α) eine Kette. $U \hookrightarrow A$ eine Unterkette. Dann heißt $H(U) = \{a | a \in A$ und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n \in U\}$ Herkunft von U[15].

Es ist:

1. $H(\emptyset) = \emptyset$.
2. $H(A) = A$.
3. Für $U \hookrightarrow \mathbb{N}$ ist $H(U) = \mathbb{N}$
4. Es ist für jedes abgeschlossene U auch $A \setminus H(U)$ abgeschlossen.

[14] Der Beweis kann auch mit dem zornschen Lemma geführt werden.

[15] Das Wort Herkunft erstaunt vielleicht. Wieso sollen zum Beispiel Zahlen eine Herkunft haben? Aber auch Dedekind braucht eine Sprache in diesem Sinne. So schreibt er „Dass aber die Zahl 4 Kind der Zahl 3 und die Mutter der Zahl 5 ist, wird Jedem stets gegenwärtig bleiben.“ Siehe Fricke, Noether und Ore, *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke Bd. 3*, Seite 490

5. Ist die nichtleere Menge $U \hookrightarrow A$ abgeschlossen, so ist $H(U)$ abgeschlossen gegenüber α

6. Sei $U_k := \{a|\alpha^k(a) \in U\}$, dann ist $H(U) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$.

Die Beweis sind sehr einfach. Zu 4. Sei $a \in A \setminus H(U)$. Wäre $\alpha(a) \in H(U)$, so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n(\alpha(a)) \in U$. Also ist $\alpha^{n+1}(a) \in U$. Das heißt $a \in H(U)$.

Satz 2.118. *Sind U, V zwei abgeschlossene Mengen mit $U \cap V = \emptyset$, so ist $H(U) \cap H(V) = \emptyset$*

Angenommen es gäbe ein $a \in H(U) \cap H(V)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n \in U$ und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^m \in V$. Da U und V abgeschlossen in A sind ist $\alpha^m\alpha^n(a) \in U \cap V = \emptyset$. Das kann nicht sein. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Definition 2.12.2. Sei (A, α) eine Kette. $U \hookrightarrow A$ eine Unterkette und $f : U \to B$ ein Morphismus in die Kette (B, β). f lässt sich auf A hochziehen genau dann, wenn es einen Morphismus $f^*\colon A \to B$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[dl, dotted] \\ B & \end{tikzcd}$$

Satz 2.119. *Sei (Q, γ) eine Kette. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

1. *Die Strukturabbildung γ von (Q, γ) ist surjektiv.*

2. *Zu jeder Kette (A, γ), jedem $U \hookrightarrow A$ und jedem $f\colon U \to Q$ gibt es ein $f^*\colon H(U) \to Q$ mit $f^* \circ \iota = f^*$. Dabei ist $\iota\colon U \to A$ die Inklusionsabbildung.*

3. *Zu jeder Unterkette $[n] \hookrightarrow \mathbb{N}$ und jedem $f\colon [n] \to Q$ gibt es ein $f^*\colon \mathbb{N} \to Q$ mit $f^*\iota = f$.*

4. *Zu jedem $f\colon [1] \to Q$ gibt es ein $f^*\colon \mathbb{N} \to Q$ mit $f^*\iota = f$*

1.: $\Longrightarrow$2.: Hierbei ist am meisten Arbeit notwendig. Ich verwende das zornsche Lemma. Wahrscheinlich kann man das Auswahlaxiom direkt verwenden. Wir betrachten:

$$\mathfrak{C} := \{(C,g)|U \hookrightarrow C \hookrightarrow H(U) \text{ und } g \circ \iota = f\}$$

$\mathfrak{C}$ ist halbgeordnet durch

$$(C,g) \leq (D,h) \iff C \subset D \text{ und } g \circ \iota = h.$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & H(U) \\ Q & & \end{tikzcd}$$

Es ist $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, denn $(U,f) \in \mathfrak{C}$. Sei $(C_k|k \in K)$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathfrak{C}$ und

$$C^* := \bigcup_{k \in K} U_k$$

Wir definieren:

$$f^* : C^* \ni c \mapsto f_k(c) \in Q \text{ falls } c \in C_k.$$

Dadurch ist f^* eindeutig definiert. Denn ist etwa $c \in U_m$ und $m \leq n$, so ist:

$$f^*(c) = f_n(c) = f_m \circ \iota(c)$$

Wobei ι die Inklusionsabbildung $\iota\colon C_m \hookrightarrow C_n$ ist. Es ist $f^* \circ \iota = f$. Außerdem ist f auch ein Morphismus.
Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element in $\mathfrak{C}$. Sei (C_0, f_0) ein solches maximale Element.
Beh.: $C_0 = H(U)$ Angenommen es gebe in $H(U) \setminus C_0$ ein Element a. Da $a \in H(U)$ ist gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n(a) \in U$. Da $U \hookrightarrow C_0$ ist, gibt es ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^k(a) \in C_0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $k = 1$ ist. Also $\alpha(a) \in C_0$. Sei $D = C_0 \cup [a] = C_0 \sqcup \{a\}$. Es ist $C_0 \subsetneq D$.
Da γ surjektiv ist, gibt es zu $f_0(\alpha(a))$ ein $q \in Q$ mit $\gamma(q) = f_0(\alpha(a))$. Wir erklären

$$\delta\colon D \ni x \mapsto \begin{cases} f_0(x) \text{ falls } x \in C_0 \\ q \text{ falls } x = a \end{cases}$$

δ ist ein Morphismus. Ist $x \in C_0$, so ist alles klar. Ist $x = a$ so ist $\delta(\alpha(a)) = f_0(\alpha(a)) = \gamma(q) = \gamma(\delta(a))$. Also ist δ ein Morphismus. Das widerspricht der Maximalität von C_0. Also ist $C_0 = H(U)$.
2. $\Longrightarrow$3. Die Herkunft von $[n]$ ist $\mathbb{N}$ daher folgt die Behauptung.
3. $\Longrightarrow$4. Das ist ein Spezialfall.
4. $\Longrightarrow$1. Sei $q \in Q$. Da $[1] \hookrightarrow \mathbb{N}$ frei ist, gibt es ein $f\colon [1] \to Q$ mit $f(1) = q$. Nach Voraussetzung gibt es $f^*\colon \mathbb{N} \to Q$ mit $f^* \circ \iota$ mit $f^*(1) = q$. Man erhält $q = f^*(1+0) = \gamma(f^{*(0)})$. Also ist q im Bild von γ. Dies gilt für alle $q \in Q$. Also ist γ surjektiv.

Ist die Strukturabbildung von (Q, γ) bijektiv, so lässt sich die Aussage noch präzisieren:

Satz 2.120. *Für eine Kette (Q, γ) sind äquivalent:*

1. *γ ist bijektiv.*
2. *Zu jeder Kette (A, α) und jedem $U \hookrightarrow A$ und jedem $f\colon U \to Q$ gibt es genau ein $f^*\colon H(U) \to Q$ mit $f^* \circ \iota = f$.*
3. *Zu jedem $q \in Q$ und jedem $f\colon [1] \to Q$ gibt es genau einen Morphismus $f^*\colon \mathbb{N} \to Q$ mit $f^*(1) = q$.*
4. *Zu jedem $q \in Q$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon \mathbb{Z} \to Q$ mit $f(0) = q$.*

1. $\Longrightarrow$2.: Sei $f\colon U \to Q$ gegeben. Da γ surjektiv ist, gibt es ein $f^*\colon H(U) \to Q$ mit $f^* \circ \iota = f$. Sei $g\colon H(U) \to Q$ auch mit $g \circ \iota = f$. Ist $x \in H(U)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n(x) \in U$. Es folgt:

$$f(\alpha^n(x)) = g(\alpha^n(x))$$
$$\gamma^n(f(x)) = \gamma^n(g(x))$$

Da γ injektiv ist, folgt $f(x) = g(x)$. Also $f = g$.
2. $\Longrightarrow$3.Sei $f\colon [1] \to Q$ mit $f(1) = q$. ZU f gibt es ein $f^*\colon H([1]) = \mathbb{N}$ mit $f^*(1) = f(1) = q$. Ist $g\colon \mathbb{N}$ ein Morphismus mit $q = g(1) = f(1) = f^*(1)$, so folgt $\gamma(g(0)) = \gamma(f^*(0))$. Also $f^* = g$
3.$\Longrightarrow$1.
Nach Satz 2.119 ist γ jedenfalls surjektiv. Sei $\gamma(x) = \gamma(y) = q$. Es gibt

$$f\colon \mathbb{N} \to Q \text{ mit } f(0) = x$$
$$g\colon \mathbb{N} \to Q \text{ mit } g(0) = y$$

Es ist $f(1) = \gamma(f(0)) = \gamma(x) = \gamma(y) = \gamma(g(0)) = g(1) = q$. Also stimmen f, g auf $[1]$ überein. Also ist $f = g$. Und damit ist $x = y$.
1. $\iff$ 4.: Wurde früher gezeigt.

2.13 Injektive Ketten

Satz 2.121. *Für eine Kette (Q, γ) sind äquivalent*

1. *γ ist surjektiv und Q enthält einen Fixpunkt.*
2. *Für alle (A, α) und $U \hookrightarrow A$ gilt: Jeder Morphismus $f\colon U \to A$ lässt sich hochziehen auf A.*

1.: $\Longrightarrow$2.: Sei $U \hookrightarrow A$ eine abgeschlossene Menge in (A, α) und $f\colon U \to Q$. Da γ surjektiv ist, gibt es nach dem Satz 2.119 ein $f'\colon H(U) \to Q$ mit $f' \circ \iota = f$. Es ist $A \setminus H(U)$ abgeschlossen in A. Ich definiere

$$f^*(a) = \begin{cases} f'(a) \text{ falls } a \in H(U) \\ q \text{ falls } a \notin H(U) \end{cases}$$

Dabei ist q der Fixpunkt von γ. Es ist f^* ein Morphismus. Denn sei $a \in H(U)$. Dann ist $\alpha(a) \in H(U)$. . Es folgt $f^*(\alpha(a)) = f'(\alpha(a)) = \gamma f'(a) = \gamma f^*(a)$. Ist $a \notin H(U)$, so ist $\alpha(a) \notin H(U)$. Es folgt: $q = f^*(\alpha(a)) = \gamma(f^*)(a) = \gamma(q)$.
2.:$\Longrightarrow$1.: Wegen Satz 2.119 ist γ surjektiv. Wir betrachten $\mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$ mit der Strukturabbildung:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ falls } x \in \mathbb{N} \\ \omega \text{ falls } x = \omega \end{cases}$$

Zu einem beliebigen $y \in Q$ gibt es einen Morphismus $f\colon \mathbb{N} \to Q$ mit $f(1+x) = \gamma f(x)$. Nach Voraussetzung gibt es einen Morphismus $f^*\colon A \to Q$ mit $f^*\iota = f$. Es folgt $f^*(\omega) = f^*(\alpha(\omega)) = \gamma(f^*(\omega))$. Also ist $f^*(\omega)$ ein Fixpunkt. $\square$

2.14 Gelesenes Gedanken

Aristoteles

- Ein Argument von Aristoteles:Lehmann-Leander, *Aristoteles Analytiker der Wirklichkeit*, Seite 25 „Man kann behaupten, dass in jeglichem Bereiche, wo es eine Stufenreihe, ein Höher oder Niedriger bezüglich der Vollkommenheit[16] gibt, notwendig auch ein schlechthin Vollkommenstes besteht. Da es nun unter dem, was ist, eine solche Abstufung von Dingen höherer und geringerer Vollkommenheit gibt, so gibt es auch ein vollkommenstes Seiendes, und dies dürfte das Göttliche sein." Dies hat Aristoteles sicher fälschlich behauptet. Die Menge der natürlichen Zahlen ist der Größe nach geordnet. Sie enthält aber kein größtes Element. In der Menge der ganzen Zahlen gibt es sicher Teilmengen ohne kleinste Zahl. Es gibt unendliche aufsteigende Ketten, die nicht abbrechen. Aristoteles behauptet hier, dass jede Menge endlich ist. Denn sei A eine unendliche Menge. Dann enthält $\mathfrak{P}(A)$ eine Teilmenge ohne größtes Element. Ja $\mathfrak{P}(A)$ enthält sogar Ketten ohne größtes Element und Ketten ohne kleinstes Element. Man fragt sich, ob Aristoteles diese Beispiele als Gegenargument zugelassen hätte. In endlichen Mengen stimmen seine Argumente im wesentlichen schon. Vielleicht ist das der geheime Grund, warum er nur endliche Mengen zulässt. Seine Gottesbeweise führen sonst nicht zum Ziel.

- Aus dem Buch der Pysik III 6. Aristoteles, *Acht Bücher Physik*, Seite 133 „Daß aber auch, wenn es ein Unbegrenztes schlechthin gar nicht gibt, viel Unmögliches daraus folgt, ist klar; denn dann würde sowohl es von der Zeit einen Anfang und einen Abschluß geben, als auch die Größen würden nicht wieder in Größen teilbar sein und auch die Zahl würde nicht unbegrenzt sein" Aristoteles sieht also durchaus die Schwierigkeiten, die entstehen, wenn man das Unbegrenzte und das Unendliche absolut ablehnt. Aus diesem Dilemma versucht er sich durch das potentielle Unendlich zu retten. „Wann aber, nachdem die Sache so festgestellt ist, nach keiner der beiden Seiten sich eine Möglichkeit zeigt, so bedarf es eines Schiedsrichters, und es ist klar, daß das Unbegrenzte gewissermaßen wohl existiert, gewissermaßen aber auch nicht. Nämlich das Existieren wird teils in dem

[16] Was ist Vollkommenheit?

Sinne von der 'Potenz nach', theils in dem Sinne von 'Verwirklichung nach' gesagt, das Unbegrenzte ist theils durch Wegnehmen. Daß aber die Größe aktuell nicht unbegrenzt ist, haben wir schon angegeben, der Teilung nach aber ist sie es, denn die Lehre von den 'unteilbaren Linien' aufzuheben ist nicht schwer. Also bleibt nur übrig, daß das Unbegrenzte der Potenz nach sei; man darf aber dabei das der Potenz nach Seiende nicht so nehmen, wie z.B. bei dem Vorhandensein der Potenz einer bestimmten Statue diese Statue auch einmal sein wird, daß eben eben so auch ein bestimmtes Unbegrenztes, welches dem Actus nach es wäre, wein werde, sondern ..."

Thomas von Aquin

- Thomas von Aquin scheint explizit die Existenz der Unendlichkeit zu leugnen. So schreibt er in der Summe wider die Heiden Aquin, *Summe gegen die Heiden*, 20. Kapitel „Gott ist kein Körper" Seite 77 „Eine unendliche Größe gibt es nicht"

Lukrez

- Lukrez zitiert nach Harrison, *Kosmologie*, Seite 166 Lukrez schrieb „Die Beobachtung zeigt, dass jeder Gegenstand durch einen andren begrenzt wird. Die Hügel werden von der Luft demarkiert und die Luft durch die Hügel. Das Land setzt den Meeren Grenzen und das Meer jedem Land. Aber das Universum wird durch nichts außen begrenzt" Jenen, die an ein endliches Universum mit einem äußeren Rand glaubten schlug er folgendes Rätsel vor (siehe Abbildung) „Nimm einen Augenblick an, der ganze Raum sei begrenzt und jemand werfe über seine äußere Grenze hinaus einen Speer. Entscheidest du dich für die Annahme, dass das Geschoss, das mit aller Macht geworfen wird, entlang der Zielrichtung fliegen wird? Oder glaubst du, dass etwas den Speer auf dem Wege blockieren und anhalten wird? Du mußt dich für die eine oder andere Alternative entscheiden. ... Mit diesem Argument werde ich dich verfolgen. Wohin auch immer du die äußerste Grenze von Dingen verlegen magst, ich werde dich fragen 'Gut dann, was geschieht mit dem Speer?' " Lukrez antwortet:„Lerne daraus, dass das Universum in keiner Richtung begrenzt ist."

Bolzano

- Aus B. Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen“ (Prag 1851) nach Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Seite 275 „Ich behaupte nämlich: Zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge zugehörige Ding, mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, dass die eine dieser Mengen die andre als einen bloßen Teil in sich fasst,so dass die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d.h als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben.“ In unserer Sprache ausgedrückt behauptet hier Bolzano: Sind zwei Mengen unendlich, so kann es eine bijektive Funktion von der einen in die andere Menge geben, obwohl eine Menge echter Teil der anderen ist. Im wesentlichen ist dies die Kennzeichnung unendlicher Mengen durch Dedekind. Dies belegt wieder die These. Nichts ganz neues gibt es unter der Sonne. Mathematik ist eben nachdenken. Bolzano belegt seine These, indem er die die bijektive Funktion
$$f : [0, 5] \ni x \mapsto \frac{5}{12} x \in [0, 12]$$
diskutiert. Es ist $[0, 5]$ eine echte Teilmenge von $[0, 12]$ und dennoch ist f eine bijektive Funktion.

Galilei

- Etwas undeutlicher hatte schon Galilei dies bemerkt. Ich zitiere nach Rucker, *Die Ufer der Unendlichkeit*, Seite 19 „Unendlich ist die Anzahl aller Zahlen, unendlich die der Quadrate, unendlich die der Wurzeln, weder ist die Menge der Quadrate kleiner als die der Zahlen,noch ist die Menge der letzteren größer; und schließlich haben die Attribute des Gleichen, des Größeren und des Kleineren nicht statt bei Unendlichem, sondern sie gelten nur bei endlichen Größeren“ Wir werden später sehen. Die Behauptung Galileis stimmt nur in ihrem ersten Teil. Cantor hat den zweiten Teil der Behauptung widerlegt.

Giordano Bruno

- Aus Giordano Bruno: Zitiert nach : „Der Weg der Physik“ Sambursky, *Der Weg der Physik*, Seite 252 ff

Der unendliche Raum Personen des Gesprächs: Elpino, Filoteo, Fracastorio, Burchio.

Elpino: Wie sollte es möglich sein, dass das All unendlich wäre?

Filoteo: Umgekehrt, wie sollte es möglich sein, dass das All endlich wäre?

Elpino: Meint Ihr, dass seine Unendlichkeit sich beweisen lässt?

Fileto Mein Ihr, dass seine Endlichkeit sich beweisen lässt?

Elpino: Was für eine Ausschweifung der Phantasie. ...

Burchio:... schon ganz gern sähe, es wäre so wie Fileto behauptet, weil ich dann, sollte mir einmal das Malheur passieren, von dieser Welt hinunterzufallen, zu guter Letzt, doch immer irgendwo zu Lande schlagen müsste. ...

Fileto: Freilich gibt es keinen Sinn, der das Unendliche anschaute, keinen Sinn, der uns unmittelbar zwänge, darauf zu schließen; denn das Unendliche kann kein Gegenstand der Sinneswahrnehmung sein. ... Wenn die Welt endlich ist und jenseits der Welt nichts, so frage ich euch: Wo ist die Welt? Wo befindet sich das All? Aristoteles antwortet: „In sich selber; die innere Wölbung der ersten Himmelskugel ist der erste und allgemeinste Ort, und dieser als das erste Umfassende wird von nichts anderem umfasst. (— Eine seltsame Vorstellung. Aber in der Sprache der Mengenlehre gar nicht so seltsam. Es gibt eine Klasse. In dieser Klasse sind alle Mengen enthalten. Sie selber ist aber nicht mehr Element einer Klasse—) Denn der Ort ist nichts anders als die Oberfläche und Begrenzung durch einen umfassenden Körper, und was in keinem umfassenden Körper ist ist in keinem Ort. Aber mein guter Aristoteles, was willst du damit sagen dass ein Raum in sich selber sei? Was willst du außerhalb der Welt annehmen? Sagst du: dort ist nichts – so befinden sich ja Himmel und Welt im Nichts also Nirgendwo.... (– Für Bruno ist es also unvorstellbar, dass es etwas gibt das nicht in etwas ist. Aber in der Mengenlehre sind Klassen gerade von dieser Art. Darauf baut die Mathematik auf.–) Denn es ist in

Wahrheit unmöglich, mit irgendwelchem Sinn oder irgendwelcher Phantasie sich ernsthafterweise eine Oberfläche, eine Begrenzung einen Rand vorzustellen, außerhalb dessen weder ein Körper noch leerer Raum wäre, auch wenn die Gottheit dort wäre.

Burchio: Gewiss würde man glaube ich sagen müssen, dass, wenn eine Hand über jene Wölbung hinausstreckte, dies nicht mehr im Raum und also nirgendwo sein und folglich ihr Sein verloren haben würde. (Dies Argument erregt Schrecken ist aber toll.)

- Descartes, René. Aus den Meditationes: „ Wir werden deshalb uns nicht mit Streitigkeiten über das Unendliche ermüden; denn bei unserer eigenen Endlichkeit wäre es verkehrt, wenn wir versuchten, etwas darüber zu bestimmen und so es gleichsam endlich und begreiflich zu machen. Wir werden uns deshalb nicht mit der Antwort auf die Frage mühen, ob die Hälfte einer unendlichen Linie ebenfalls unendlich sei, oder ob die unendliche Zahl gleich oder ungleich sei und Ähnliches; denn nur der, welcher seine Seele für unendlich hält, kann meinen, hierüber nachdenken zu müssen. Wir werden dagegen Alles, bei dessen Betrachtung man kein Ende finden kann, zwar nicht als unendlich behaupten, aber als endlos ansehen. So kann man sich keinen Raum so groß vorstellen, dass eine Vergrößerung desselben unmöglich wäre, und man wird deshalb die Größe der möglichen Dinge als eine endlose bezeichnen. Ebenso wird man die Größe für ohne Ende teilbar halten, weil kein Körper in so viel Teile geteilt werden kann, dass diese Teile nicht immer noch weiter teilbar wären. Ebenso wird man die Zahl der Sterne für nicht-beschränkt annehmen, weil man sich keine so große Zahl derselben vorstellen kann, dass Gott nicht noch mehr hätte erschaffen können. Dasselbe gilt für das Übrige.“

- „Das Hinausgehen über das Seiende geschieht im Wesen des Daseins“ Dies ist ein Satz von Heidegger zitiert nach dem Buch von Thomas H. Macho über Sartre. Macho, *Sartre*, Seite 25 Der Satz nimmt in der Hierarchie der Unverständlichkeiten sicher eine sehr hohe Stelle ein. Wie ja wahrscheinlich kaum einer so gut erreicht hat nicht verstanden zu werden wie Heidegger. Aber wenn wir ihn mit unsern Begriffen deuten, so scheint es zum Wesen des Daseins zu gehören, dass man über etwas hinausgeht. Das heißt in Sinne von Dedekind ist eine unendliche Menge vonnöten.

- „Da-sein heißt: Heineingehaltenheit in das Nichts“ Macho, *Sartre*, Seite 28. Es wäre schön Giordano Bruno zu dieser Bemerkung Heideggers zu hören. Sie erinnert stark an das Weltbild des Aristoteles: Die Welt hängt im Nichts. Bei mir sträubt sich da jedes Vorstellungsvermögen. Schon die Hand, welche sich über den Rand des Nichts hinaus streckt, wo ist sie? Erst Recht die Hand, die das Da-Sein ins Nichts hält???

- Augustinus zur WiederkehrlehreAugustinus, *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*, Seite 80: „Nun liest man freilich im Buche Salomos, genannt der Prediger, die Worte: «Was ist's das geschehen ist? Eben das hernach geschehen wird. Was ist's das man getan hat? Eben das man hernach wieder tun wird, und geschieht nichts neues unter der Sonne. Geschieht auch etwas, davon man sagen möchte: 'Siehe das ist neu'? Es ist zuvor auch geschehen in den langen Zeiten, die vor uns gewesen sind». Diese Worte wollen einige auf jene Umläufe beziehen, die immer wieder zum selben Punkt zurückkehren und alles auf den gleichen Stand bringen sollen. Aber Salomo spricht hier entweder von zuvor erwähnten Dingen, also den kommenden und gehenden Menschengeschlechtern, dem Kreisen der Sonne und dem Lauf der Gewässer, oder überhaupt von allerart Dingen, die entstehen und vergehen. Denn es gab Menschen vor uns, gibt sie um uns und wird sie nach uns geben, und nicht anders steht es mit allen Tieren und Pflanzen. Selbst die Ungetüme, die von der Naturregel abweichen, mögen sie auch untereinander verschieden und einige von ihnen nur einmal, wie es heißt vorgekommen sein, sind doch, sofern sie unter den Begriff Wundertiere und Ungetüme fallen, schon dagewesen und werden wieder erscheinen, und man kann es nicht a ls etwas Neues und unerhörtes bezeichnen, daß ein Ungetüm unter der Sonne geboren wird. Andere freilich verstehen die Worte des Weisen so, als habe er sagen wollen, in der Vorherbestimmung Gottes sei alles schon so gut wie geschehn, und daher gebe es nichts Neues unter der Sonne. Nie jedoch wird rechter Glaube darauf verfallen, mit diesen Worten Salomos seien jene Umläufe gemeint, in denen sich Zeiten und zeitliche Dinge in endlosen Kreisen wiederholen sollen. Denn dann müßte, mit Verlaub zu sagen, Plato, der Philosoph, wie er in seinem Jahrhundert in der Stadt Athen und der Akademie genannten Schule seine Zöglinge lehrte, schon unzählige Male in weiter zurückliegenden Jahrhunderten, gewiss in sehr langen, aber doch festen Abständen, aufgetreten sein, derselbe Plato, dieselbe Stadt, dieselbe Schule und dieselben Schüler,[17], und das müsste sich auch in zukünftigen Jahrhunderten stets von neuem wiederholen. Ausgeschlossen so etwas zu glauben! Denn einmal nur ist Christus für unsere Sünden gestorben.[18], «auferstanden von den Toten, stirbt er hinfort nicht mehr, und der Tod wird hinfort nicht über ihn herrschen». Und auch wir werden nach der Auferstehung immer bei dem Herrn sein, zu dem wir jetzt mit dem heiligen Psalmsänger sagen: «Du, Herr, wollest uns bewahren und uns ewiglich behüten vor diesem Geschlecht.»Auf jene aber treffen, wie ich meine, die darauffolgenden Worte zu «Im Kreise...». "

- Das folgende Gedicht stammt von Wilhelm Busch:

  Beschränkt
  Halt dein Rößlein nur im Zügel
  Kommst ja doch nicht allzuweit
  Hinter jedem neuen Hügel
  Dehnt sich die Unendlichekeit

  Nenne niemand dumm und säumig
  Der das Nächste recht bedenkt
  Ach, die Welt ist so geräumig—
  Und der Kopf ist so beschränkt Bender, *Deutsche Dichtung der Neuzeit*, Seite 298

- Ein Kinderlied von Wilhelm Hey 1837 Bayern, *Evangelisches Gesangbuch*, Nummer 511

  Weißt du, wieviel Sternlein stehen
  an dem blauen Himmelzelt?
  Weißt du, wieviel Wolken gehen
  weithin über alle Welt?
  Gott der Herr hat sie gezählet,
  dass ihm auch nicht eines fehlet
  an der ganzen großen Zahl,
  an der ganzen großen Zahl.

[17] Hier ist eine Feinheit verborgen. Es können sich diesleben Muster durchaus wiederholen ohne dass tatsächlich das Muster periodisch ist. Man denke an Quasikristalle. Da gibt es sogar eindimensionale Quasikristalle. Wir haben also nicht nur die Alternative. Kristall– immer verschieden.

[18] Ist er für unsere Sünden gestorben?

> Weißt du, wieviel Mücklein spielen
> in der heißen Sonnenglut,
> wieviel Fischlein auch sich kühlen
> in der hellen Wasserflut?
> Gott der Herr rief sie mit Namen,
> dass sie all ins Leben kamen,
> dass sie nun so fröhlich sind,
> dass sie nun so fröhlich sind.

Sterne sind sehr unordentlich über den Himmel verteilt. Daher schwer zu zählen.

- Georg Cantor (1887:

> „Unter einer endlichen [nichtleeren] Menge verstehen wir eine solche M, welche aus einem ursprünglichen Element durch sukzessive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, daß auch rückwärts aus M durch sukzessive Entfernung der Elemente in umgekehrter Ordnung das ursprüngliche Element gewonnen werden kann. Als durchaus wesentliches Merkmal endlicher Mengen muß es angesehen werden, daß eine solche keinem ihrer [echten] Bestandteile äquivalent ist. Denn eine aktual unendliche Menge ist immer so beschaffen, daß auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.“ Cantors endliche Mengen sind also den Stapeln der Informatik ähnlich, die durch schrittweises „push“ an Höhe gewinnen, aber auch durch schrittweises „pop“ wieder reduziert werden können. Ein Stapel unendlicher Höhe bestehend aus allen natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung ist ideell vorstellbar. Man kann ihn sich durch sukzessives „push“ aufgebaut denken, dagegen kann er durch „pop“ nicht mehr von oben abgebaut werden, weil er kein oberstes Objekt mehr besitzt. Zitiert nach Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, S. 94.

Meiner Ansicht nach genügt das Kriterium, welches Cantor in seinem zweiten Teilsatz anspricht. Eine Menge ist endlich, wenn sie durch aufeinanderfolgendes wegnehmen jeweils eines Elementes ausgeschöpft werden kann. Passt sehr gut zu der Legende des Augustinus. Es ist das Endlichkeitskriterium von 2.94

- Hessenberg (1906) bemerkt zu dem „Beweis“ Dedekinds für die Existenz einer unendlichen Menge:

> Einer der interessantesten Versuche, die Existenz transfiniter Mengen zu beweisen, ist der von Dedekind unternommene. Es sei a irgend ein Gegenstand des Denkens, so kann ich das Urteil fällen: a ist ein Gegenstand meines Denkens. Dieses Urteil (p(a) ist selbst ein Gegenstand des Denkens. Die Zuordnung (p zwischen a und cp(a) ist umkehrbar eindeutig [injektiv] und bildet die Menge aller Gedankendinge auf einen echten Teil ihrer selbst ab, da nicht jeder Gegenstand des Denkens die Form eines Urteils, daher a fortiori nicht die Form des speziellen Urteils cp(a) hat. Demnach ist die Menge aller Gedankendinge transfinit.

Moritz Schlick Moritz Schlick war einer der Gründer des Wiener Kreises. Viele Beiträge zur Ethik Naturphilosophie und Erkenntnistheorie schrieb er. Am 22. Juni 1936 wurde er von seinem ehemaligen Studenten Hans Nelböck ermordet. An einer Stelle schreibt er:

> Die Bedeutung eines Satzes feststellen heißt, die Regeln feststellen, gemäß derer der Satz gebraucht werden soll, und dies ist dasselbe, wie die Art und Weise festzustellen, auf die er verefiziert (oder falsifiziert) werden kann. Die Bedeutung einer Aussage ist die Methode ihrer Verifikation.

Dies ist zitiert nach Manfred, *Der Wiener Kreis*, Seite 113. Dies scheint mir falsch. Zunächst gibt es einmal Sätze, die man prinzipiell nicht verefizieren kann. Das sind alle Sätze, die etwas über unendliche Mengen aussagen. Was ist von dem Satz zu halten: Es gibt eine Menge A und eine injektive Funktion $\alpha\colon A \to A$ welche nicht surjektiv ist. Wer könnte den Satz verifizieren? Wie sieht eine Methode der Verifikation aus? Ein weiterer einfacher Satz ist: Es gibt unendlich viele Primzahlen. Wie sollte er verifiziert werden. Man kann einen Zusammenhang mit anderen Sätzen herstellen.
Letztlich wird man an die Existenz einer unendlichen Menge glauben müssen um den Satz akzeptieren zu können. Dabei sollte das „müssen“ vorsichtig verwendet werden. Man kann auch akzeptieren: Wenn es eine unendliche Menge gibt, dann ist auch die Menge der Primzahlen unendlich.
Hinzu kommt: Für viele Sätze gibt es viele Möglichkeiten sie zu beweisen. Hat ein solcher Satz dann viele Bedeutungen? Kurz: Mir erscheint die Reduzierung der Bedeutung auf Syntax falsch.
Computerecke:

10. Das folgende Program berechnet die Fibonacci Zahlen. Es geht folgendermaßen vor. Es ist endrekursiv.
    - Die Funktion fib ist eine Funktion $fib : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Man übergibt dem Programm eine natürliche Zahl n. Diese gibt an, wie oft fib auf den Startvektor $\vec{a}$ angewendet werden soll.

```
(defun fibon (n a)
 (defun fib(a)
 (list (nth 1 a) (+ (nth 0 a) (nth 1 a)))
)
 (defun iter (i a)
        (if (>= i n) a
        (iter (1+ i) (fib a))
)
)
(iter 0 a)
)
```

      Es ergibt sich beispielsweise

```
 (fibon 10 (list 0 1))===> (55 89)
 (fibon 50 (list 0 1)) ===> (12586269025 20365011074)
```

    - Analog erhält man die nte Dreieckszahl

```
(defun dreieck(n a)
(defun dr(a)
  (list (1+ (nth 0 a))
        (+ (nth 0 a) (nth 1 a))
  )
)
 (defun iter (i a)
       (if (>= i n) a
       (iter (1+ i) (dr a))
       )
)
(iter 0 a)
)
```

      Es ergibt sich beispielsweise:

```
(dreieck 10 (list 0 0)) ===>(10 45)
```

      Die 10te Dreieckszahl ist daher 45.

Aufgaben:

23. Schreibe ein entsprechendes Programm zur Berechnung der Fakultät.
24. Schreibe ein entsprechendes Programm zur Berechnung der pyramidalen Zahlen.
25. Schreibe ein Programm, welches feststellt wann sich die Funktion fib aus obigem Beispiel auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ modulo 7 wiederholt. Untersuche andere Moduln.

3 Muster

3.1 Definition und Eigenschaften

Um ein Muster auf ein Blatt Papier malen, gehen wir beispielsweise folgendermaßen vor. Wir malen irgend eine Figur, auf das Blatt, verschieben das Blatt um einen Vektor $\vec{v}$ und zeichnen die gleiche Figur. Das wiederholen wir. Die Startfigur kann ein Punkt, ein Strich oder ein Strichmännchen ein kompliziertes Bild oder selber weder ein Muster sein.

Abb. 3.1: Römisches Fußbodenmosaik im Landesmuseum in Trier

Wir mustern unsre Umgebung, um sich in ihr zurechtzufinden.

- Wir zählen die Schritte, die wir vom Ort A zum Ort B brauchen um wenigsten ungefähr die Entfernung der beiden Orte zu beschreiben. Natürlich ist das eine sehr ungenaue Beschreibung. Franz wird einen anderen Weg gehen eine andere Schrittzahl ermitteln als Andreas. Die beiden werden ihre Entfernungsangaben objektivieren. Das heißt sie werden sich auf einen normalen Weg einen Normschritt einigen. In jedem Fall versehen sie die Strecke $[A, B]$ mit einem Bandmuster.

- Die Erde wird mit einem Koordinatensystem versehen. Das ist nichts anderes als ein besonders einfaches Muster auf die Erdkugel gelegt. Sie wird in einem Netz gefangen.

- Tiefer liegt die Strukturierung der Zeit. Verschiedene Zyklen „periodische" Bewegungen werden synchronisiert. Mit einem Muster von „regelmäßigen" sich wiederholenden, sogenannten periodischen Bewegungen gemessen. Was ist eine periodische Bewegung? Das können wir nur durch andere periodischen Bewegungen feststellen. Ist es der Herzschlag, Ebbe und Flut am Meer, die wiederkehrenden Mond oder der Tagesablauf oder die Schwingung eines Atoms. Immer ist Willkür verbunden mit dem was wir periodisch nennen. Wir zeichnen das Zeitmuster. Natürlich bemühen wir um ein Muster, das möglichst „objektiv" ist.

- Spiegelungen.

- Verschiebungen: Bandmuster entstehen indem man eine bestimmte Figur längs einer Richtung verschiebt. In den Museen, Kirche und Moscheen Europas kann man die Kunst antiker und mittelalterlischer Mosaizisten bewundern.

- Drehungen.

- zentrische Streckungen.

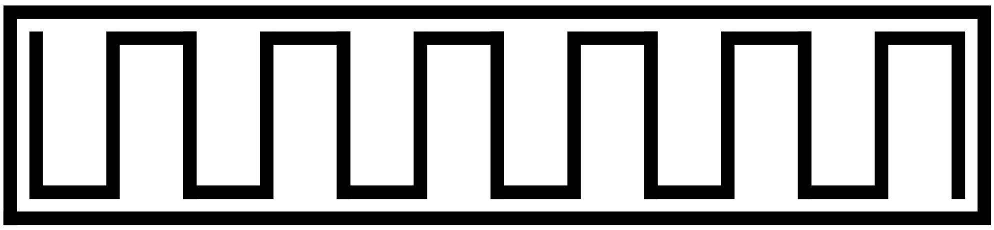


Abb. 3.2: Ein Bandmuster

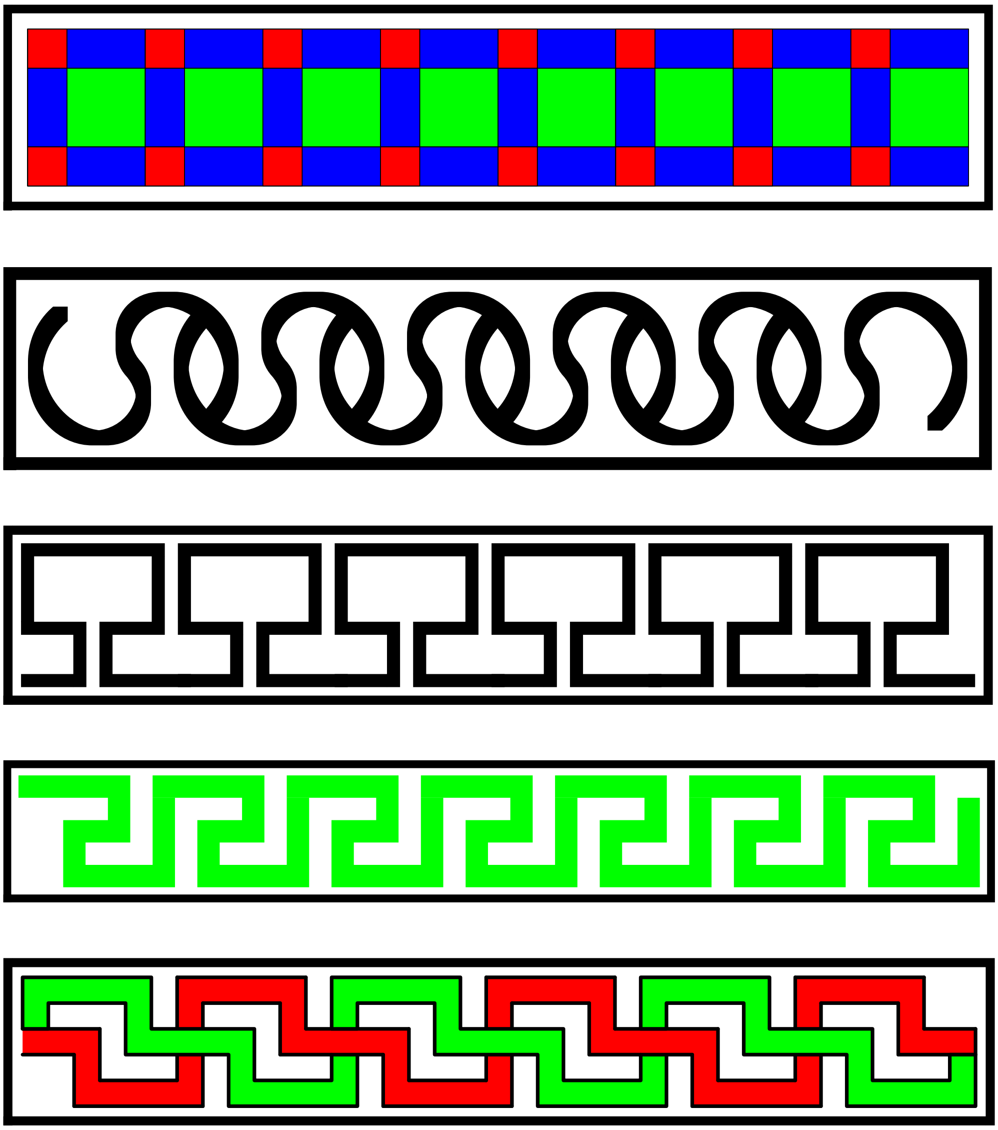


Abb. 3.3: Bandmuster

Definition 13 Seien Ω, A Mengen und $F\colon \Omega \times A \to A$ eine Funktion. Das Tripel (Ω, A, F) heißt Ω-Muster. ◻

In der Mengenlehre wurde erläutert: Es ist $[\Omega \times A, A]$ in natürlicher Weise isomorph zu $[\Omega, [A, A]]$. Jeder Funktion

$$F\colon \Omega \times A \to A$$

entspricht bei dieser natürlichen Isomorphie die Funktion

$$\hat{F}\colon \Omega \ni \alpha \mapsto (A \ni a \mapsto F(\alpha, a) \in A).$$

In Bourbaki (Bourbaki, *Algebra I Chapters 1-3*, Seite 24) heißt dies eine Aktion von Ω auf A.

Definition 14 Für $\alpha \in \Omega$ und $a \in A$ bezeichne ich mit $\alpha \cdot a := F(\alpha, a) \in A$. Oft wird auch einfach αa geschrieben. ◻

Wir haben dann eine Relation R auf A indem man erklärt:

$$(a, b) \in R \iff: \text{Es gibt } \alpha \in \Omega \text{ und } b = \alpha \cdot a.$$

Der Begriff der Abgeschlossenheit überträgt sich auf diese Relation. Eine Teilmenge $U \subset A$ ist abgeschlossen gegenüber Ω, wenn für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $a \in U$ auch $\alpha \cdot a \in U$ ist. Die Relation ist genau dann injektiv, wenn die Abbildung F injektiv ist.

Hinweis:Endliche Automaten: Siehe das Buch von Jacobs Beispiele:

44. Wir haben hier einen neuen Begriff geprägt. Er sollte schon bekannte Begriffe umfassen. Tatsächlich erhält man eine schon bekannte wichtigste Klasse von Beispielen folgendermaßen: Es sei $\Omega = \{1\}$. Eine Funktion $F\colon \Omega \to [A, A]$ ordnet der 1 eine Funktion $\alpha\colon A \to A$ zu. Wir haben also eine Menge A und eine Funktion $\alpha\colon A \to A$. Dann ist das Paar (A, α) eine Kette im Sinne von Dedekind. Ketten wurden ausführlich im letzten Kapitel behandelt.

45. Ist $A = \mathbb{N}$ und $\alpha(n) = 2 + n$, so ist α injektiv. Es ist $[0]$ die Menge der geraden Zahlen und $[1]$ = Menge der ungeraden Zahlen und daher $[0] \cap [1] = \emptyset$. Es ist $\{0, 1\}$ eine Basis von (A, α). Der Begriff Basis von X-Ketten wird später erklärt.

Abb. 3.4: Marmorintarsien eines Fußbodens in einer Kirche in Rom

Ehe ich die Theorie weiter verfolge noch ein paar Beispiele in den Ω mehr Elemente enthält:
Beispiele:

46. Sei A ein Ω- Muster und B ein Γ-Muster. Ist $F\colon \Omega \to \Gamma$ eine Funktion, so wird B durch $\alpha \cdot b := F(\alpha) \cdot b$ zu einem Ω-Muster.

47. Sei $A = \mathbb{N}$ mit den beiden Abbildungen $\alpha(n) = 1 + n$ und $\beta(n) = 2 + n$. Man erhält folgendes Muster:

    Ein neuer Begriff gibt, wenn er was taugen soll, Anlass zu neuen Fragen. Be-

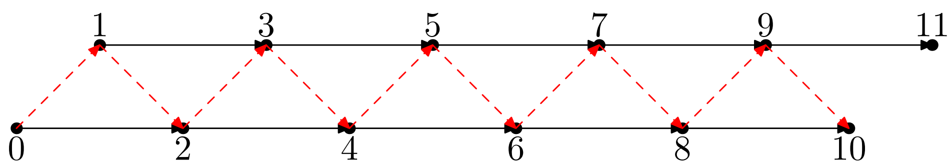


Abb. 3.5: Das 1-2 Muster

trachten wir das Diagramm, so kann man es als Plan eines Wegenetzes deuten. Beispielsweise folgendermaßen.

Gegeben sei eine Treppe mit n Stufen. Max kann beim Ersteigen der Treppe eine oder zwei Stufen gleichzeitig nehmen. Wie viele Möglichkeiten hat er von der Stufe 0, dem Treppenboden, auf die Stufe n zu gelangen.

Sei $a(n) :=$ die Anzahl dieser Möglichkeiten. Es ist $a(0) = 0$. $a(1) = 1$.

Vor dem letzten Schritt kann Max auf der $(n-1)$ten Stufe stehen. Es gibt $a(n-1)$ Möglichkeiten auf die $(n-1)$te Stufe zu gelangen. Außerdem kann er vor dem letzten Schritt auf der $n-2$ten Stufe stehen. Es gibt $a(n-2)$ Möglichkeiten dahin zu gelangen. Also ergibt es

$$a(n) = a(n-1) + a(n-2)$$

Möglichkeiten. Jetzt ist es leicht $a(100)$ auszurechnen. $a(0) = 0$, $a(1) = 1$, $a(2) = 1 + 0 = 1$, $a(3) = 1 + 1 = 2$, $a(4) = 2 + 1 = 3 \ldots$.

Das gleiche Problem tritt auf, wenn wir etwa nach einem Ω- Muster (A, α, β) fragen in dem $\alpha^2 = \beta$ gilt. Wie viele Wege gibt es von einem Ausgangspunkt nach einem Ziel?

48. Sei $A = \mathbb{N}$, $\alpha(n) = 2 + n$ und $\beta(n) = 3 + n$, Es ergibt sich das folgende Muster.

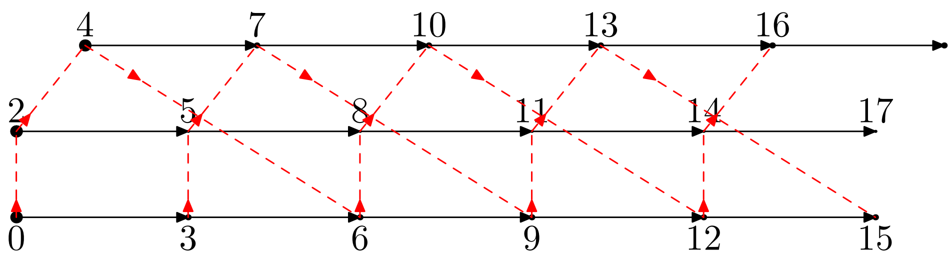


Abb. 3.6: Das 2-3 Muster

Die Pfeile nach rechts entsprechen β. Die roten die gepunkteten Pfeile entsprechen α.

49. Sei wieder $A = \mathbb{N}$, $\alpha(n) = n + 3$ und $\beta(n) = n + 5$. Dann gehen von jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Pfeile aus. In $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ sei $[0]$ die von 0 erzeugte Unteralgebra. Ein Pfeildiagramm von $[0]$ sieht so aus.:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[r] \arrow[d] & 10 \arrow[r] \arrow[d] & 15 \arrow[r] \arrow[d] & 20 \arrow[r] \arrow[d] & 25 \\
3 \arrow[r] \arrow[d] & 8 \arrow[r] \arrow[d] & 13 \arrow[r] \arrow[d] & 18 \arrow[r] & 23 & \\
6 \arrow[r] \arrow[d] & 11 \arrow[r] & 16 & & & \\
9 \arrow[d] & & & & & \\
12 \arrow[uuuurrr, dotted] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Man geht dabei von 0 aus zeichnet einen Pfeil nach unten und berechnet $0+3 = 3$. Man zeichnet von 0 aus einen Pfeil nach rechts und berechnet $0+5 = \beta(0) = 5$. Das wiederholt man bei jedem berechneten Wert.

Beh.: Es ist $\{n|8 \leq n \in \mathbb{N}\} \subset [0]$

Es ist $\{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \subset [0]$ wie man oben berechnet hat. Sei

$$T = \{x|x \geq 13 \text{ und } [8, x] \subset [0]$$

Dabei ist mit $[8, x]$ das Intervall zwischen 8 und x gemeint. Es ist $13 \in T$.

Beh T ist gegenüber 1+ abgeschlossen.

Bew.: Sei $x \in T$. Dann ist $1+x = (x-5)+3+3 = \alpha(\alpha(x-5))$. Da $x-5 \in T \cap [0]$ ist, ist $1 + x \in [0]$ und daher $[8, x + 1] \subset [0]$. Daher ist $1 + x \in T$. Es folgt die Behauptung. In diesem Beispiel kommutieren die beIden Abbildungen α, β. Die Abbidung $\Phi \colon \{\alpha, \beta\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist nicht injektiv. Es ist beispielsweise $\alpha(5) = \beta(3)$. Aber $\alpha \neq \beta$. Im nächsten Beispiel kommutieren die beiden Abbildungen nicht.

Das Muster aus diesem Beispiel ist wesentlich verschieden vom Beispiel 47. Das wird später genauer ausgeführt.[1]

50. Wir betrachten wieder $\mathbb{N}$-

$$\cdot \colon \{1, 2\} \times \mathbb{N} \ni (x, n) \mapsto x + 2 \cdot n \in \mathbb{N}$$

Bezeichnet man $\alpha(n) = 1 + 2n$ und $\beta(n) = 2 + 2n$ und zeichnet den Baum, so erhält man

Die Abbildung $F \colon \{\alpha, \beta\} \times \mathbb{N} \ni (\gamma, n) \mapsto \gamma(n) \in \mathbb{N}$ ist injektiv. Denn ist $\gamma(n) = \gamma'(m)$, so ist etwa $\gamma(n)$ und damit $\gamma'(m)$ ungerade. Daher ist $\gamma = \gamma' = \alpha$. Daher ist $2 \cdot n + 1 = 2 \cdot m + 1$. Daher ist $n = m$. Also ist F injektiv.

[1] Im Beispiel 47 ist $\alpha^2 = \beta$. Im Beispiel 50 ist dies nicht der Fall. In der Kategorie der Muster mit $\alpha^2 = \beta$ ist das Beispiel 47 ein freier Generator.

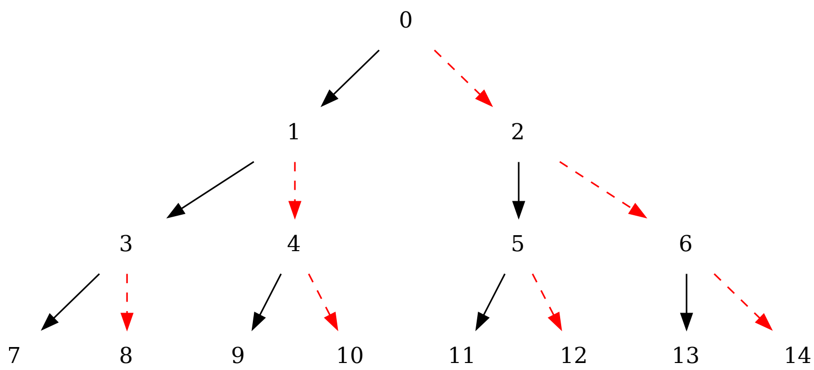


Abb. 3.7: Ein freies Muster

Beh: $[0] = \mathbb{N}$

Bew.: Sei $T = \{x|[0,x] \subset [0]\}$

Es ist $0 \in T$ und T ist gegenüber 1+ abgeschlossen. Sei $n \in T$. Ist n gerade, so ist $n = 2 \cdot k$. Und es ist $k \in T \cap [0]$. Daher ist $2 \cdot k + 1 \in [0]$. Daher ist $n + 1 = 2 \cdot k + 1 \in T$. Enstprechend schließt man, wenn n ungerade ist.

51. Das letzte Beispiel verallgemeinere ich: Sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ mit $n \geq 2$.

$$\cdot : \Omega \times \mathbb{N} \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha + n \cdot a \in \mathbb{N}$$

Es ist $\cdot$ injektiv: Sei $\alpha \cdot a = \alpha' \cdot a'$. Dann ist $1 + \alpha + n \cdot a = 1 + \alpha' + n \cdot a'$. Nehmen wir an es ist $a \geq a'$. Es folgt: $n \cdot (a - a') = \alpha' - \alpha$. Es ist $\alpha - \alpha' < n$. Also ist $a = a'$ Daher ist $\alpha = \alpha'$.

$[0] = \mathbb{N}$. Das heißt der Ω Abschluss von $\{0\}$ ist $\mathbb{N}$.

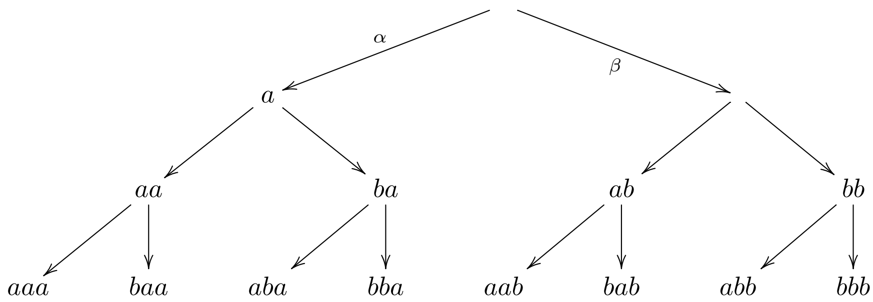
Es sei

$$T := \{m|k \leq m \Rightarrow k \in \mathbb{N} \cap [0]\}$$

Es ist $\{0, \ldots, n\} \subset T$ und T ist abgeschlossen gegenüber 1+. Sei $m \in T$ und $m \geq n$. Ich zeige $m + 1 \in T$. Sei $m \in T$ und $m \geq n$. Ich zeige $m + 1 \in T$. Da $m \in T$ und $m \geq n$, ist kann $m - 1$ geschieben werden $m - 1 = \alpha + n \cdot a$. mit $\alpha \geq n - 1$. Daher ist $m = 1 + \alpha + n \cdot a$.

1.Fall: $\alpha < n-1$. Dann ist $1+\alpha \leq n-1$. Also ist $m+1 = 1+(\alpha+1)+n\cdot a \in [0]$.
2. Fall $\alpha = n-1$. Dann ist $m+1 = 1+(n-1)+1+n\cdot a = 1+n\cdot(a+1) \in [0]$.
Daher ist $[0] = \mathbb{N}$

52. In diesem Beispiel sieht man, dass es eine durche eine „Ersetzung" aus dem vorigen Beispiel hervorgegangen ist. Es wird von dem leeren Wort ausgegangen. Die Funktion α heißt: Es wird vor das Wort ein Buchstabe a gehängt. Die Funktion β bedeutet: Es wird vor das Wort der Buchstabe b gehängt. Man „fühlt", dass das letzte Beispiel im wesentlichen gleich dem vorherigen ist. Dies wird im weiteren Verlauf des Textes verdeutlicht und bewiesen.



Ich wende jetzt die Ergebnisse aus dem 1. Kapitel an.

Definition 15 Sei A eine Ω-Kette. Ist $U \subset A$, so bezeichne

$$\Omega \cdot U := \{\alpha \cdot a | a \in U \text{ und } \alpha \in \Omega\}.$$

Satz 3.1. *1. Ist U abgeschlossen in A gegenüber Ω, so ist $\Omega \cdot U$ abgeschlossen.*

2. Es ist $\Omega \cdot [U] = [\Omega \cdot U]$.

3. Es ist für alle $U \subset A$: $[U] = U \cup [\Omega \cdot U] = U \cup \Omega \cdot [U]$.

Zu 1.: Sei $\alpha \cdot u \in \Omega \cdot U$ mit $\alpha \in \Omega$ und $u \in U$. Da U abgeschlossen in A ist, ist $\alpha \cdot u \in U$. Ist β ein weiteres Element aus Ω, so ist $\beta \cdot (\alpha \cdot u) \in \Omega \cdot U$. Also folgt die Behauptung.
Zu 2.: Es ist $\Omega \cdot [U]$ eine abgeschlossene Menge, die $\Omega \cdot U$ enthält. Also ist $[\Omega \cdot U] \subset \Omega \cdot [U]$.

Durch Induktion zeige ich die umgekehrte Inklusion. Sei

$$T = \{u|u \in [U] \text{ und } \alpha \cdot u \in [\Omega \cdot U] \text{ für alle } \alpha \in \Omega\}$$

Es ist $U \subset T$.
Sei $u \in T$ und ein beliebiges $\alpha \in \Omega$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\alpha \cdot u \in [\Omega \cdot U]$. Ist $\beta \in \Omega$ beliebig, so ist auch $\beta \cdot (\alpha \cdot u) \in [\Omega \cdot U]$, da $[\Omega \cdot U]$ abgeschlossen gegenüber Ω ist. Also ist. Also ist für alle $\beta \in \Omega$: $\beta \cdot (\alpha \cdot u) \in [\Omega \cdot U]$. Daher ist $\alpha \cdot u \in T$. Das heißt T ist abgeschlossen gegenüber Ω. Also ist $T = [U]$. UNd damit folgt $\Omega \cdot [U] \subset [\Omega \cdot U]$.
Zu 3.: $U \cup [\Omega \cdot U]$ ist eine abgeschlossene Menge, die U enthält. Also ist $[U] \subset U \cup [\Omega \cdot U] = U \cup \Omega \cdot [U]$.
Da $[U]$ abgeschlossen ist, ist $\Omega \cdot [U] \subset [U]$ und natürlich $U \subset [U]$. Da $[U]$ abgeschlossen ist, ist $\Omega \cdot [U] \subset [U]$ und natürlich $U \subset [U]$. Also gilt die umgekehrte Inklusion: $U \cup \Omega \cdot [U] \subset [U]$. □

Unter gewissen Voraussetzungen vererbt sich die Eigenschaft nicht in einer Schleife zu liegen. Wann liegt ein Ort in einer Schleife? Wenn ein Weg zurückführt zu einem Ort kann der Wanderer eine Kreiswanderung machen. Wir fragen uns wann in einem Wegenetz Kreiswanderungen unmöglich sind.

Satz 3.2. *Sei $F\colon \Omega \times A \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha(a) \in A$ injektiv. Dann ist die Menge der Elemente, die nicht in einer Schleife liegen gegenüber Ω abgeschlossen.*

Liege a nicht in einer Schleife. Dann ist $a \notin \Omega \cdot [a]$. Sei $\alpha \in \Omega$. Angenommen $\alpha(a) \in \Omega \cdot [\alpha(a)]$. Dann gibt es ein $\beta \in \Omega$ und ein $b \in [\alpha(a)]$ mit $\alpha(a) = \beta(b)$. Daher ist $\alpha = \beta$ und $a = b$. Daher ist $a \in [\alpha(a)]$. Dies widerspricht der Voraussetzung über a. □

Definition 16 Sei A eine Ω- Kette. Ω kommutiert auf A, wenn für alle $\alpha, \beta \in \Omega$ und alle $a \in A$ gilt: $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = \beta \cdot (\alpha \cdot a)$. □

Satz 3.3. *Kommutiert Ω auf A und ist U gegenüber Ω in A abgeschlossen, so ist $\Omega^{-1}(U) := \{a|a \in A \text{ und } \alpha \cdot a \in U \text{ für ein } \alpha \in \Omega\}$ abgeschlossen in A.*

Sei $a \in \Omega^{-1}(U)$. Also gibt es ein $\alpha \in \Omega$, so dass $\alpha \cdot a \in U$ gilt. Ist $\beta \in \Omega$. so ist $\beta \cdot (\alpha \cdot a) \in U$, da U abgeschlossen ist. Daher ist $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = \beta \cdot (\alpha \cdot a) \in U$. Also ist $\beta \cdot a \in \Omega^{-1}(U)$. □

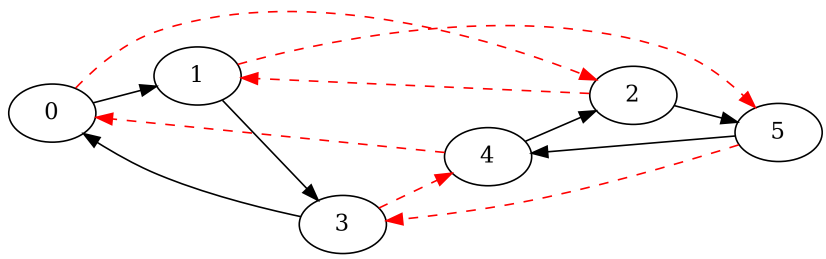


Abb. 3.8: Kommutatives Muster

Bemerkung. *Bei einer Korrespondenz bestimmen Anfang und Ende des Pfeile eindeutig den Pfeil. Bei einer Aktion kann es durchaus verschiedene Wege mit gleichem Anfang und Ende geben. Der Begriff des Köchers trifft auf solche Aktionen zu und verallgemeinert ihn.*

Beispiele:

53. Besteht Ω nur aus einem Element, so wirkt Ω auf jedem Ω-Muster (Ω-Kette) kommutativ.

54. Betrachte $\mathbb{N}$ mit den beiden Abbildungen $\alpha(x) = 2x + 1$ und $\beta(x) = 3x + 2$. Dann operieren α, β kommutativ auf $\mathbb{N}$.

Aufgaben:

26. Wie viel Wege gibt es in dem Bild 3.8 von 0 nach 1 gibt es? Jede Teilstrecke soll nur einmal vorkommen.

27. Bestimme in den Abbildungen der Bandmuster sogenannte Fundamentalbereiche. Das sind Bereiche, die das Bild „erzeugen“. Durch verschieben diese Bereiches ensteht das Muster.

28. Verfasse eine Konstruktionsbeschreibung des Bildes 3.4. Die Konstruktionsbeschreibung sollte so genau sein, dass sie einfach in eine Programmiersprache übersetzt werden kann.

29. Sei wieder $\mathbb{N}$ gegeben. Jetzt betrachten wir aber als dritte Abbildung $\gamma(n) = 5 \cdot n + 4$. Zeige:
    a) Die Abbildungen α, β, γ sind untereinander vertauschbar.

b) Ist $\alpha^n\beta^m\gamma^o = \alpha^{n'}\beta^{m'}\gamma^{o'}$, so ist $n = n'$, $m = m'$ und $o = o'$.

c) Gib eine Basis von $(\mathbb{N}, \alpha, \beta, \gamma)$ an.

Einfache Muster

Satz 3.4 (Einfache Muster). *Für ein Ω-Muster sind äquivalent:*

1. *Das einzige nicht leere Untermuster von A ist A.*
2. *Für alle $a \in A$ ist $[a] = A$.*

1.$\Longrightarrow$2.: Sei $a \in A$. Dann ist $[a]$ ein Untermuster von A, das nicht leer ist. Also ist $[a] = A$.
2. $\Longrightarrow$1.: Sei U ein nicht leeres Untermuster und $a \in U$. Dann ist nach Voraussetzung $A = [a] \subset U$. Also ist $U = A$. □

Definition 17 Trifft eine der Aussagen des Satzes und damit beide zu, so heißt das Ω-Muster A einfach. ◻

Ein Muster ist einfach, wenn man von jedem Punkt aus überall hin kommt.
Beispiele:

55. Jeder Kreis (1-Muster) ist einfach.
56. Der folgende gerichtete Graph ist einfach.

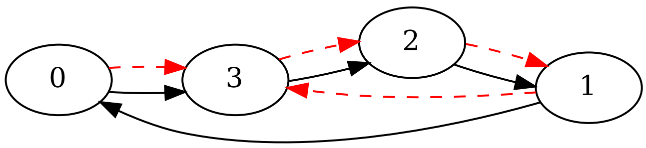


Abb. 3.9: Ein nicht kommutatives einfaches Muster

Von 1 geht zwei verschiedene Pfeile aus. Ein schwarzer Pfeil und ein roter Pfeil. Die schwarzen Pfeile zeigen die Funktion α und die roten die Funktion β. Es ist $\alpha \cdot 0 = \beta \cdot 0$, $\alpha \cdot 3 = \beta \cdot 3$ und $\alpha \cdot 2 = \beta \cdot 2$. Das Muster ist nicht kommutativ. Denn $\alpha \cdot \beta \cdot 1 = 2$ und $\beta \cdot \alpha \cdot 1 = \beta \cdot 0 = 3$.

3.1.1 Erzeugung von Mustern

Definition 18 Eine Teilmenge $E \subset A$ erzeugt das Ω-Muster A, wenn $[E] = A$ ist. □

Wir betrachten $\mathbb{N}$ und auf der Menge $\mathbb{N}$ zwei Funktionen $\alpha(n) = 2 \cdot n + 1$ und $\beta(n) = 3 \cdot n + 2$. Wir rechnen das von 0 erzeugte Untermuster [0] aus. Es ergibt sich der Graph:

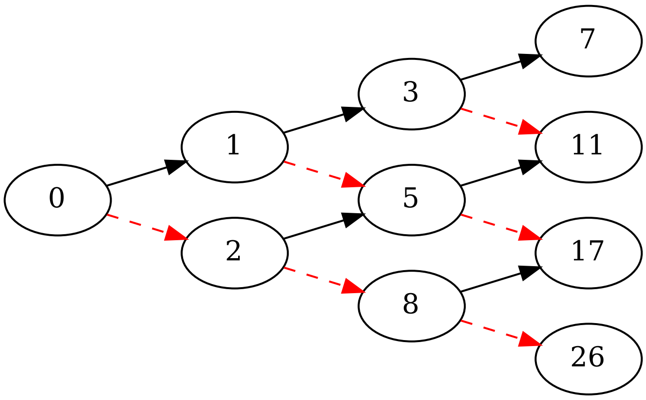


Abb. 3.10: Ein kommutatives Muster. Die schwarzen Pfeile entsprechen der Funktion $\alpha(n) = 2n + 1$ und die roten Pfeile der Funktion $\beta(n) = 3n + 2$

Lemma 4
1. *α und β kommutieren miteinander. Ω wirkt aus $\mathbb{N}$ kommutativ.*
2. *Ist $\alpha(x) = \beta(y)$, so ist $y \in \alpha(\mathbb{N})$.*
3. *Ist y eine gerade Zahl so ist $\alpha(\mathbb{N}) \cap \{\beta^n(y) | n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.* □

Zu a: Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann ist $\beta(\alpha(x)) = \beta(2 \cdot x + 1) = 3 \cdot (2 \cdot x + 1) + 2 = 6 \cdot x + 5$. Genau dasselbe ergibt sich bei umgekehrter Auswertung.

Zu b: Sei $\alpha(x) = \beta(y)$. Dann ist $2 \cdot x + 1 = 3 \cdot y + 2$. Rechnen wir modulo 2 ergibt sich $1 = y \bmod 2$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $y = 2 \cdot k + 1 = \alpha(k)$. Daher ist $y \in \alpha(\mathbb{N})$.
Zu 3: Ist y eine gerade Zahl, so ist $\beta^n(y)$ gerade für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits besteht $\alpha(\mathbb{N})$ nur aus ungeraden Zahlen. $\square$

Lemma 5 *Seien $a < b$ gerade Zahlen und $\alpha^m\beta^n(a) = \alpha^{m'}\beta^{n'}(b)$., so ist $m = m'$ und b ist in der β- Bahn von a.* $\square$

Es sei $m \geq m'$. Dann ist $\alpha^{m-m'}\beta^n(a) = \beta^{n'}(b)$. Wäre $m > m'$ stünde links in der Gleichung eine ungerade Zahl und rechts stünde eine gerade Zahl. Das geht nicht. (Ist b gerade, so ist $3b + 2)$ gerade. Ist x beliebig, so ist $2x + 1$ ungerade. Also ist $\beta^n(a) = \beta^{n'}(b)$. Da $a < b$ ist, folgt $n > n'$. Also ist $b = \beta^{n-n'}(a)$.
Ist $m' \geq m$ so folgt: $\beta^n(a) = \alpha^{m'-m}\beta^{n'}(b)$. Da a gerade ist folgt $\beta^n(a) = \beta^{n'}(b)$. Daher folgt b liegt in der Bahn von a, da $a < b$. $\square$

Lemma 6 *Seien $a < b$ und $a, b \notin \beta(\mathbb{N})$. Dann ist $[a] \cap [b] = \emptyset$* $\square$

Angenommen $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Dann gibt es $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^m\beta^n(a) = \alpha^{m'}\beta^{n'}(b)$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $b = \beta^k(a)$. Das heißt $b \in \beta(\mathbb{N})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Bemerkung. *Dies hängt mit der Eindeutigkeit der Zerlegung $\alpha^m\beta^n$ zusammen. Beispiel, wo diese Zerlegung nicht eindeutig ist: $\alpha(n) = 2 + n$ und $\beta(n) = 3 + n$. Dann ist $\beta^2 = \alpha^3$.*

Satz 3.5. *Die Zahlen $E := \{6l | l \in \mathbb{N}\} \cup \{6l + 4 | l \in \mathbb{N}\}$ bilden ein Erzeugendensystem von $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$*

Eine Zahl der Form $6 \cdot l \notin \Omega \cdot \mathbb{N}$. Denn $6 \cdot l = \alpha(n)$ ist unmöglich, da $\alpha(n)$ stets ungerade ist. Auch unmöglich ist $6l = 3 \cdot k + 2$. Genausowenig kann $6l + 4 \in \Omega \cdot \mathbb{N}$ sein. Bleibt zu zeigen, dass sie $\mathbb{N}$ erzeugen. Angenommen es ist $\mathbb{N} \backslash [E]$ nicht leer. Dann gibt es eine kleinste Zahl m in dieser Menge. Angenommen $m = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Es ist $k \notin [E]$, sonst wäre $\alpha(k) = 2k + 1 \in [E]$. Dann wäre k eine kleinere Zahl, die nicht in $[E]$ ist.
2. Fall: Ist $m = 6l$ oder $m = 6l + 4$, so ist $m \in E$. Andernfalls ist $m = 6l + 2$. Dann ist $m = 3(2l) + 2 = \beta(2l) = m$. Damit wäre $2l \notin [E]$ eine kleinere Zahl nicht in $[E]$. Also ist $2l \in [E]$ und daher war die Annahme $m \notin [E]$ widersprüchlich. $\square$

Aufgaben:

30. Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit den beiden Abbildungen $\alpha(n) = 3 + n$ und $\beta(n) = 5 + n$.
    a) Zeichne den internen Graphen (Pfeildiagramm) des Musters $(A, \alpha, \beta) = (\mathbb{N}, \alpha, \beta)$.
    b) Zeige Das von 0 erzeugte Untermuster von M ist $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 7\}$.
    c) Berechne das von 1 erzeugte Untermuster. Berechne $[1] \cap [0]$.
    d) Berechne $[0] \cap [1] \cap [2] \cap [4] \cap [7]$
    e) Zeige: Sei (A, α, β) ein Muster in dem α, β kommutieren. Außerdem gelte $\alpha^5 = \beta^3$. Zeige: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $f : [0] \to A$ mit $f(0)$. (Diese Aufgabe erst nach dem Begriff Morphismus.)
    f) Berechne einen Morphismus $f : [1] \to [0]$ mit $f(1) = 0$. Zeige: Es ist ein Isomorphismus.

3.2 Morphismen von Mustern

Wir sehen nach Platon nur den Schatten von den wahren Wesen, den Ideen. Oder drücken wir es etwas anders aus: Wir erfahren die Projektionen von Dingen. Niemals sind wir uns der Dinge selber gewiss. Ein Baum ein Berg kann die Netzhaut zu völlig verschiedenen Bildern anregen. Je nachdem von welcher Seite, zu welcher Tageszeit oder welcher Jahreszeit er betrachtet wird. Jeder sieht andere Bilder vom „gleichen" Objekt. Dem Blinden erschließt sich eine andere Welt als dem Sehenden. Die Fledermaus hört den Wald durch den sie fliegt, indem ihr Hirn die Ultraschallsignale auswertet, die sie ausgesendet hat. Die Eule sieht mit ihren Augen die Bäume zwischen denen sie fliegt. Und dennoch ist es der gleiche Wald. Thomas von Aquin hat es so formuliert. „Mag auch das Auge des Nachtvogels die Sonne nicht sehen, es schaut sie dennoch das Auge des Adlers." (zitiert nach *Das Auge des Adlers*, Seite 9). Der Rückschluss vom Bild, von der Aufzeichnung auf die wirklichen Dinge ist selten eindeutig. Wir sehen an der Himmelssphäre leuchtende Punkt. Die Projektionen von Sternen. Gewissheit über den Stern, der sein Bild auf die Sphäre projiziert, wird es nie geben. Aber deswegen ist das Streben nach Erkenntnis nicht sinnlos. Wir malen Bilder, deuten sie und zeichnen andere tiefere Bilder. Es gibt bessere und schlechtere Deutungen des Bildes. Manche Bilder, manche Deutungen erfassen mehr Zusammenhänge, sind welthaltiger.
Die Sonnenuhr zeichnet etwas von der Sonne nach. Sie übersetzt die Bewegung der Sonne, oder nach neuerem Weltbild, die Bewegung der Erde, in die Wanderung des Schattens auf dem Ziffernblatt. Dabei bleibt irgend etwas von der

Struktur, Form der ursprünglichen Bewegung erhalten. Das sind die Morphismen, die wir jetzt betrachten.

Abb. 3.11: Sonnenuhr in Südtirol

Satz 3.6. *Seien A, B Ω- Muster. Für eine Abbidung $f\colon A \to B$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *Das Diagramm ist kommutativ für alle $\alpha \in \Omega$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

2. *Der Graph $G = \{(a, f(a)) | a \in A\}$ ist gegenüber Ω abgeschlossen.*

3. *Für alle $\alpha \in \Omega$ gilt: $\alpha \cdot f = f \cdot \alpha$.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $(a, f(a)) \in G$ und $\alpha \in \Omega$. Dann ist $\alpha \cdot (a, f(a)) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot f(a)) = (\alpha \cdot a, f(\alpha \cdot a))$. Es folgt die Behauptung. Der Rest des Beweises entspricht genau dem Beweis des Satzes 2.17 □

Definition 3.2.1. Eine Abildung zwischen den Ω- Mustern $f\colon A \to B$ heißt Morphismus, wenn sie die äquivalenten Eigenschaften des Satzes erfüllt.

Die Identität ist ein Morphismus. Und die Verkettung von Morphismen ist ein Morphismus.
Aufgaben:

31. Betrachte $(\mathbb{N}, \alpha)$ mit $\alpha(n) = 2n + 1$. Zeige Es gibt eine mit α vertauschbare Funktion, mit $f(2 \cdot n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

32. Es gibt eine mit α vertauschbare Funktion f mit $f(2n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.7. *Die Ω-Muster bilden eine Kategorie.*

Das ist einfach.

Bemerkung. *Ist $B = A$, so sind die Morphismen gerade die Selbstabbildungen $f : A \to A$, die mit allen Elementen aus Ω vertauschbar sind. Kommutator und Bikommutator spielen auch bei Moduln eine große Rolle.*

Satz 3.8. *Ist $: A \to B$ ein Morphismus zwischen zwei $\Omega-$Mustern, ist $U \subset A$ abgeschlossen in A und ist V abgeschlossen in B, so ist $f(U)$ abgeschlossen in B und $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in A.*

Sei $b \in f(U)$. Dann gibt es ein $a \in U$ mit $b = f(u)$. Ist $\alpha \in \Omega$, so ist $\alpha \cdot a \in U$. Daher ist $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot b \in f(U)$. Also ist $f(U)$ abgeschlossen in B. Ist $V \subset B$ abgeschlossen in B und $a \in f^{-1}(V)$. Also ist $f(a) \in V$ und daher $\alpha \cdot f(a) = f(\alpha \cdot a) \in V$. Daher ist $\alpha \cdot a \in f^{-1}(V)$. Das war behauptet. □

Satz 3.9. *Sind zwei Morphismen $f, g : A \to B$ auf einem Erzeugendensystem gleich, so sind sie gleich.*

Sei E ein Erzeugendensystem. Für alle $e \in E$ ist nach Voraussetzung $f(e) = g(e)$. Es sei

$$T = \{a | a \in A \text{ und } f(a) = g(a)\}$$

Sei $\alpha \in \Omega$ und $a \in T$. Es folgt $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot g(a) = g(\alpha \cdot a)$. Daher ist T gegenüber Ω abgeschlossen. Außerdem ist $E \subset T$. Daher ist $T = A$ □

Produkte

Sei $(A_i|i \in I)$ eine Familie von Ω- Ketten. Wir betrachten

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f|f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ mit } f(i) \in A_i\}$$

Ist $f \in \prod\limits_{i\in I} A_i$, so bezeichne ich mit $a_i := f(i)$. Weiter sei $(a_i) := f$. Es heißt a_i die i-te Komponente von $f = (a_i)$. Die Abbildung $\pi_i\colon \prod\limits_{i\in I} A_i \ni (a_i) \mapsto a_i \in A_i$ heißt $i$te Projektion. $\prod\limits_{i\in I} A_i$ wird durch $\alpha\cdot(a_i) := (\alpha\cdot a_i)$ zu einer Ω-Kette. Diese Ω-Kette hat die Eigenschaft eines kategoriellen Produktes.

Satz 3.10 (Produkte von Ketten). *Sei $(A_i|i \in I)$ eine Familie von Ω- Ketten. Weiter sei $(f_i|i \in I)$ eine Familie von Morphismen $f_i\colon B \to A_i$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon B \to \prod\limits_{i\in I} A_i$ mit $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$. Durch diese Eigenschaft ist das Produkt der A_i bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Der Beweis geht wie üblich.
Beispiele:

57. Sei $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1+)$ und $B = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, 1+)$. Es gibt nur eine einzige abgeschlossene Teilmenge von $A \times B$. Denn startete man mit dem Paar $(0,0)$ und wendet wiederholt $1+$ auf das Paar an, so erhält man die Kette

$$(0,0) \to (1,1) \to (0,2) \to (1,0) \to (0,1) \to (1,2) \to (0,0).$$

In dieser Kette kommt jedes Element aus dem Produkt $A \times B$ genau einmal vor. Außerdem ist die Kette kreisförmig. Man kann also bei jedem Element starten und gelangt zu jedem anderen. Also ist $A \times B$ die einzige abgeschlossene Teilmenge von $A \times B$. Es ist $A \times B \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, 1+)$. Dies ergibt sich aus dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (1,1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,2) \arrow[r] \arrow[d] & (1,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (1,2) \arrow[r] \arrow[d] & (0,0) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

58. Sei $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Betrachte $A \times A$. Hier gibt es drei echte Teilmengen, die abgeschlossen sind:

$$\begin{aligned}(0,0) \to (1,1) \to (2,2) \to (0,0)\\(0,1) \to (1,2) \to (2,0) \to (0,1)\\(0,2) \to (1,0) \to (2,1) \to (0,2)\end{aligned}$$

Dies ist isomorph zur elementfremden Vereinigung $A \sqcup A \sqcup A$.

Koprodukte

Ist $(A_i|i \in I)$ eine Familie von Ketten, so wird die elementfremde Vereinigung

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \{(i,a)|a \in A_i\}$$

durch die folgende Definition zu einer Ω-Kette. Ist $x \in \bigsqcup_{i\in I} A_i$, so gibt es genau $i \in I$ und ein $a \in A_i$ mit $x = (i,a)$. Man erklärt für ein $\alpha \in \Omega$: $\alpha \cdot x := (i, \alpha \cdot a)$. Die elementfremde Vereinigung der A_i wird auf diese Weise zu dem Koprodukt der Familie $(A_i|i \in I)$. Es wird mit $\coprod_{i\in I} A_i$ bezeichnet. Genauer:

Satz 3.11 (Koprodukt). *Ist $(A_i|i \in I)$ eine Familie von Ω- Ketten. und $f_i \colon A_i \to B$ eine Familie von Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f \colon \bigsqcup_{i\in I} A_i \to B$ mit $fq_i = f_i$ für alle $i \in I$. Dabei sind $q_i \colon A_i \ni a \mapsto (i,a) \in \bigsqcup A_i$ die natürlichen Inklusionen.*

Der Beweis des Satzes ist wie üblich.
Ist $A_i \cong A$ für alle $i \in I$, so bezeichnet man mit $A^I := \prod A_i$ und $A^{(I)} := \coprod A_i$.

Kommutative Wirkung: (Eventuell zum Prolog) Am Strand können wir Steine nebeneinander legen, Striche in den Sand zeichnen, verschiedenfarbige Muscheln in eine Kette legen
......||||..||...||...||...|..|||

Satz 3.12. *1. Wirkt Ω auf A kommutativ, so ist für jeden Morphismus $f \colon A \to B$ auch die Abbildung $(f \cdot \alpha)(a) := f(\alpha \cdot a)$ ein Morphismus.*

2. *Wirkt Ω kommutativ auf B, so ist für jeden Morphismus $f\colon A \to B$*

$$\hat{f} = \alpha \cdot f\colon A \ni a \mapsto \alpha \cdot f(a) \in B$$

ein Morphismus. Da heißt ${}_{\Omega}[A, B]$ wird auf der linken Seite zu einem Ω-Muster.

Zu 1. Sei $\beta \in \Omega$. Man erhält für $a \in A$: $(f \cdot \alpha)(\beta \cdot a) = f(\alpha \cdot \beta \cdot a) = f(\beta \cdot \alpha a) = \beta \cdot f(\alpha \cdot a) = \beta \cdot (f \cdot \alpha)(a)$. Daher folgt die Behauptung.
Zu 2. Seien $\alpha, \beta \in \Omega$ und $a \in A$. Wir erhalten $(\alpha \cdot f)(\beta \cdot a) = \alpha \cdot (f(\beta \cdot a)) = \alpha \cdot (\beta \cdot f(a)) = \beta \cdot (\alpha \cdot f(a)) = \beta \cdot \hat{f}(a)$. Also ist $\hat{f}$ ein Morphismus. □

3.2.1 Verträgliche Äquivalenzrelationen

Definition 19 Sei A ein Ω Muster. Eine Äquivalenzrelation auf A heißt mit Ω verträglich, wenn für alle $a, a' \in A$ und alle $\alpha \in \Omega$ gilt: Ist $a \sim a'$ dann ist $\alpha \cdot a \sim \alpha \cdot a'$ □

Ist „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf A, so haben wir die surjektive Abbildung $\pi\colon A \ni a \mapsto \overline{a} \in A/\sim$. Dabei ist $\overline{a} = \{a' | a \sim a' \in A\}$ die von a bestimmte Äquivalenzklasse und $A/\sim = \{\overline{a} | a \in A\}$.

Satz 3.13. *Sei $\sim$ eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation.*
$\pi\colon A \ni a \mapsto \overline{a} \in A/\sim$.
$A/\sim$ wird durch die Definition $\alpha \cdot \overline{a} = \overline{\alpha \cdot a}$ zu einem Ω Muster und π ist ein Ω Morphismus.

Zu zeigen ist, dass die Zuordnung $\overline{a} \mapsto \overline{\alpha a}$ nicht von der Wahl des Repräsentanten aus $\overline{a}$ abhängt.Sei daher $b \in \overline{a}$ beliebig. Das heißt $a \sim b$ und $\alpha \in \Omega$. Nach Voraussetzung ist $\alpha \cdot a \sim \alpha \cdot b$. Daher ist $\overline{\alpha \cdot a} = \overline{\alpha \cdot b}$. Das war zu zeigen. Die Abbildung π ist tatsächlich ein Morphismus. Denn $\pi(\alpha \cdot a) = \overline{\alpha \cdot a} = \alpha \cdot \overline{a} = \alpha \cdot \pi(a)$. □

Satz 3.14. *Ist $f\colon A \to B$ ein Morphismus zwischen $\Omega-$Mustern, so ist $a \sim a' \iff f(a) = f(a')$ eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation.*

Sei $a \sim a'$. Also ist $f(a) = f(a')$. Ist $\alpha \in \Omega$. Dann folgt: $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot f(a') = f(\alpha \cdot a')$, da f ein Morphismus ist. Also ist $\alpha \cdot a \sim \alpha \cdot a'$. Und daher ist $\sim$ eine mit Ω verträgliche Äquivalenrelation. □

Satz 3.15 (Homomorphiesatz für Muster). *Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus zwischen Mustern. Dann gibt es einen injektiven Morphismus $f^*\colon A/\sim_f \to B$ mit $f = f^*\pi$.*

Es ist $a \sim a' \iff f(a) = f(a')$ eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation. Daher ist die surjektive Abbildung $\pi\colon A \to A/\sim$ ein Morphismus. Wir erklären $f^*\colon A/\sim \ni \overline{a} \mapsto f(a) \in B$. Das ist eine wohldefinierte Abbildung. Sie hängt nicht von der Wahl des Vertreters in $\overline{a}$ ab. Denn ist $a' \in \overline{a}$, so ist $a \sim a'$ und daher $f(a) = f(a')$. Außerdem ist es ein Morphismus. Denn es ist $f^*(\alpha \cdot \overline{a}) = f^*(\overline{\alpha \cdot a}) = f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot f^*(\overline{a})$. Dieser Morphismus ist außerdem injektiv. Denn sei $f^*(\overline{a}) = f^*(\overline{a'})$, so ist $f(a) = f(a')$, daher $a \sim a'$ und daher $\overline{a} = \overline{a'}$.

Satz 3.16. *Ist A ein $\Omega-$Muster und U eine abgeschlossene Teilmenge von A, so wird folgendermaßen eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation definiert:*

$$a \sim b \iff a \in U \text{ und } b \in U \text{ oder } a = b.$$

In diesem Fall bezeichnet man $A/\sim$ mit A/U. Für alle $\alpha \in \Omega$ ist $\alpha \cdot \pi(U) = \pi(U)$. Es ist $\pi(U)$ ein Fixpunkt bezüglich aller Morphismen.

1. $\sim$ ist reflexiv. Da $a = a$ ist, ist $a \sim a$.
2. $\sim$ ist symmetrisch. Ist $a = b$, so ist $b = a$ und daher $b \sim a$.
3. $\sim$ ist transitiv. Es sei $a \sim b$ und $b \sim c$. 1. Fall. a und b sind aus U. Ist in dieser Situation $b = c$, so sind $a, c \in U$. Daher ist $a \sim c$. Ist in der Situation $b, c \in U$ so sind $a, c \in U$. Daher ist $a \sim c$.
2. Fall: $a = b$. Ist in der Situation $b, c \in U$, o sind $a = b, c \in U$. Also ist $a \sim c$. Ist in der Situation auch $b = c$ so ist alles klar.
Also ist dies eine Äquivalenzrelation. Sie ist auch mit Ω verträglich. Denn seien $a \sim b \in A$. Außerdem sei $\alpha \in \Omega$. sind $a, b \in U$, so sind $\alpha \cdot a$ und $\alpha \cdot b \in U$. Also ist $\alpha \cdot a \sim \alpha \cdot b$. Ist eines der beiden Elemente nicht in U, so können sie nur äquivalent sein, wenn sie gleich sind. Dann ist aber auch $\alpha \cdot a = \alpha \cdot b$. Also folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.17. *In der Kategorie der Ω- Muster ist jeder Epimorphismus eine surjektive Abbildung.*

Sei $f\colon A \to B$ ein Epimorphismus zwischen den Mustern. Sei $U = f(B)$. Es ist U abgeschlossen in B. Ist $\pi\colon B \to B/U$ der Morphismus, der oben definiert wurde und ist $u \in U$ beliebig, so ist für alle $u' \in U$: $\pi(u') = \pi(u)$. Und es ist für alle $\alpha \in \Omega$: $\alpha \cdot \pi(u) = \pi(u)$. Daher ist auch die konstante Abbilgung $k\colon B \ni b \mapsto \pi(u) \in B/U$ ein Morphismus. Für alle $a \in A$ ist $\pi(f(a)) = k(f(a)) = \pi(u)$. Also ist $k \circ f = \pi \circ f$. Daher ist $k = \pi$. Es ist aber für $\pi(b) = b$ für $b \notin U$. Daher kann es kein $b \notin U$ geben. Also ist $U = B$. Daher ist f eine surjektive Abbildung. □

Satz 3.18. *In der Kategorie der* Ω*- Muster gibt es Differenzkokerne.*

Seien $f, g\colon A \to B$ Morphismen zweischen Ω-Mustern. Weiter sei

$$H := \{(f(a), g(a)) | a \in A\} \subset B \times B.$$

R die kleinste Äquivalenzrelation, die H enthält und mit Ω verträglich ist. Sei weiter $h\colon B \to C$ mit $hf = hg$. Es definiert h durch $x \sim y \iff h(x) = h(y)$ eine Äquivalenzrelation auf B, die mit Ω verträglich ist. Außerdem enthält sie R. Wir erklären:

$$h^*\colon B/\sim \ni \pi(b) \mapsto h(b) \in C$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und ein Morphismus. Es ist auch der einzige Morphismus mit $h^*\pi = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & C \\ & B/\sim \arrow[ur, "h*"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 3.19 (Differenzkern). *In der Kategorie der* Ω*- Muster gibt es Differenzkerne.*

Aufgaben:

33. Betrachte $(\mathbb{N}, 1+)$ mit den beiden Morphismen $f(0) = 0$ und $g(0) = m$. Berechne den Differnzkokern.
34. Betrachte $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha(n) = 2n + 1$ und $\beta(n) = 2n + 2$.
    a) Es soll $0 \sim 2$ gelten. Berechne $\mathbb{N}/\sim$.
    b) Es soll $0 \sim 4$ gelten. Berechne $\mathbb{N}/\sim$.

35. Sind drei aufeinander folgende Zahlen in $A = 3\mathbb{N} + a\mathbb{N}, a \in \mathbb{N}$, so sind alle weiteren natürlichen Zahlen in A.
36. Bestimme $5\mathbb{N} + a\mathbb{N}$.

Satz 3.20. *Sei A ein Ω Muster. Ist $\sim$ die kleinste mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation mit $\alpha\beta \cdot a \sim \beta\alpha \cdot a$ dann gilt: Auf $A/\sim$ wirken α, β kommutativ.*

Es ist $\beta\alpha \cdot a \sim \alpha\beta \cdot a$. Sei $\pi\colon A \to A/\sim$ der kanonische Epimorphismus. Für $\pi(a)$ und α, β:

$$\alpha\beta \cdot \pi(a) = \pi(\alpha\beta \cdot a) = \pi(\beta\alpha \cdot a) = \beta\alpha \cdot \pi(a)$$

Beispiele:

59. Sei $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\alpha(x) = x + 1$ und $\beta(x) = 2x$. Dann ist $\beta\alpha(x) = 2x + 2$ und $\alpha\beta(x) = 2x + 1$. Für alle $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist $2x + 1 \sim 2x + 2$. Daher ist $1 \sim 2$ und daher $\alpha(1) = 2 \sim \alpha(2) = 0$. Also auch $2 \sim 0$. Das heißt $A/\sim$ besteht nur aus einem Element.
60. Es genügt nicht nur auf einem Erzeugendensystem zu testen ob α, β kommutativ auf A wirken. Betrachten folgendes Beispiel: $A : \{0, 1, 2, 3\}$

	0	1	2	3
α	1	1	3	1
β	2	3	2	2

Von 0 aus kann man jedes Element aus A erreichen. Es ist $[0] = A$. Auch ist $\beta\alpha(0) = \beta(1) = 3$ und $\alpha\beta(0) = \alpha(2) = 3$. Aber! $\beta\alpha(1) = \beta(1) = 3$ und $\alpha\beta(1) = \alpha(3) = 1$. Daher wirken α, β nicht kommutativ auf A.

3.2.2 Rekursionssatz

Beispiele:

61. Jede Menge A wird mit der Identität zu einer Kette. Durch die Identität wird der Menge noch keine Struktur aufgeprägt. Es sei $\mathbf{I} = \{0\}$ eine Menge mit einem Knoten und der Identität als Selbstabbildung. Zu jeder Menge $(A, 1_A)$ und jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon I \to A$ mit $f(0) = a$. Das ist ziemlich trivial. Deswegen wollen wir ein etwas verwickelteres Beispiel betrachten.
62. Wir betrachten $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit der Abbildung $1+$ also $1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 0$. Ist $f\colon \mathbb{Z}_2 \to A$ ein Morphismus und $a = f(a)$. Dann ist $f(1) = f(1 + 0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot a$. Weiter ist $f(0) = f(1 + 1) = \alpha^2 a$. Umgekehrt gilt:

    Ist (A, α) eine Kette mit $\alpha^2 = Id$, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $f\colon \mathbb{Z}_2 \to A$ mit $f(0) = a$.

Beweis: Wir erklären $f(0) = a$ und $f(1) = \alpha(a)$. Dann ist f ein Morphismus. Denn betrachten wir den Graphen von f:

$(0,\cdot a) \longrightarrow (1, \alpha(a)) \longrightarrow (0, \alpha^2(a) = a$

Er ist abgeschlossen gegenüber $(1+, \alpha)$. Daher ist f ein Morphismus.

Satz 3.21 (Rekursionssatz). *Sei A eine Ω-Kette. E erzeuge A und $E \cap \Omega \cdot A = \emptyset$. Die Abbildung*

$$\cdot \colon \Omega \times A \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a \in A$$

sei injektiv. Dann gilt: Zu jeder Ω-Kette B und jeder Abbildung $f \colon E \to B$ gibt es genau einen Morphismus $f^* \colon A \to B$, so dass $f^* \circ \iota = f$ gilt. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "f*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Sei $D = \{(e, f(e)|e \in E\}$. Da f eine Funktion ist D rechtseindeutig. Das heißt zu jedem $e \in E$ gibt es nur ein $b \in B$ mit $(e, b) \in D$. Es wird $A \times B$ zu einer Ω-Kette durch $\alpha \cdot (a, b) := (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$.
Sei $[D]$ der Ω- Abschluss von D in $A \times B$.
Beh.: $[D]$ ist rechtseindeutig
Beweis durch Induktion: Es sei

$$T = \{a|a \in A \text{ und: Es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in [D]\}$$

- Es ist $E \subset T$: Denn sei $(e, b) \in [D] = D \cup \Omega \cdot [D]$, so gäbe es ein $\alpha \in \Omega$ und ein $(a', b') \in [D]$ mit $\alpha \cdot (a', b') = (e, b)$. Daher ist $\alpha \cdot a' = e$. Dies kann nicht sein, da $E \cap \Omega \cdot A = \emptyset$ vorausgesetzt ist. Also ist $(e, b) \in D$. Daher ist $(e, b) = (e, f(e)$.

- T ist abgeschlossen gegenüber Ω:

  Sei $a \in T$. Dann gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in [D]$. Ist $\alpha \in \Omega$, so ist sicher $\alpha \cdot (a, b) \in [D]$. Ich zeige $\alpha \cdot b$ ist das einzige Elemant aus B, so dass $(\alpha \cdot a, b') \in [D]$ ist. Denn sei $(\alpha \cdot a, b')) \in [D]$. Dann ist $(\alpha \cdot a, b')$ sicher nicht in D. Denn sonst wäre $\alpha \cdot a \in E$. Also gibt es ein $\beta \in \Omega$ und ein $(a'', b'') \in [D]$ mit $(\alpha \cdot a, b') = \beta \cdot (a'', b'')$. Daher ist $\alpha \cdot a = \beta \cdot a''$. Es folgt $\alpha = \beta$ und $a = a''$. Daher ist (a, b'') und (a, b) in $[D]$. Da $a \in T$ ist folgt $b = b''$. Daher folgt $b' = \alpha \cdot b'' = \alpha \cdot b$. Also ist T abgeschlossen gegenüber Ω. Also ist $T = A$. $\square$

Daher ist $[D]$ der Graph einer Funktion $A \to B$. Da $[D]$ abgeschlossen gegenüber Ω ist, ist f auch ein Morphismus. □

Bemerkung. *Hier wir nochmal bewiesen, was vorher schon bewiesen ist.*

Definition 20 Eine Ω- Muster heißt frei, wenn folgendes gilt:

1. $\cdot\colon \Omega \times A \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a \in A$ ist injektiv und nicht surjektiv.
2. Ist $E = A \setminus \Omega \cdot A$, so ist $[E] = A$. Das heißt E erzeugt A.

In diesem Fall heißt E Basis von (A, Ω). □

Satz 3.22. *Haben die freien Ω- Muster A, B gleich mächtige Basen, sind sie isomorph.*

Sei E eine Basis von A und F eine Basis von B. Nach Voraussetzung gibt es eine bijektive Abbildung $f\colon E \to F$ mit der Umkehrabbildung $g\colon F \to E$. Aus dem Rekursionssatz (siehe 3.21) ergibt sich: Es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $f^*\colon A \to B$ mit $f^*\iota = f$. Genauso gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $g^*\colon B \to A$ mit $g^*(b) = g(b)$ für alle $b \in F$. Für $e \in E$ folgt: $g^*f^*(e) = g^*f(e) = g(f(e)) = e$, da f, g invers zueinander sind. Außerdem ist $1_A(e) = e$ für alle $e \in E$. Da 1_A ein Morphismus ist folgt wegen Satz 3.9, dass $g^*f^* = 1_A$ ist. Genauso ist $f^*g^* = 1_B$. Daher sind f^* und g^* zueinander inverse Morphismen. □

3.2.3 Verträgliche Äquivalenzrealtionen auf NxN

Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erklären wir zwei Abbildungen.

$$\alpha(n, m)) = (n + 1, m), \beta(n, m) = (n, m + 1)$$

α, β wirken auf $\mathbb{N}^2$ kommutativ. Dadurch wird $\mathbb{N}^2$ zu einem Ω Muster wobei Ω zwei Elemente enthält. Die gegenüber Ω abgeschlossenen Teilmengen sind auch abgeschlossen gegenüber der Addition von Paaren (a, b) mit $a, b \in \mathbb{N}$. Genauer heißt das: Ist U eine abgeschlossene Menge und $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, so ist für alle $u \in U$ auch $u + (a, b) \in U$.

Satz 3.23. *Ist A, α, β ein Ω Muster und wirkt Ω kommutativ auf A, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $f : \mathbb{N}^2 \to A$ mit $f((0,0)) = a$.*

(Frage: Hängt das irgendwie mit der Produkteigenschaft von $\mathbb{N}^2$ zusammen?)

Wir erklären: $f((m,n)) = \alpha^m \beta^n(a)$. Man sieht die behaupteten Dinge leicht. □

Beispiele:

63. Es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to (\mathbb{N}, 1+)$. Die zugehörige Äquivalenzrelation ist: $(a,b) \sim (a'.b') \iff a + b = a' + b'$. Der Beweis sei eine Aufgabe. Deute die Äquivalenklassen auch geometrisch.

Wann ist ein Ω Muster isomorph zu $\mathbb{N}^2$. Ein nicht ganz triviales Beispiel wollen wir betrachten. Dabei wird sich herausstellen, dass $\mathbb{N}^2$ isomorph als $\Omega = \{\alpha, \beta\}$ Muster zu einer Teilmenge $\mathbb{N}$ ist.
Sei $\alpha : \mathbb{N} \ni n \mapsto 2 \cdot n + 1 \in \mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \ni n \mapsto 3 \cdot n + 2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt

Satz 3.24. *Seien α, β wie oben. Dann ist die Abbildung.*

$$\mathbb{N}^2 \ni (m,n) \mapsto \alpha^m \beta^n(0)$$

ein injektiver Morphismus $\mathbb{N}^2 \to (\mathbb{N}, \alpha, \beta)$

Es bleibt nur zu zeigen, dass die Abbildung injektiv ist. Seien dazu (m,n) und $(m'.n')$ mit $\alpha^m \beta^n(0) = \alpha^{m'} \beta^{n'}(0)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden $m \leq m'$. Dann ist $\beta^n(0) = \alpha^{m'-m} \beta^{n'}(0)$, da α injektiv ist. Wegen dem Lemma 4ist $m' = m$. Es folgt $\beta^n(0) = \beta^{n'}(0)$. Daher ist $\beta^{n-n'}(0) = 0$. Es folgt $n = n'$, da $0 \notin \beta(\mathbb{N})$. □

Dieser Morphismus ist keineswegs surjektiv. Zum Beispiel ist 4 nicht im Bild des Morphismusses.

Bemerkung. *Sei (A, α, β) irgend ein Ω Muster mit $\alpha\beta = \beta\alpha = 1_A$. Dann gilt: $\alpha^m \beta^n = \alpha^{m'} \beta^{n'} \iff \alpha^{m+n'} = \alpha^{m'+n}$.*

$$\begin{aligned} \alpha^m \beta^n &= \alpha^{m'} \beta^{n'} \\ \alpha^m &= \alpha^{m'} \beta^{n'} \alpha^n \\ \alpha^{m+n'} &= \alpha^{m'+n} \end{aligned}$$

Satz 3.25. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation, die mit α und β verträglich ist und $(0,0) \sim (1,1)$ erfüllt. Dann gilt:*

1. $(0,0) \sim (a,a)$ *für alle* $a \in \mathbb{N}$. *Für alle* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *ist* $(a,b)+(b,a) \sim (0,0)$.
2. *Es ist* $(a,b) \sim (a',b') \iff a+b' = a'+b$.

Zu 1.: $(0,0) \sim (1,1)$, dann ist $\alpha\beta((0,0)) \sim \alpha\beta((1,1))$. Daher ist $(1,1) \sim (2,2)$. Durch Induktion folgt die Behauptung.
Zu 2.: Es sei $(a,b) \equiv (a',b') :\iff a+b' = a'+b'$. Dies ist sicher eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$. Sie ist verträglich mit α und β. Ich bezeichne

$$\begin{aligned} S &= \{((a,b),(a',b'))|(a,b) \equiv (a',b')\} \\ R &= \text{ Kleinste Äquivalenrelation, mit } \alpha,\beta \text{ verträglich ist und } (0,0) \sim (1,1). \end{aligned}$$

Es ist $\equiv$ eine Aequivalenzrelation, die mit α und β verträglich ist und für die gilt $(0,0) \equiv (1,1)$. Also ist $R \subset S$.
Behauptung: Es gilt auch $S \subset R$. Sei also $((a,b),(a',b')) \in S$. Dann ist $a+b' = a'+b$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} a+b' &= a'+b \\ \Rightarrow (0,0) &\sim (a+b', a'+b) = (a,b)+(b',a') \\ \Rightarrow (a',b') &\sim (a,b)+(b',a')+(a',b') \\ \Rightarrow (a',b') &\sim (a,b) \end{aligned}$$

Ist daher $a+b' = a'+b$, so ist $(a,b) \sim (a',b')$. Also ist die Relation S in der Relation R enthalten. Daher ist $S = R$. □

Projeziert man $\mathbb{N}^2$ parallel zur Winkelhalbierenden, so erhält am auf der Bildgeraden ein Muster. Das ist ein Bild von $\mathbb{Z}$.
Sei $\Omega = \alpha, \beta$. Es hat also Ω zwei Elemente. Die Ω Muster (A,α,β) für die $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1_A$ gilt bilden eine Unterkategorie. Das ist die Kategorie der Ketten mit bijektiver Kettenabbildung.

Satz 3.26.
1. *$\mathbb{Z}$ ist bezüglich $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(a+c,b+d)}$ eine abelsche Gruppe.*
2. *Ist (A,α) eine Kette mit bijektivem α, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $f : \mathbb{Z} \to A$ mit $f(0) = a$.*

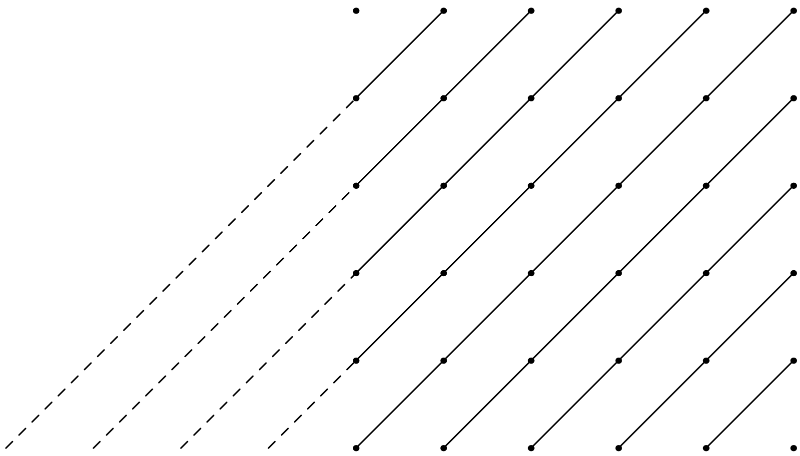


Abb. 3.12: Die Äquivalenzrealtion $(0,0) \sim (1,1)$

3. *Die Abbildung* $\iota\colon \mathbb{N} \ni n \mapsto \overline{(n,0)}$ *ist ein Monomorphismus, der Monoide.*

Aufgaben:

37. Zeige: Die kleinste Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$, die mit α, β verträglich ist, und für die gilt $(1,0) \sim (0,1)$ ist die Relation: $(a,b) \sim (x,y) \iff a+b = x+y$.
38. Betrachte $A = \mathbb{N}^3$ mit α, β, γ, $\alpha(a,b,c) = (a{+}1,b,c)$. Entsprechend $\beta\gamma$. Bestsimme die kleinste Äquivalenzrelation, die mit α, β, γ verträglich ist und $(0,0,0) \sim (1,1,1)$ erfüllt. Zeige: In $A/\sim$ ist $\overline{\alpha\beta\gamma} = Id$. Ist $A/\sim \cong \mathbb{Z}^2$?
39. Wir betrachten die Kategorie der Muster (A, α, β) mit $\alpha^2 = \beta$.
    a) Zeichne ein solches Muster mit 4 Elementen.
    b) Zeichne ein solches Muster mit 5 Elementen.
    c) $(\mathbb{N}, 1{+}, 2{+})$ hat die folgende Eigenschaft. Zu jedem A aus der betrachteten Kategorie und jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon (\mathbb{N}, 1{+}, 2{+}) \to A$ mit $f(0) = a$. $(\mathbb{N}, 1{+}, 2{+})$ ist in dieser Kategorie durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
40. Wir betrachten $\mathbb{N}^n$ mit den Strukturabbildungen $\alpha_i : \mathbb{N}^n \ni \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{e_i} \in \mathbb{N}^n$. Dabei ist $\vec{e_i} = (0, \ldots, 1, 0 \ldots)$ nur an der $i$ten Stelle Steht eine 1 sonst überall 0. Zeige:

a) Eine Äquivalenzrelation $\sim$ ist mit den α_i verträglich genau dann, wenn sie mit der Addition verträglich ist.

b) Ist $(A, +)$ eine kommutative Halbgruppe und $F : \mathbb{N}^n \to A$ ein Homomorphismus der Halbgruppen, so ist die Äquivalenzrelation $\vec{a} \sim \vec{b} :\iff f(\vec{a}) = f(\vec{b})$ mit den α_i verträglich.

c) $\mathbb{N}^3/(1, 1, 1) \cdot \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}^2$.

d) Betrachte $(\mathbb{N}, 2+, 3+)$. Sei $[0]$ das von 0 erzeugte Untermuster. Zeige Ist (A, α, β) ein Muster, derart, dass α, β kommutieren und $\alpha^3 = \beta^2$ erfüllen, dann gibt es zu jedem $a \in A$ genau ein $f : [0] \to A$ mit $f(0) = a$. $[0]$ ist ein darstellendes Objekt in der Kategorie der (A, α, β) mit $\alpha^3 = \beta^2$. Es ist $[0] \cong [1]$.

e) Gibt es einen Morphismus $f : ([0], \alpha, \beta) \to (\mathbb{N}, 1+)$?

f) Beantworte analoge Fragen mit $(\mathbb{N}, 3 + 5+)$.

g) Zu jedem $a \in [0]$ gibt es genau einen Morphismus mit $\Phi(a)(0) = a$. Definiert man $a \circ b := \Phi(a)(b)$ so ist $a \circ b = a + b$. Dabei ist $+$ die normale Addition.

Gleichheit: Wir haben bisher schon oft gesehen, dass meist dann, wenn wir nachdenken gleichmachen. Gleichheit ist nichts Absolutes, sonder wir teilen in Schachteln ein. Dies ist notwendif um sich in der Welt zurecht zu finden. Eine Art von Gleichmacherei ist Messen. Wir sagen der Baum ist 20m hoch. Oder betrachten wir ein einfacheres Beispiel.
Wir behaupten der Tisch (Zeichnung!) ist $2m$ lang. Wie stelle ich das fest? Ich bewege einen Meterstab lege ihn an dei Kante des Tisches . Ich markiere das Ende des Meterstabes und verschiebe ihn so, dass der Anfang des Meterstabes mit dem markierten Punkt zusammen fällt. Dabei setze ich voraus, das die Welt nicht aus Gummi ist, der Tisch ein fester Körper ist und sich nicht willkürlich verformt währen ich den Meterstab hin und her bewege. Stellen wir uns vor ein lustiger , ein Durcheinanderwerfer dehne während der Verschiebung den Tisch oder den Meterstab. Stellen wir uns vor die Welt wäre ein leicht knetbarer Teig. Niemals wäre die Geometrie entstanden. Vielleicht haben deswegen Delphine keine Geometrie entwickelt. Für einen Delphin ist doch alles in den weiten des Meeres.
Wir vertrauen bei unserer Messung auf eine feste verlässliche Welt. Änderungen haben Gründe. Bei welchen Änderungen ist es sinnvoll nach Gründen zu fragen? Speziell beim Messen setzen wir die Grundprinzipien der Gleichheit voraus. Die Gleichheit muss die Axiome der Äquivalenz erfüllen:

1. $a = a$. Das ist unbedenklich. Jedes Ding ist sich selber gleich.
2. Ist $a = b$, so auch $b = a$. Auch hierüber wollen wir nicht nachdenken.
3. Ist $a = b$ und $b = c$, so auch $a = c$.

Dies ist etwas, was bei physikalischen Messungen oder in unserem Gesichtsraum eigentlich nie eintritt. Es kann durchaus sein, dass wir beim Vergleich von a mit b und beim Vergleich von b mit c keinerlei Unterschied bemerken. Aber wir messen etwa $a < c$. Denken wir zum Beispiel an eine Balkenwage. Tritt dies ein werden wir nicht der Messung vertrauen, sondern werden meist beschließen, dass wir uns vermessen haben. Die Axiome der Gleihheit werden also höher gewertet, als die Erfahrungstatsache. Poincaré führt dazu einige Überlegungen in dem Buch Wissenschft und Hypothese (Siehe Poincaré, *Wissenschaft und Hypothese*, Seite 22) aus.
Wir halten fest:

Jede vernünftige Messung muss angenähert die Axiome Gleichheit erfüllen.

Diese ist natürlich niemals vollständig erreichbar. Daher erhält jede Erfahrung nur im Rahmen einer Theorie einen Wahrheitswert.

3.2.4 Zyklische Muster

Satz 3.27. *Seien A, B Ω-Muster. Es sind äquivalent:*

1. *Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $f \in Mor(A, B)$ und ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.*
2. *Es gibt eine Indexmenge I und einen Epimorphismus $f : A^{(I)} \to B$. Dabei ist $A^{(I)}$ die elementfremde Vereinigung der $(A, i \in I)$.*

1. $\Longrightarrow$2. Zu jedem $b \in B$ gibt es einen Morphismus f_b und ein $a_b \in A$ mit $f_b(a_b) = b$. Zu der Familie der $(f_b | b \in B)$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : A^{(B)} \to B$ mit $f \circ q_b = f_b$. Dabei sind $(q_b | b \in B)$ die natürlichen Inklusionen. Es folgt $f(q_b(a_b)) = f_b(a_b) = b$.[2]
2. $\Longrightarrow$1. Es gebe eine Indexmenge I und einen Epimorphismus $f \colon A^{(I)} \to B$. Ist $b \in B$, so gibt es ein $(a_i) \in A^{(I)}$ mit $f((a_i)) = b$. Da $A^{(I)}$ die elementfreme Vereinigung ist, gibt es ein $i \in I$ mit $(a_i) = q_i(a)$. Daher ist $f \circ q_i(a) = b$. □

[2] Hierbei wird das Auswahlaxiom gebraucht.

Definition 21 Ein Ω- Muster B wird von A generiert, wenn eine der Eigenschaften des Satzes auf B zutrifft. ◻

Satz 3.28. *Zu jedem Muster B gibt es ein größtes Untermuster $S(A, B)$, welches von A generiert ist.*

Es ist $S(A, B) := \bigcup\limits_{f \in [A,B]} f(A)$.

Im weiteren will ich Muster, die von einem Element erzeugt sind genauer untersuchen.

Satz 3.29. *1. Für alle $A, B \in_\Omega \overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$ ist $S(A, B)$ abgeschlossen in B. Dabei bezeichne ${}_\Omega\overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$ die Kategorie der Ω-Muster.*

2. Die Zuordnung:

- $\overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}} \ni B \mapsto S(A, B) \in \overset{\curvearrowright}{\mathbf{S}}$,
- $[B, C] \ni h \mapsto S(A, h) \in [S(A, B), S(A, C)]$

ist ein kovarianter Funktor.

Definition 22 Ein Ω-Muster heißt zyklisch, wenn es von einem Element erzeugt ist.
Ein von einem Element erzeugtes Ω-Muster $A = [o]$ heißt ein Selbstgenerator, wenn es zu jedem $a \in A$ einen Morphismus $f : A \to A$ gibt mit $f(o) = a$. ◻

Beispiele:

64. $(\mathbb{N}, 1+)$ ist Selbstgenerator.

65. Jeder Kreis ist Selbstgenerator.

Satz 3.30. *Operiert Ω auf A kommutativ und ist A von einem Element o erzeugt, so ist $A = [o]$ ein Selbstgenerator.*

Sei

$$T := \{a | a \in A \text{ es gibt einen Morphismus } f : A \to A \text{ mit } f(o) = a\}$$

Es ist $o \in T$. Sei $a \in T$ und $\alpha \in \Omega$. Es ist $\alpha \cdot f$ ein Morphismus. Un es ist $(\alpha \cdot f)(o) = \alpha \cdot f(o) = \alpha \cdot a$. Also ist T abgeschlossen gegenüber Ω. Daher ist $T = \Omega$.

Folgerung 3.31. *Jede zyklische Kette ist ein Selbstgenerator.*

In diesem Fall operiert Ω kommutativ auf der Kette. □

Beispiele:

66. Im nicht kommutativen Fall gilt die Behauptung des Satzes 3.30 keineswegs. Wir betrachten dazu $A = \{0, 1\}$ mit den beiden konstanten Abbildungen $\alpha(x) = 0$ und $\beta(x) = 1$. Dann ist der einzige Morphismus $f\colon A \to A$ die Identität. Daher gibt es keinen Morphismus f mit $f(0) = 1$

Ist $[A] = [o]$ ein Selbstgenerator, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $\Phi(a)\colon A \to A$ mit $\Phi(o) = a$. Wir erklären auf A eine Verknüpfung:

$$a \circ b := \Phi(a)(b) \tag{3.1}$$

Satz 3.32. *Für diese Verknüpfung gilt:*

1. $\Phi(o) = Id$.
2. $o \circ a = a \circ o = a$ *für alle* $a \in A$.
3. *Das Assoziativgesetz:* $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ *für alle* $a, b, c \in A$.

Zu 1. Dies ist klar.
Zu 2. Es ist $o \circ a = \Phi(o)(a) = Id(a) = a = \Phi(a)(o) = a$
Zu 3.: Wir betrachten die beiden Abbildungen:

$$F\colon A \ni c \mapsto (a \circ b) \circ c \in A$$
$$G\colon A \ni c \mapsto a \circ (b \circ c) \in A$$

sind Morphismus, wie man sich überlegt. Da $F(o) = G(a) = a \circ b$ ist folgt die Behauptung.

Folgerung 3.33. $\mathbb{N}$ *zusammen mit der obigen Verknüpfung ist ein Monoid.*

Satz 3.34. *Wirkt* Ω *auf* $[o]$ *kommutativ, so ist* $([o], \circ)$ *ein kommutativer Monoid*

Wirkt Ω kommutativ auf $[o]$, so ist für alle $b \in A$ die Abbildung $\alpha \cdot \Phi(b)$ ein Morphismus. Für $\alpha \in \Omega$ ist $\Phi(\alpha b)$ sowieso ein Morphismus. Es ist $\alpha \cdot \Phi(b)(o) = \alpha \cdot b$ und $\Phi(\alpha \cdot b)(0) = \alpha \cdot b$. Also ist $\alpha\Phi(b) = \Phi(\alpha \cdot b)$.
Wir betrachten nun wieder zwei Abbildungen zu $a \in A$

$$F : A \ni b \mapsto a \circ b \in A$$
$$G : A \ni b \mapsto b \circ a \in A$$

Die erste Abbildung ist nach Defnition ein Morphismus. Es ist $G(\alpha b) = (\alpha b) \circ a = \Phi(\alpha b)(a) = \alpha \cdot (\Phi(b)(a)) = \alpha G(b)$. Weiter ist $G(o) = o \circ a = a \circ o = F(o) = a$. Daher sind die beiden Morphismen gleich. □

Folgerung 3.35. *Es ist $\mathbb{N}$ zusammen mit obiger Verknüpfung ein kommutativer Monoid.*

In Zukunft schreiben wir für diese Verknüpfung $a + b$.

Zyklische freie Muster

> „Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppenverstandes entsprechenden Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschuung von vorneherein einleuchtend und gewiß erscheinen“ (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite IV)

Satz 3.36. *Ist $A = [o]$ ein freies zyklisches Ω-Muster, so ist A ein Selbstgenerator.*

Sie $a \in A$. Da $\{o\}$ eine Basis von A ist, gibt es zu der Abbildung $o \mapsto a$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon A \to A$ mit $f(a) = a$. □

Satz 3.37. *Ist $A = [o]$ ein Selbstgenerator und B eine weitere Kette mit $B = S(A, B)$, dann gibt es zu jedem $b \in B$ genau einen Morphismus $h\colon A \to B$ mit $h(o) = b$*

Sei $b \in B = S(A, B)$. Es gibt ein $f \colon A \to B$ und ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Zu dem a gibt es ein $g \colon A \to A$ mit $g(o) = a$. Wir erhalten: $fg(o) = b$. Mit $h := fg$ ergibt sich die Behauptung. □

Satz 3.38. *Erzeugt E das Muster A und ist $f \colon A \to B$ ein Morphismus, so erzeugt $f(E)$ das Muster $f(A)$.*

Es ist $E \subset A$. Also ist $[f(E)] \subset f(A)$, da A abgeschlossen. Sei

$$T = \{a | a \in A \text{ mit } f(a) \in [f(E)]\}$$

Es ist $E \subset T$. Ist $\alpha \in \Omega$ und $a \in T$, so eribt sich: $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) \in [f(E)]$. Daher ist T abgeschlossen. Also ist $T = A$.

Satz 3.39. *Ist A ein freies zyklisches $\Omega-$ Muster, so ist jeder Morphismus $f \colon A \to A$ injektiv.*

Sei $A = [o]$ und $f \colon A \to A$ ein Morphismus.

$$T = \{a | f(a) \neq f(b) \text{ für alle } b \in A \text{ mit } a \neq b\}$$

Das ist die Menge der Elemente aus A bei denen genau ein Pfeil endet. Es ist $o \in T$: Sei $f(o) = f(b)$. Wäre $b \neq o$, so gäbe es ein $\alpha \in \Omega$ und ein $b' \in A$ mit $b = \alpha \cdot b'$. Das hieße $f(o) = f(b) = f(\alpha \cdot b') = \alpha \cdot f(b') \in \Omega \cdot f([o]) = \Omega \cdot [f(o)]$. Das geht nicht wegen Satz 3.2.
Sei $a \in T$. Zu zeigen ist: Es gibt kein $b \in A$ mit $f(b) = f(\alpha \cdot a)$ und $b \neq \alpha \cdot a$. Angenommen es gäbe ein solches $b \in A$. Also $f(\alpha \cdot a) = f(b)$. $b = o$ ist unmöglich. Denn dann wäre $f(o) = f(\alpha \cdot a)$ und $\alpha \cdot a \neq o$. Also ist $b \in \Omega \cdot [o]$. Also gibt es ein $b' \in [o]$ und ein $\beta \in \Omega$ mit $b = \beta \cdot b'$. Es folgt:

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot a) &= f(b) = f(\beta \cdot b') \\ \alpha \cdot f(a) &= \beta \cdot f(b') \end{aligned}$$

Daher ist $\alpha = \beta$ und $f(a) = f(b')$, weil $[o]$ eine freies Ω-Muster ist. Da $f(a) = f(b')$ und $a \in T$ ist, folgt $a = b'$ und also $b = \alpha \cdot a$. Dies widerspricht der Annahme über b. Also ist $f \colon [o] \to [o]$ injektiv. □

Jedes zyklische Untermuster von A ist also eine genaue Kopie von A. Dies wird uns noch häufiger begegnen.

Definition 23 Ω wirkt auf A injektiv, wenn für alle $\alpha \in \Omega$ die Abbildung $\alpha\colon A \ni \alpha \mapsto \alpha(a) \in A$ injektiv ist. $\square$

Lemma 7 *Wirkt Ω injektiv und kommutativ auf $[a]$, so lässt sich jedes Element aus $[\alpha(a)]$ schreiben als $\alpha \cdot b$ mit $b \in [a]$* $\square$

Wirkt Ω nicht injektiv auf A so gilt dies keineswegs.
Die Behauptung ist richtig für $\alpha \cdot a$. Sei

$$T := \{b | b \in [\alpha(a)] \text{ und } b = \alpha b' \text{ mit } b' \in [a]\}$$

Sei $b \in T$. Zu zeigen ist: Für beliebiges $\beta \in \Omega$ ist $\beta(b) \in T$. Es ist $b = \alpha(b')$ für ein $b' \in [a]$. $\square$

Es ist für das Verständnis hilfreich, wenn man A als Menge von Strings interpretiert, die mit einer Menge von Buchstaben aus dem leeren String " erzeugt werden. Ist dann f ein Morphismus $f\colon A \to A$, so ist $f('') = w$ ein Wort. Die Zuordnung $A \ni v \mapsto vw \in A$ ist dann ein Morphismus. Dies ist der Morphismus f und er ist sicher injektiv.

Satz 3.40. *Sei $N = [o]$ eine zyklisches freies Muster mit dem erzeugenden Element o. Ist A ein beliebiges Ω- Muster, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $\Phi(A)(a)\colon N \to A$ mit $\Phi(A)(a) = a$. Die Zuordnung*

$$\Phi(A)\colon A \ni a \mapsto \Phi(A)(a) \in [N, A]$$

ist ein funktorieller Isomorphismus. Auf $[N, A]$ erklären wir die Struktur eines Ω-Musters durch: Ist $f(o) = a = \Phi(a)(o)$, so ist $\alpha \cdot f : \Phi(\alpha \cdot a)$

Sei $h\colon A \to B$ ein Morphismus von Ω- Mustern. Das heißt für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $a \in A$ ist $h(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot h(a)$. Betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Phi(B)"'] & B \arrow[d, "\Phi(B)"] \\ {[N, A]} \arrow[r, "{[N,h]}"'] & {[N, B]} \end{tikzcd}$$

Sei $a \in A$, so ist $\Phi(B)(h(a))$ der einzige Morphismus $g\colon N \to B$ mit $g(o) = h(a)$. Es ist $([N,h] \circ \Phi(A))(a) = h \circ \Phi(A)(a)$ ein Morphismus. Und es ist $(h \circ \Phi(A)(a))(o) = h(\Phi(A)(a)(o)) = h(a)$ für alle $a \in A$. Daher ist $([N,h] \circ \Phi(A)) = (\Phi(B)) \circ h$. Das Diagramm ist daher kommutativ.
Tatsächlich ist $[N,A]$ auch mit der obigen Definition ein Ω-Muster. Denn mit f ist f eindeutig bestimmt durch $f(o) = a = \Phi(a)(o)$. Es ist $f = \Phi(a)$. Ist $\beta \in \Omega$, so ist $(\alpha\cdot)f(\beta \cdot b) = \Phi(\alpha \cdot a)(\beta \cdot b) = \beta \cdot \Phi(\alpha \cdot a)(b) = \beta \cdot (\alpha \cdot f)(b)$. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 3.41. *Sei $f\colon A \to B$ ein Monomorphismus in der Kategorie der Ω- Muster, so ist f eine injektive Abbildung.*

Satz 3.42. *Wirkt Ω kommutativ auf $[o] = A$, und B, und ist B von A erzeugt, so ist die Zuordnung $\Phi(B)\colon B \ni B \mapsto \Phi(b) \in [A,B]$ sogar ein Morphismus.*

Dabei Ist $[A,B]$ in folgendem Sine ein Ω Muster. Es ist $\alpha \cdot f$ der Morphismus $A \ni a \mapsto f(\alpha \cdot a)$. Man rechnet leicht nach, dass dies wirklich unter den Voraussetzungen ein Morphismus ist. Sei $a \in A$ und $\alpha \in \Omega$ Dann ist $\Phi(\alpha \cdot b)(0) = \alpha \cdot b$. Auch $(\alpha \cdot \Phi(b))(0) = \alpha \cdot b$. Also ist $\Phi(\alpha \cdot b) = \alpha\Phi(b)$. Daher folgt de Behhauptung. $\square$

Folgerung 3.43. *Wirkt Ω kommutativ auf $A = [o]$, so ist $A \cong [A,A]$. Insbesondere ist $[A,A]$ zyklisch von der Identität erzeugt. Jedes Element aus $[A,A]$ lässt sich als Produkt von Elementen aus Ω schreiben.*

Sei $f\colon A \to A$ ein Morphismus. Dann ist $f = \Phi(a)$ für ein $a \in A = [o]$. Es ist $a = s \cdot o$ für ein Produkt s aus Elementen von Ω. Daher ist $f = \Phi(s \cdot o) = s \cdot \Phi(o) = s \cdot Id$ $\square$

Satz 3.44. *Wirkt Ω kommutativ auf $[o]$, so sind für einen Morphismus $f\colon A \to A$ äquivalent:*

1. *f ist surjektiv.*
2. *o ist in der Bildmenge von f enthalten.*
3. *f ist bijektiv.*

1. $\Longrightarrow$2. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = o$.
2. $\Longrightarrow$3. Wegen Folgerung 3.43 gibt es ein Produkt s von Elementen aus Ω mit $f(x) = s \cdot x$ für alle $x \in A$. Außerdem gibt es ein s' mit $s' \cdot o = a$. Daher ist $s \cdot s' \cdot o = o$. Daher ist $s \cdot s' = Id$. Dies ist richtig, da die Identität der einzige Morphismus ist, der o auf o abbldet. Daher ist s invertierbar. Damit ist f bijektiv. □

Ist $[o]$ ein freies Ω Muster, das von o erzeugt ist, so erklärt man auf $A = [o]$ folgendermaßen eine Verknüpfung: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $\Phi(a)\colon A \to A$ mit $\Phi(a)(o) = a$. Wir definieren:

$$a \circ b := \Phi(a)(b) \tag{3.2}$$

Satz 3.45. *Für diese Verknüpfung gilt:*

1. *Für alle $a, b, c \in A$ gilt: Ist $a \circ c = b \circ c$, so ist $a = b$. Es ist A auf der rechten Seite kürzbar.*

2. *Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \circ b = a \circ c$, dann ist $b = c$. Es ist A links kürzbar.*

Zu 4. Ist $a \circ o = a' \circ o$, so ist $a = a'$, wegen Teil 1 des Satzes.
Sei

$$T = \{b | a \circ b = a' \circ b \Longrightarrow a = a' \text{ für alle } a, a'\}$$

Sei $b \in T$ und $\alpha \in \Omega$.
Weiter sei $a \circ (\alpha \cdot b) = a' \circ (\alpha \cdot b)$. Also ist $\Phi(a)(\alpha \cdot b) = \Phi(a')(\alpha \cdot b)$. Da $\Phi(a)$ und $\Phi(a')$ beides Morphismen sind folgt: $\alpha \cdot (\Phi(a)(b)) = \alpha \cdot \Phi(a')(b)$. Also ist $\Phi(a)(b) = \Phi(a')(b)$. Daher ist $a = a'$. Es folgt $T = [o]$.
Zu 5. Dies liegt daran, dass alle Morphismen $[o] \to [o]$ injektiv sind. □

Folgerung 3.46. *Sei $[o]$ ein freies zyklisches Ω Muster. Dann wird $[o]$ durch die Definition 3.2 zu einem regulären Monoid.*

Satz 3.47. *Wirkt Ω kommutativ auf $[o]$, so ist der reguläre Monoid auch kommutativ. In diesem Fall schreiben wir für $a + b := a \circ b$. Insbesondere ist $(\mathbb{N}, 1+)$ ein regulärer kommutativer Monoid. Wir bezeichnen das Neutralelement mit 0.*

Aufgaben:

41. Sei $A = (\mathbb{N}, 1+)$
    a) Jeder Morphismus $f\colon A \to A$ ist injektiv. Zeige dies direkt.
    b) Der einzige surjektive Morphismus $A \to A$ ist die Identität. Betrachtet man die Definition von unendlich von Dedekind, so ist A auch noch unendlich, wenn man als Abildungen $A \to A$ nur die Morphismen zulässt. Aber dann ist A epiendlich.
    c) Zeige: Jede abgeschlossene Teilmenge von A ist zyklisch.
    d) Sei (A, α) eine zyklische Kette und $f\colon (\mathbb{N}, 1+)$ ein Morphismus. Muss f injektiv sein?
42. a) Wieviel Morphismen gibt es von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
43. Sei $A = (\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha(n) = n + 1$ und $\beta(n) = n + 2$. (Siehe Beispiel 47)
    a) Zeige: Es gibt keinen Morphismus $f\colon A \to (\mathbb{N}, 1+)$.
    b) Zeige: Jeder Morphismus $f\colon A \to A$ ist injektiv.
    c) Welche Morphismen $A \to A$ sind surjektiv?
    d) Ist jede abgeschlossene Teilmenge von A zyklisch?
44. a) Zeige: Die Kette $0 \longrightarrow 1 \circlearrowright$ erzeugt jede Kette (A, α) mit $\alpha^2 = \alpha$.
    b) Finde eine Kette, die jede Kette mit $\alpha^n = Id$ erzeugt mit festem $n \in \mathbb{N}$.
    c) Finde eine Kette, die jede Kette mit $\alpha^5 = \alpha^2$ erzeugt.
    d) $n < m$ ist gegeben. Finde eine Kette, die jede Kette mit $\alpha^n = \alpha^m$ erzeugt.
    e) Zeige das Muster aus dem Beispiel 47 erzeugt jedes Muster (A, α, β) mit $\alpha^2 = \beta$.
    f) Finde eine möglichst einfachen Generator aller Muster (A, α, β) mit $\alpha^2 = \beta$ und $\alpha^7 = \alpha^6$.
45. Untersuche den Zusammenhang zwischen Zahnrädern, Uhren und Morphismen.
46. Nehmen wir an, zwei Zahnräder seien gekoppelt derart, das wenn sich das eine um einen Zahn weiter dreht, das andere um einen Zahn weiter dreht. Beispiel: Eins mit 5 Zähnen das andere mit 3 Zähnen. Es wird ausgegangen von dem Zustand $(0,0)$. $(0,0) \to (1,1) \to (2,2) \to (0,3) \to (1,4) \to (2,0) \to (0,0)$. Ist die Welt eine Uhr? Dies ist die Auffassung von Laplace.

Satz 3.48. *Sei $[o]$ ein freies Ω- Muster und*

$$M(\omega) = \{s | s \textit{ ist endliches Produkt von Elementen aus } \}$$

Zu jedem $a \in A$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $s \in M(\Omega)$ mit $a = s \cdot o$. Dabei ist das leere Produkt die Identität.

Es sei

$$T = \{a | a \in A \text{ falls } a = s \cdot o = s' \cdot o \text{ so ist } s = s'\}$$

Es ist $o \in T$. Denn ist $o = s \cdot o = s' \cdot o$, so ist $s = s' = Id$, da $o \notin \Omega \cdot [o]$. Sei $a \in T$ und $a = s \cdot o$. Dann ist für ein $\alpha \in \Omega$: $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot s) \cdot o$. Angenommen es gebe s'' mit $\alpha \cdot a = s''o$. Dann kann s'' nicht die Identität sein. Also ist $s'' = \gamma s_1$ mit einem $\gamma \in \Omega$. Also ist $\alpha \cdot (s \cdot a) = \gamma(s_1 \cdot o)$. Da die Abbildung

$$\Omega \times A \ni (\gamma, a) \mapsto \gamma \cdot a \in A$$

injektiv ist, folgt $\gamma = \alpha$. Es folgt $\alpha \cdot (s \cdot o) = \alpha \cdot s_1 \cdot o$ und $s = s_1$. Also ist $s'' = \alpha \cdot s$ und daher $\alpha \cdot a \in T$. Es ist $T = [o] = A$. □

Ich bezeichne dieses eindeutig bestimmte zu a gehörende $s \in M(\Omega)$ mit $a = s \cdot a$ durch $s(a)$.

Satz 3.49. *Ist $[o]$ ein freies Ω-Muster und $\Phi(a)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\Phi(a)(o) = a$, so ist $\Phi(a)(b) = s(b) \cdot s(a) \cdot o$*

Es ist $b = s(b) \cdot o$. Daher ist $\Phi(a)(b) = \Phi(a)(s(b) \cdot o) = s(b) \cdot (\Phi(a) \cdot o) = s(b) \cdot a = s(b) \cdot x(a) = \cdot o$. □

Sei $\Omega = \{A, B, \ldots, a, b, \ldots\}$ die Menge der Buchstaben und A das vom leeren String erzeugte freie Ω- Muster. Der eindeutig bestimmte Morphismus $\Phi(a)$ hängt an jeden String b den String a rechts an. Also es ist $\Phi(''baum'')(\ddot{A}pfel'') = \ddot{A}pfelbaum''$.

Beispiel: Ein Beispiel soll genauer untersucht werden. Es sei $\Omega = \{0, 1\}$. Es hat Ω zwei Elemente. Weiter sei (A, α, β) ein Ω-Muster auf dem Ω kommutativ wirkt. Außerdem sei $\alpha^3 = \beta^2$.

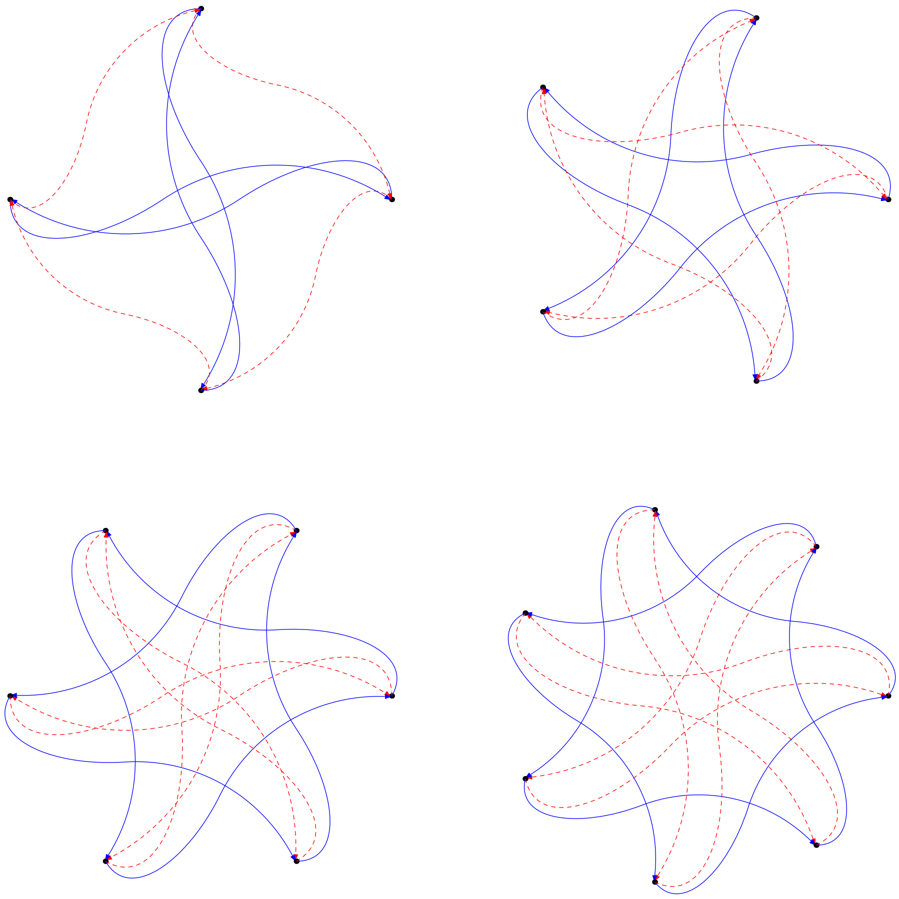


Abb. 3.13: In den vier Zeichnungen entspricht den blauen Pfeilen α und den Roten Pfeilen β. Es ist $\alpha^3 = \beta^2$

Lemma 8 *Sind $\alpha, \beta \colon A \to A$ zwei miteinander kommutierende Abbildungen mit $\alpha^3 = \beta^2$, so gilt: Sind $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ mit $2m + 3n = 2m' + 3n'$, so ist $\alpha^m \beta^n = \alpha^{m'} \beta^{n'}$* □

Es sei $2m + 3n = 2m' + 3n'$. Ist $m = m'$, so ist $n = n'$ und man ist fertig.

Andernfalls ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m > m'$. Es folgt

$$2(m - m') = 3(n' - n). \text{ Da } 2, 3 \text{ teilerfremd sind, ist}$$
$$m - m' = 3k$$
$$n' - n = 2l \text{ für natürliche Zahlen } k, l.$$

Es folgt: $m' = m - 3k$ und $n' = n + 2l$. Daher ist $2m' + 3n' = 2(m - 3k) + 3(n + 2l) = 2m - 6l + 3n + 6l$ Es folgt $0 = 6 \cdot (l - k)$. Daher ist $l = k$. Damit folgt $m' = m - 3l$ und $n' = n + 2l$. Es ergibt sich: $\alpha^{m'}\beta^{n'} = \alpha^{m-3l}\beta^{n+2l} = \alpha^{m-3l} \cdot \beta^{2l} \cdot \beta^{n} = \alpha^{m-3l} \cdot \alpha^{3l} \cdot \beta^{n} = \alpha^{m} \cdot \beta^{n}$. □

Fragen:

5. Gibt es eine Menge A mit zwei Selbstabbildungen α, β und $\alpha^3 = \beta^2$, bei denen α und β nicht kommutieren.

Satz 3.50. *Sei (A, α, β) mit $\alpha\beta = \beta\alpha$ und $\alpha^3 = \beta^2$. Weiter sei $[0]$ das von 0 erzeugte Untermuster von $(\mathbb{N}, 2+, 3+)$. Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon [0] \to A$ mit $f(0) = a$.*

Jedes $x \in [0]$ lässt sich schreiben: $x = 2 \cdot m + 3 \cdot n$. Die Zuordnung $f(x) = \alpha^m \cdot \beta^n \cdot a$ ist wegen Lemma 8 eine Funktion. Sie ist aber auch ein Morphismus. Denn $f(x + 2) = f(2 \cdot (m + 1) + 3 \cdot n) = \alpha^{m+1} \cdot \beta^n \cdot a = \alpha \cdot f(x)$. Analog ist $f(x+3) = f(2m+3(n+1)) = \alpha^m \cdot \beta^{n+1} \cdot a = \beta \cdot f(x)$. Hier wird auch benutzt, dass α, β kommutieren. Die Eindeutigkeit ist klar. □

Es ist daher $[0]$ ein freies Objekt in der Kategorie (A, α, β), wobei α, β kommutieren und $\alpha^3 = \beta^2$.
Aufgaben:

47. a) Zeige: Alle Muster der Abbildung 3.13 erfüllen $\alpha^3 = \beta^2$ und sind kommutative Muster.
    b) Alle Muster der Abbildung 3.13 sind einfach. Das heißt von jedem Knoten ist jeder andere Knoten erreichbar.
48. Wieder betrachten wir $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ $\alpha = 2+$ und $\beta = 3+$. Hierin das von 0 erzeugte Untermuster $[0]$. Wir untersuchen Äquivalenzrelationen, die mit $2+$ und $3+$ verträglich sind.

a) Es soll gelten: $0 \sim 2$. Bestimme die Äquivalenzklassen $[0]/\sim$ und zeichne das innere Diagramm von $[0]/\sim$.

Lösung: Beh. Die Äquivalenzklasse von 0 ist $\overline{0} = 2 \cdot \mathbb{N}$. Bew.: Es soll gelten $0 \sim 2$. Durch Anwendung von 2+ folgt $2 \sim 4$. Durch Induktion folgt die Behauptung. Wendet man 3+ auf die Ausgangsforderung $0 \sim 2$ an, so erhält man $3 \sim 5$ und daher durch Anwendung von 2+ $5 \sim 7 \sim 9 \ldots$. Also ergibt sich $\overline{3} = 3 + 2 \cdot N$.

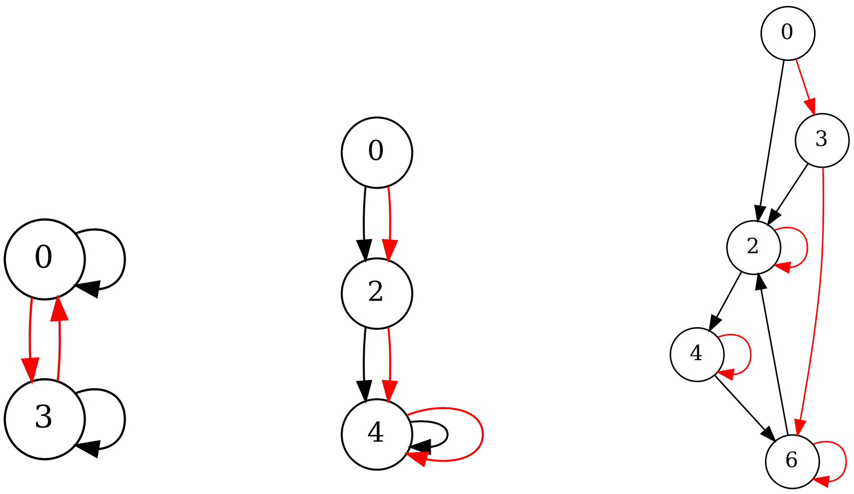


Abb. 3.14: Inneres Diagramm

Das innere Diagramm von $[0]/\sim$ sieht dann wie in Figur 3.14 aus.

b) Es soll gelten $2 \sim 3$.

Lösung: $2 \sim 3$ ergibt durch Anwendung von 2+: $4 \sim 5$ und $6 \sim 7 \ldots$. Weiter ergibt $2 \sim 3$ durch Anwendung von 3+ $5 \sim 6$. Beh.: Alle Zahlen ≥ 4 sind zueinander äquivalent.

Bew.: $5 \sim 6 \sim 7 \sim 4$. Angenommen es gibt eie Zahl ≥ 4, die nicht äquivalent zu 4 ist. Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl x dieser Art. Es ist $x > 7$. Also ist $x - 2 \sim 4$. Daher ist $x \sim 6$. Also ist $x \sim 4$ im Widerspruch zur Aussage über x. Das innere Diagramm ist in Figur 3.14 Mitte zu besichtigen.

c) Es soll $2 \sim 4$ gelten.

d) Es soll $2 \sim 5$ gelten.

e) Es soll $2 \sim 6$ gelten.

f) Es soll $2 \sim 7$ gelten.

49. Betrachte wieder $(\mathbb{N}, 2+, 3+)$ und das von 0 erzeugte Untermuster $[0]$.

a) Es soll gelten $a \sim a+1$. Zeige $[0]/\sim$ endet in einem Fixpunkt für 2+ und 3+.

b) Wie endet $[0]/\sim$ wenn $a+2 \sim a$ gilt.

c) $a+3 \sim a$?

50. Betrachte $(\mathbb{N}, 3+, 5+)$.

a) Es soll gelten für irgend ein $a \in \mathbb{N}$: $a \;\; 1+a$. $[0]$ sei das von 0 erzeugte Untermuster von $\mathbb{N}$. Zeige $[0]/\sim$ endet in einem Fixpunkt.

b) Wie endet $[0]/\sim$, wenn für ein $a \in [0]$ gelten soll $a \sim 3+a$?

51. A habe zwei Elemente $A = \{a, b\}$. Zeichne die inneren Diagramme sämtlicher Muster (A, α, β) mit $\alpha^3 = \beta^2$, wobei α und β kommutieren.

52. Nach dem Satz 3.50 gibt es zu jedem a in $[0]$ genau einen Morphimus $\Phi(a)$ mit $\Phi(a)(0) = a$. Definiert man nun $a \oplus b := \Phi(a)(b)$, so ist für alle $a, b \in [o]$: $a \oplus b = a + b$. Zeige dies.

53. In der Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Frage wieviel Lösungen die Gleichung $3 \cdot x + 2 \cdot y = n$ mit natürlichen Zahlen $x, y, n \in \mathbb{N}$ hat. Erstellen wir zunächst eine Liste:

n	Mögliche Lösungen	Anzahl der Lösungen
0	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0$	1
1		0
2	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 1$	1
3	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0$	1
4	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 2$	1
5	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	1
6	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0$	2

a) Ist $n = 6 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$ so gibt es $k+1$ Lösungen.

Sei $n = 3 \cdot x + 2 \cdot y$. Dann ist $x = 2 \cdot x'$ und $y = 3 \cdot y'$. Also $6 \cdot k = 6x' + 6y'$. Daher ist $k = x' + y'$. Dazu gibt es $k+1$ Lösungen.

b) Ist $n = 6 \cdot k + 1$, so gibt es k Lösungen.

Ist $6 \cdot k + 1 = 3 \cdot x + 2 \cdot y$, so muss x ungerade sein. Daher ist $6 \cdot k + 1 = 3 \cdot (2x' + 1) + 2 \cdot y$. Also ist $3k = 3x' + 2 + y$. Daher muss $y = 3 \cdot y' + 1$ gelten. Also ist $k = x' + y' + 1$. Davon gibt es k Lösungen.

c) Für $n = 6k + 2, n = 6k + 3, n = 6k + 4, n = 6k + 5$ gibt es jeweils $k + 1$ Lösungen.

54. Beantworte die analogen Fragen wie in der Aufgabe 53 für die Gleichung $n = 5 \cdot x + 3 \cdot y$.

55. Sei $(\mathbb{N}, 1 + 2+)$ das Muster mit den beiden Abbildungen 1+ und 2+. Ist (A, α) irgend ein Muster und $f : (\mathbb{N}, 1+, 2+) \to (A, \alpha)$ ein Morphismus„ so gilt für alle $a \in f(\mathbb{N}) : \alpha^2(a) = \alpha(a)$. Umgekehrt sei $\alpha^2 = \alpha$ auf A. Dann gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismuis $f : (\mathbb{N}, 1+, 2+) \to A$ mit $f(0) = a$.

56. Wie sieht das bei $(\mathbb{N}, 2+, 3+)$ aus.

Verknüpfung und Ordnung In Satz **??** haben wir gesehen, dass jedes freie Muster halbgeordnet und fundiert ist. Dabei war erklärt $a < b \iff [b] \subsetneq [a]$.

Satz 3.51. *Sei $\{o\}$ die Basis des freien Ω- Musters A. Jeder Morphismus $f\colon A \to A$ ist streng monoton.*

Es sei $a < b$. Dann ist $[b] \subsetneq [a]$. Es ist $[f(b)] = f([b]) \subset f([a]) = [f(a)]$. Wäre $f(a) = f(b)$, so wäre wegen Satz 3.39 $a = b$. Das widerspricht der Voraussetzung $a < b$. □

Folgerung 3.52. *In dem freien Muster $[o]$ sei $b < c$. Dann ist für alle $a \in [o]$ auch $a \circ b < a \circ c$.*

Es ist $a \circ b = \Phi(a)(b)$. Es ist $\Phi(a)$ ein Morphismus. Daher folgt die Behauptung. □

Verknüpft man mit a von links, so ist diese Funktion daher streng monoton. Auf der anderen Seite gilt diese Behauptung nicht. Beispiel: Betrachte $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha(n) = 2n + 1$ und $\beta(n) = 2n + 2$. Es ist $0 < 1$. Es ist $0 \circ 2 = 2$ und $1 \circ 2 = \Phi(1)(2) = \beta(\Phi(1)(0)) = \beta(1) = 4$. Aber $4 \notin [2]$. Daher ist $4 \not< 2$ in $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$

Folgerung 3.53. *In $(\mathbb{N}, +)$ gilt: Sind b, c beliebig mit $b < c$, so ist für beliebige $a \in \mathbb{N} : a + b < a + c$. Die Ungleichheit ist veträglich mit der Addition.*

4 Magmen

4.1 Definition Beispiele

Wenige Begriffe in der Mathematik sind elementarer als die Verknüfung. Die Addition zweier Zahlen ergibt ihre Summe. Die Multiplikation ihr Produkt. Untrennbar sind die ersten Wurzeln des Rechnens mit natürlichen Zahlen und das Messen von Größen mit den Gesetzen der Verknüpfung verbunden. Die ältesten uns überlieferten Dokumente aus der Mathematik der Ägypter und Babylonier belegen: Sie hatten schon ein vollständig ausgebildetes System des Rechnens mit natürlichen Zahlen > 0, mit rationalen Zahlen > 0 mit Längen und Flächen. Obwohl sich die erhaltenen Texte nur mit expliziten Zahlen befassen, lassen sie keinen Zweifel daran zu, dass sie die volle Allgemeinheit der benutzten Regeln kannten. Geschickt manipulierten sie Gleichungen ersten und zweiten Grades. Wir wollen den Begriff der Verknüpfung allgemein fassen. Mit vielen menschlichen Tätigkeiten ist es so. Lange können wir schon laufen bevor wir uns Gedanken darüber machen, wie schwierig es ist, auf zwei Beinen das Gleichgewicht zu halten. Oder Kinder lernen singen bevor sie die zugehörige Harmonielehre kennen lernen.
Aber wieder befreien wir uns von den uns gut bekannten Verknüpfungen „+“ und „·“. Dadurch gewinnen wir wieder eine große Freiheit.

Definition 4.1.1. Sei A eine Menge und α eine Abbildung $\alpha : A \times A \to A$. Das Paar (A, α) heißt dann Magma oder Gruppoid oder auch Verknüpfungsgebilde.

Beispiele:

67. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ sind Magmen. Dasselbe gilt für $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$,$(\mathbb{Z}, -)$.

68. Ist X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge, so ist $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \ni (A, B) \mapsto A \cup B$ eine Verknüpfung. Entsprechendes gilt für den Durchschnitt.

69. Ist $(A_i|\alpha_i)$ eine Familie von Magmen, so wird

$$\prod_{i\in I} A_i \ni ((a_i), (b_i)) \mapsto (\alpha_i(a_i, b_i)) \in \prod_{i\in I} A_i$$

zu einem Magma. Sind alle $A_i = A$, so erhält man das Magma A^I.

70. Es sei $A = \{0, 1\}$. Die Verknüpfung sei durch die folgende Tafel gegeben:

$\mid$	0	1
0	1	1
1	1	0

In dieser Verknüpfung heißt das Verknüpfungszeichen $\mid$ Schefferscher Strich. Sie wird oft mit `nand` bezeichnet.

```
  (defun nand(a b)
   (if (and (= 1 a) (= 1 b)) 0
       1))
(nand  (nand 0 0) 0) 1
(nand (nand 0 1) 1) 0
(nand (nand 1 0))
(nand  1 (nand 1 1)) 1
(nand 0 0) 1
(nand 1 1) 0
(nand (nand 0))
```

Wir werden bald sehen: Aus ihr kann man sämtliche zweistelligen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zusammenbauen. So ist zum Beispiel:

```
(defun und(a b)
 (nand (nand a b) (nand a b))
)
(und 0 0) 0
```

71. In dem Satz 2.93 haben wir die bijektive Funktion zwischen

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto \frac{a + b + 1}{2} \cdot (a + b) + a \in \mathbb{N}$$

kennen gelernt. Sie macht $\mathbb{N}$ zu einem Magma. Wir wollen diese Funktion ein klein wenig abändern zu

$$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto \frac{a + b + 1}{2} \cdot (a + b) + a + 1 \in \mathbb{N}$$

Das Magma $(\mathbb{N}, \alpha)$ hat besondere Eigenschaften, die wir im weiteren immer wieder untersuchen.

Aufgaben:

57. Konstruiere mit `nand` die oder Funktion.

```
      (defun nota (a)
       (nand a a)
      )
(nota 0) ==> 1
     (defun oder (a b)
      (nota (und (nota a) (nota b)))
     )
```

Geht das Einfacher?

4.1.1 Untermagma

Definition 4.1.2. Sei (A, α) ein Magma. Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt Untermagma, wenn $\alpha(U \times U) \subset U$ ist

Satz 4.1. *Der Durschnitt von Untermagmen ist ein Untermagma.*

Sei $(U_i|i \in I)$ eine Familie von Untermagmen und $a, b \in \bigcap_{i \in I} U_i =: D$. Dann ist $\alpha(a, b) \in U_i$ für alle $i \in I$, da jedes U_i ein Untermagma ist. Daher ist $\alpha(D \times D) \subset D$. Also ist D ein Untermagma. □

Folgerung 4.2. *Ist $U \subset A$ eine Teilmenge von A, so gibt es ein kleinstes Untermagma, welches U enthält. Dieses Untermagma sei mit $[U]$ bezeichnet. Wir sagen U erzeugt $[U]$.*

Satz 4.3. *Es ist $[U] = U \cup \alpha([U] \times [U])$.*

Es ist $U \cup \alpha([U] \times [U])$ abgeschlossen gegenüber α also ist $[U] \subset U \cup \alpha([U] \times [U])$. Die umgekehrte Inklusion ist auch klar. □

Beispiele:

72. Sei $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto \frac{a+b+1}{2} \cdot (a+b) + a + 1 \in \mathbb{N}$. Dann ist $[0] = \{0\} \cup \alpha([0] \times [0]) = \mathbb{N}$ und $0 \notin Bi(\alpha)$.

    Wegen Satz 2.93 ist $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine surjektive Abbildung. Die Bildmenge enthält nicht 0. □

Aufgaben:

58. Wir betrachten Das Magma $(\mathbb{N}, +)$.

a) Ist $a \in \mathbb{N}$ so ist das von a erzeugte Untermagma $[a] = a \cdot \mathbb{N}$.
b) Sei $U = \{3, 5, 7\}$. Berechne das von U erzeugte Untermagma.

59. Wir betrachten die Verknüpfung $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto 2 \cdot a + b$.
    a) $(\mathbb{N}, *)$ ist weder assoziativ, noch kommutativ und hat auch kein neutrales Element.
    b) Berechne das von 1 erzeugte Untermagma [1].
    c) Berechne das von 2 erzeugte Untermagma [2].
    d) Berechne das von 4 erzeugte Untermagma [4].
    e) Zeige Die Untermagmen [1], [2], [4] haben paarweise leeren Durchschnitt.
    f) Zeige $[\{1, 2\}] = \mathbb{N} \setminus 0$

4.1.2 Morphismen von Magmen

Satz 4.4. *Seien (A, α) und (B, β) zwei Magmen. $f : A \to B$ eine Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *$f(\alpha(a_1, a_2)) = \beta(f(a_1), f(a_2))$ für alle $a_1, a_2 \in A$.*

2. *Das Diagramm*
$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \times B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
ist kommutativ.

3. *Der Funktionsgraph $G_f = \{(a, f(a)) | a \in A\} \subset A \times B$ ist abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$. Das heißt für alle $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_f$ ist auch $(\alpha(a_1, a_2), \beta(b_1, b_2)) \in G_f$.*

1. $\Longrightarrow$2. : Sei $(a_1, a_2) \in A \times A$. Dann ist nach Voraussetzung $\beta((f \times f)(a_1, a_2)) = f(\alpha(a_1, a_2))$. Also ist das Diagramm kommutativ.
2. $\Longrightarrow$1.: Genauso.
1. $\Longrightarrow$3.: Sei $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_f$. Dann ist $b_1 = f(a_1)$ und $b_2 = f(a_2)$. Wir erhalten, da $\alpha(a_1, a_2) \in A$ ist: $(\alpha(a_1, a_2), f(\alpha(a_1, a_2))) \in G_f$. Nach Voraussetzung ist:

$$\begin{aligned} (\alpha(a_1, a_2), f(\alpha(a_1, a_2))) &= (\alpha(a_1, a_2), \beta(f(a_1), f(a_2))) \\ &= (\alpha \times \beta)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \end{aligned}$$

Also ist G_f gegenüber $\alpha \times \beta$ abgeschlossen. Etwas ekelhaft sind die vielen Klammern. Ich sollte eine bequemere Bezeichnung einführen.
3. $\Longrightarrow$1. Sei $(a_1, a_2) \in A \times A$. Dann ist $(a_1, f(a_1))$ und $(a_2, f(a_2)) \in G_f$ und auch $(\alpha(a_1, a_2), f(\alpha(a_1, a_2))) \in G_f$. Nach Voraussetzung ist auch
$(\alpha(a_1, a_2), \beta(f(a_1), f(a_2))) \in G_f$.
Wegen der Rechtseindeutigkeit des Funktionsgraphen ist $\beta((f(a_1), f(a_2))) = f(\alpha(a_1, a_2))$. Das war zu zeigen. $\square$

Definition 4.1.3. Sind (A, α) und (B, β) zwei Magmen, so heißt eine Abbildung $f : A \to B$, die eine der drei äquivalenten Bedingungen - und damit alle- erfüllt ein Morphismus der Magmen.

Satz 4.5. *Seien (A, α) und (B, β) zwei Magmen. $f, g : A \to B$ Morphismen. $U \subset A$. Ist $f/U = g/U$, so ist auch $f/[U] = g/[U]$. Stimmen die Morphismen auf einem Erzeugendensystem überein, so sind sie auf dem Erzeugnis gleich.*

Nach Voraussetzung ist $f(u) = g(u)$ für alle $u \in U$. Sei

$$T = \{a | a \in A \text{ mit } f(a) = g(a)\}$$

Seien $a_1, a_2 \in T$. Dann ist $f(\alpha(a_1, a_2)) = \beta((f(a_1), f(a_2))) = \beta(g(a_1), g(a_2)) = g((\alpha(a_1, a_2)))$. Daher ist $\alpha(a_1, a_2) \in T$. Daher ist T abgeschlossen gegenüber α. Daher ist $T = [U]$. $\square$

4.1.3 Freie Magmen

Satz 4.6 (Rekursionssatz für Magmen). *Sei (A, α) ein Magma erzeugt von E. Die Verknüpfung $\alpha : A \times A \to A$ sei injektiv und $E \cap Bi(\alpha) = \emptyset$.. Ist dann (B, β) ein weiteres Magma und $f : E \to B$ eine Abbildung„ so gibt es genau einen Morphismus $f^* : A \to B$, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[dl, "f^*"'] \\ B & \end{tikzcd}$$

Es ist $A \times B$ vermöge
$\alpha \times \beta : (A \times B) \times (A \times B) \ni ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mapsto (\alpha(a_1, a_2), \beta(b_1, b_2)) \in A \times B$

zu einem Magma.
Wir betrachten

$$D = \{(e, f(e)) | e \in U\}$$

Das von D erzeugte Untermagma sei $[D] \subset A \times B$. Ich zeige $[D]$ ist rechtseindeutig.

1. Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $b \in B$ mit $(a, b) \in [D]$. Dies liegt einfach an der Abgeschlossenheit $[D]$.

2. Zu jedem $e \in E$ gibt es nur ein $b \in B$ mit $(e, b) \in [D]$. Sei etwas $(e, f(e))$ und $(e, b) \in [D]$. Ist $b \in D$, so ist $b = f(e)$, da f eine Funktion ist und als solche rechtseindeutig. Angenommen $(e, b) \in (\alpha \times \beta))([D])$. Dann gibt es (a_1, b_1) und $(a_2, b_2) \in [D]$ mit $(\alpha \times \beta)((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = (\alpha(a_1, a_2), \beta(b_1, b_2)) = (e, b)$. Es folgt $\alpha(a_1, a_2) = e$. Dies geht nicht.

3. $[D]$ ist rechtseindeutig:

   Sei

   $$T = \{a | \text{ Es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in [D]\}$$

   Es ist $E \subset T$ wie wir gesehen haben. Sei (a_1, b_1) und $(a_2, b_2) \in T$. Wir betrachten das Element $\alpha(a_1, a_2) \in [D]$. Sei auch $(\alpha(a_1, a_2), b) \in [D])$. Da $(\alpha(a_1, a_2)) \notin D$ ist $(\alpha(a_1, a_2), b) \in (\alpha \times \beta)([D])$. Daher gibt es (a'_1, b'_1) und $(a'_2, b'_2) \in [D]$ mit $(\alpha \times \beta)((a'_1), b'_1), (a'_2, b'_2) = (\alpha(a'_1, a'_2), \beta(b'_1, b'_2)) = (\alpha(a_1, a_2), b)$. Daher ist $\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a'_1, a'_2)$. Daher ist $a_1 = a'_1$ und $a_2 = a'_2$, da α injektiv ist. Zusätzlich folgt $b = \beta(b'_1, b'_2)$. Zu a_1 gehört aber nur ein b_1 mit $(a_1, b_1) \in [D]$. Entsprechendes gilt für a_2. Daher ist $b'_1 = b_1$ und $b'_2 = b_2$. Daher ist $[D]$ rechtseindeutig. Damit ist die gegenüber $\alpha \times \beta$ abgeschlossene Teilmenge $[D]$ der Graph einer Funktion. Es folgt der Rekursionssatz für Magmen. □

Definition 4.1.4. Sei (A, α) ein Magma. Und $E \subset A$ erzeuge A und $E \cap Bi(\alpha) = \emptyset$. Dann heißt A ein freies Magma mit der Basis E

Folgerung 4.7. *Haben zwei Magmen A und B gleichmächtige Basen, so sind sie isomorph.*

Der Beweis geht wie üblich.

5 Programme

5.1 Bahnen diskreten dynamischen Systemen

5.1.1 Bahnen mit Hilfe des Rechnens mit Rest

Es soll zunächst eine natürliche Zahl im $m-$adischen System ausgegebnen werden. Ich setze zunächst die lexicalische Bindung und den Modul.
Computerecke:

11.
```
(progn
  " Am Anfang setzen mir den Modul und die lexikalische Bindung"
(setq lexical-binding t)
(setq modul 3)
)
```

12. Die Berechnung der Zahl im m-adischen System

```
  (defun m-adisch(zahl)
 "Gibt im m-adischen System die Zahl als Liste von Ziffern aus"
 (let (( liste ()))                                                         ;Am An

    (if (= zahl 0) (list 0)
        (while  (> zahl 0)
 (setf liste (append (list
                           (mod zahl modul)) liste)
       zahl (floor zahl modul))
 )
      )
    liste)
 )
```

Es ergibt sich beispielsweise

(m-adisch 17) => (1 2 2)

13. Die nächste Funktion berechnet bei gegebener Funktion f die Bahn eines Elementes.

```
(defun bahna (x f)
(let ((liste nil))
     (while (not (member x liste))
       (progn
  (setq liste (append liste (list x)))
  (setq x (funcall  f x))
  )
       )
    (setq liste (append liste (list x)))
    )
)
```

Um eine Beispielfunktion bereit zu haben:

```
(defun rest13(zahl)
  (mod (* zahl zahl)
       13)
  )
(rest13 1789) ==>12
```

Jetzt wird das Symbol `f` auf die Funktion `rest13` gesetz.

```
(setf f 'rest13)
```

und anschließend die Bahn eine Elementes berechnet.

```
(bahna   101 f) ==> (101 9 1 1)
```

14. Das Bahnende in Abhängigkeit von f wird bestimmt

```
(defun bahnende (x f)
(let ((liste nil))
     (while (not (member x liste))
       (progn
  (setq liste (append liste (list x)))
  (setq x (funcall  f x))
  )
       )
     x)
)
(bahnende 104 f)
```

15. Eine Liste der Bahnenden wird erstellt:

```
(defun listederbahnenden(x f)
(let ((liste nil) (i 1))
     (while (< i x)
       (progn
  (if (not (member (bahnende i f) liste))
      (setq liste (append liste (list (bahnende i f))))
    )
        (setq i (1+ i))
  )
       )
     liste)
)
(listederbahnenden 200 f) => (1 2 4 5 8)
```

6 Splitter

6.1 Flächeninhalt in Ägypten

Fläche eines Vierecks: Aus dem alten Ägypten ist aus der Zeit des mittleren Reiches ungefähr 2000 vor Christus die folgende Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes einse beliebigen Viereckes überliefert

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Dies ist nach dem Buch von C.J. Scriba und P.Schreiber "5000 Jahre Geometrie" Diese Formel ist falsch aber sie wurde gelehrt. Sie ist falsch. Denn nach der Formel hätte jede Raute mit der Seite 1 auch den Flächeninhalt 1. Aber die Formel ist nicht völlig falsch. Denn ist das Viereck ein Rechteck, so ist $a = c$ und $b = d$ und daher $F = a \cdot b$.

Fläche des Kreises. Hier überlieferten die Ägypter die Formel:

$$F = (\frac{8}{9} \cdot d)^2$$

Dabei ist d der Ducrmesser des Kreises. Ersetzt man den Durchmesser durch den Radius r, so erhält man:

$$F = (\frac{8}{9} \cdot 2r)^2 = \frac{16}{9} \cdot r^2 = 3.16 \cdot r^2$$

$\frac{16}{9}$ ist erstaunlich genau die Zahl π. Es ist keine Begründung der Formel überliefert. Wenn sich die Historiker der Wissenschaft nicht täuschen, so wurde diese Formel rein dogmatisch gelehrt. Der Landvermesser und Berchner musste diese Formel einfach ohne jeden Zweifel akzeptieren. Das hatte praktische Konsequenzen. Denn jedes Jahr musste das Land neu vermessen werden. Ähnliches gilt für die gesamte ägyptische Mathematik. Beweise oder Begründungen sind nicht überliefert.

6.2 Bernouilli Koeffizienten

Sei $M_n := \{0, \ldots, n-1\}$ Ich bezeichne mit

$$B(n,k) = \text{Anzahl der Teilmengen einer von } M_n \text{ mit } k \text{ Elementen } \}$$

Es gilt :

$$B(n,k) = B(n-1,k) + B(n-1,k-1)$$

Dies ermöglicht, die Binomialkoeeffizienten durch Addition auszurechnen.

6.3 Weltsichten

„Der Raum und physikalische Quantenefekte“. Dies ist ein Vortrag, den Bodo Pareigis in Dillingen gehalten hat. „Der uns umgebende Raum wird durch unsere Erfahrung, durch Experimente, durch Messunegn auf eine merkwürdige Weise zugänglich gemacht“
„Zunächst ist als wichtigste Eigenschaft festzuhalten, dass zwei Punkte genau dann gleich sind, wenn sie durch Funktionen aus O nicht unterschieden werden können. „
In Bourbaki „Topologie Algébraique“ steht die folgende Definition im Kapitel „Revetemet“.

Definition 6.3.1. Ein Trippel (X, p, B) heißt $B-$ Raum, wenn X und B Mengen sind und $p : X \to B$ eine Funktion ist.

Dabei kann man etwa bei X an den Raum denken, was immer das ist und bei B etwa an ein Blatt Papier auf das ein Bild des Raumes, der Wirklichkeit, aufgezeichnet wird. Um etwas konkretes vor Augen zu haben denke ich zum Beispiel an eine $x-y$ Ebene und etwa die Funktion, die jedem Punkt (x, y) die Summe $x + y$ zuordnet.

Definition 6.3.2. Eine Abbildung zwischen $B-$ Räuemen $f : X \to X'$ heißt Morphismus, wenn das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[dl, "p'"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Die $B-$ Räume bilden eine Kategorie. Beispiele:

73. $X = \mathbb{R}^2$ und $B = \mathbb{R}$. $p(x, y) = x$ und $p'(x, y) = x + y$. Was sind die Morphismen. Kann man die Morphismen berechnen.

Definition 6.3.3. $(\Omega, \circ, A, B)$ heißt eine Sicht-Wirkung von X auf A in Richtung B, wenn

1. Ω, A, B Mengen und
2. $\circ : \Omega \times A \to B$ eine Funktion ist.

Beispiele:

74. Ist $A = B$ und $\Omega = \{1\}$, so ist $\circ$ nichts anderes als eine Funktion $\circ : A \to A$. Wir haben also eine Menge A und eine Funktion α. Das Paar (A, α) ist dann eine Kette im Sinne von Dedekind.
75. Ist Ω eine größere Menge und $A = B$, so erhält man ein $\Omega-$Muster.

Der Gedanke, der dahinter steht ist folgender: Einer betrachtet die Welt A (oder einen Ausschnitt der Welt) mit Hilfe der Operationen Ω. Das heißt er bildet A mit den Funktionen auf ein Blatt Papier, die Netzhaut, räumliche Modelle, Tonaufzeichnungen auf B ab. Dieses B ist oft eine Menge von Zahlen.

Definition 6.3.4. Seien $(\Omega, \circ, A, B), (\Omega', *, A', B')$ Weltsichten. Ein Tripel (α, f, g) heißt Morphismus, zwischen den Weltsichten, wenn

1. $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ und $\alpha : \Omega \to \Omega'$ ist und
2. $g(x \circ a) = \alpha(x) * f(a)$ für alle $(x, a) \in \Omega \times A$ gilt

Ich weiß nicht so recht ob der Begriff etwas bring. Jedenfalls gilt: Die Weltsichten bilden eine Kategorie.

6.4 Thales und die Höhe der Pyramide

Von Thales heißt es, er habe die Ägypter sehr beeindruckt, indem er dei Höhe einer Pyramide betsimmt habe ohne sie zu besteigen. Versuchen wir seine Argumente zu rekonstruieren. In der Nähe der Pyramide stellt er einen Stab senkrecht auf. Zuvor hat er die Länge des Stabes gemessen. Wenn der Schatten des Stabes genauso lang ist, wie der Stab, sollte der Schatten der Pyramid

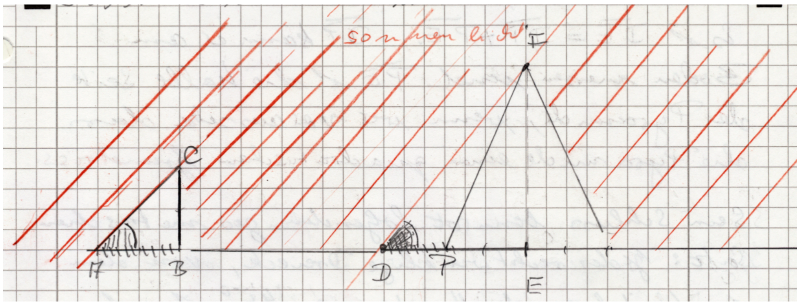


Abb. 6.1: Pyramide

genauso lang wie die Pyramide hoch ist sein. Dies soll die folgende Zeichnung verdeutlichen.
Es ist $[AB]$ der Schatten des Stabes $[BC]$. Die Längen $\overline{AB} = \overline{BC}$. Dann muss $\overline{DE} = \overline{EF}$ sein. Auf diese Weise lässt sich nur die Höhe einer Pyramide bestimmen, deren Steigungswinkel größer als 45^0 ist. Sehen wir davon ab, ob diese Legende stimmt. Arbeiten wir heraus, was Thales in seiner Argumentation als selbstverständlich voraussetzt.

1. Links hat er ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei gleich langen Schenkeln.

2. Rechts bilden die Sonnenstrahlen mit dem Boden den gleichen Winkel. Er glaubt dass die Sonnenstrahlen bei D den gleichen Winkel mit der Horizontalen bilden wie bei A. Er setzt also voraus, dass die Sonnenstrahlen parallel sind. Außerdem setzt er voraus, dass die Punkte A, B, D auf einer Geraden liegen. Da an parallelen Geraden Stufenwinkel gleich groß sind kann er schließen, dass der Winkel $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$ ist. Dabei ist E der Fußpunkt des Lotes von der Spitze der Pyramide F auf den Boden mit dem Fusspunkt E.

3. Dann schließt er: Auch das Dreieck $\triangle DEF$ ist rechtwinklig gleichschenklig. Das heißt $\overline{DE} = \overline{EF}$. $\overline{EF}$ kann er messen. Es ist $\overline{DE} = \overline{DP} + \overline{PE}$. Dabei kann er $\overline{DP}$ am Boden messen und $\overline{PE}$ ist die halbe Seite der Pyramide.

4. Sei Schluss benutzt den Satz: Jedes rechtwinklige Dreieck, von dem ein Winkel an der Hypothenuse 45^0 ist, ist gleichschenklig. Men fragt sich: Glaubte er diesen Satz als Axiom oder begründete er ihn weiter?

5. Seine Nachfahren haben den Satz verallgemeinert:
   a) In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.
   b) Sind in einem Dreieck die Basiswinkel gleich groß, so ist das Dreieck gleichschenklig.

   Schauen wir a) an. Dies ist eine starke Verallgemeinerung des Satzes, den Thales für seine Argumentation braucht. Eine Verallgemeinerung kann besser und öfter mit der Erfahrung konfrontiert werden. Es gibt mehr gleichschenklige Dreiecke als es gleichschenklige und rechtwinklige gibt.

6.5 Aritarch von Samos Triangulation

Aristarch von Samos fragte „Wieviel Mondentfrenungen ist die Sonne von der Erde entfernt?“ . Er war bereit seine mathematischen Kenntnisse auf den Raum anzuwenden. Manchmal sieht man am Tage Sonne und Mond gleichzeitig am Himmel stehen. Aristarch wusste oder glaubt, dass der Mond kein selbstleuchtender Körper ist. Er wird von der Sonne beleuchtet und so gelangt das Licht zu uns. Aristarch betrachtet die Situation, wenn der Beobachter auf der Erde nur den Halbmond sieht.

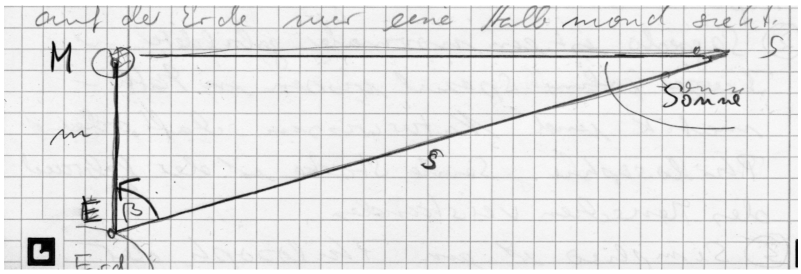


Abb. 6.2: Mond Sonne

Dann ist der Winkel $\angle EMS = 90^0$. Aristarch muss daher den Winkel β messen. Er hat mit seinen Mittel einen Winkel von 87^0 festgestellt. Mit den Mittel der Mathematik aus der Schule ergibt sich: $\cos(\beta) = \frac{m}{s}$. Also ist $s = \frac{m}{\cos(\beta)}$. Aristarch erhielt daher: $s = \frac{m}{\cos(87)} = m \cdot 19.1 \approx m \cdot 20$. Also ist die Erde 20mal so weit von der Sonne wie vom Mond entfernt. Moderne Messungen ergeben einen Winkel $\beta = 89.85^0$. Das ergibt $s \approx 382 \cdot m$. Aristarch täuschte sich also

um den Faktor 20. Das sieht sehr schlecht aus. Aber es liegt einfach daran, dass der Cosinus in der Nähe von 90^0 sehr klein ist.
Es könnte jemand einwenden. Die Griechen hatten keine trigonometrischen Funktionen . Aber dies spielt keine Rolle. Es genügt die Kenntnis des Strahlensatzes.

6.6 Warum ist der Raum drei dimensional?

Im Jahre 1630 erschien das Buch „ Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsystem“ von Galilei (Siehe Galilei, *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme Das Ptolemäische und das Kopernikanische*) Sei Author wurde in einem Inquisitionsprozess dazu verurteilt die wichtigste These des Buches zu widerrufen. In dem Buch wird auch darüber diskutiuert, warum die Welt drei Dimensionen hat. Aber die Argumente dafür sind völlig unverständlich und wirr.

6.7 Aus dem Vorwort von Polya und Szegö

Aus Aufgaben und Lehrsätze der Analysis.

- Ein Gedanke, den man einmal anwendet, ist ein Kunstgriff. Wendet man ihn zweimal an, so wird er Methode.(Siehe Pólya und Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis*, Seite VII)

- Es kommt auch sonst vor, dass die umfassendere Behauptung leichter zubeweisen ist, als die engere. In der Aufstellung der umfassenderen Behauptung steckt eben die Hauptleistung, die Absonderung des Wesentlichen, die Erfassung des vollen Tatbestandes.

- „Qiu nimium probat nihil probat“ (Wer zuviel beweist, beweist nichts.) Man sehe jeden Beweis mit Argwohn an, ob alle Voraussetzungen auch wirklich benutzt worden sind; man such diesselben Folgerungen aus weniger Voraussetzungen oder eine schärfere Folgerung aus den selben Voraussetzungen zu gewinnen, und beruhige sich nur dann, wenn Gegenbeispiele zeigen, dass der Rand des Möglichen erreicht ist.

Stichworte

Personen

Orte

Literatur

al., Ebbinghaus et. *Zahlen.* Berlin Heidelber New York: Springer, 1992.

Aquin, Thomas von. *Summe gegen die Heiden.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft erster Band, 1974.

Aristoteles. *Acht Bücher Physik.* Leibzig: Wilhelm Engelmann, 1854.

Augustinus, Aurelius. *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22.* München: DTV, 1978.

Bayern, Evangelisch-Lutherische Kirche in, Hrsg. *Evangelisches Gesangbuch.* Evangelischer Presseverband in Bayern, 2005.

Becker, Oskar. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* Freiburg: suhrkamp, 1975.

Bender, Ernst, Hrsg. *Deutsche Dichtung der Neuzeit.* Karlsruhe: Braun, 1968.

Beuron, Erzabtei, Hrsg. *Die Bibel. Die heilige Schrift des alten und neuen Testamentes.* Herder, Aug. 1965.

Bolzano, Bernhard. *Paradoxien des Unendlichen.* Felix Meiner, 1920.

Bourbaki, Nicolas. *Algebra I Chapters 1-3.* Springer, 1989.

Brigitte, Falkenburg. *Mythos Determinismus.* Springer Spektrum, 2012.

Das Auge des Adlers. Kösel, 1950.

Dedekind, Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen.* Vieweg, 1965.

Deiser, Oliver. *Einführung in die Mengenlehre.* 2. Berlin Heidelberg: Springer, 2004.

Devlin, Keith. *The Joy of Sets.* New York Berlin Heidelberg: Springer, 1993.

Fricke, Robert, Emmy Noether und "Oystein Ore, Hrsg. *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke Bd. 3.* Bd. 3. Braunschweig: Vieweg, 1930.

Friedrichsdorf, Ulf und Alexander Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker.* Vieweg, 1985.

Galilei, Galileo. *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme Das Ptolemäische und das Kopernikanische.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1982.

Gottwald, Hrsg. *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Harri Deutsch, 1990.

H.-D.Ebbinghaus. *Einführung in dei Mengenlehre.* B.I. Wissenschaftsverlag, 1994.

Harrison, Edward R. *Kosmologie.* Darmstädter Blätter, 1983.

Herbert Meschkowski, Winfried Nilson, Hrsg. *Georg Cantor Briefe*. Springer, 1991.

Jacobs, Konrad. *Resultate Ideen und Entwicklungen in der Mathematik*. Vieweg, 1987.

Landau, Edmund. *Grundlagen der Analysis*. Leibzig: Akademische Verlagsanstalt M.B.H., 1930.

Lawvere, F. William und Stephen H.Schanuel. *Conceptual Mathematics, A first introduction to categories*. Cambridge Univerty Press, 1997.

Lehmann-Leander, Ernst R., Hrsg. *Aristoteles Analytiker der Wirklichkeit*. Vollmer Verlag, 1955.

Macho, Thomas H., Hrsg. *Sartre*. DTV, 1998.

Manfred, Geier. *Der Wiener Kreis*. Rowohlt, 1995.

Nietzsche, Friedrich. *Ecce Homo*. Kröner, 1964.

Poincaré, Henri. *Wissenschaft und Hypothese*. Leibzig: B.G. Teubner, 1904.

Pólya, Georg und Gabor Szegö. *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis*. Berlin, Heidelber, New York: Springer, 1970.

Rucker, Rudy. *Die Ufer der Unendlichkeit*. Frankfurt am Main: Wolfgang Krüger Verlag, 1989.

Sambursky, Shmuel, Hrsg. *Der Weg der Physik*. Deutscher Taschenbuch Verlag, 1978.

Inhaltsverzeichnis