Inhaltsverzeichnis

1 Wiederkehr **1**
1.1 Nichts neues unter der Sonne . . . 1
1.2 Köcher . . . 4
1.3 Relationen . . . 5

2 Muster **10**
2.1 Definition und Eigenschaften . . . 10
2.2 Morphismen . . . 19
2.2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften . . . 19
2.2.2 Verträgliche Äquivalenzrelationen . . . 22
2.2.3 Rekursionssatz . . . 25
2.2.4 Unendliche Mengen . . . 26
2.2.5 Zyklische Muster . . . 37
2.3 Sechsecke . . . 45
2.3.1 Bierdeckel . . . 45

Literatur **49**

1 Wiederkehr

1.1 Nichts neues unter der Sonne

Abb. 1.1: Sonnenuntrgang in Istrien

> Das Fräulein stand am Meere
> und seufzte lang und bang,
> Es rührte sie so sehre
> Der Sonnenuntergang.
>
> Mein Fräulein! sein Sie munter,
> Das ist ein altes Stück;
> Hier vorne geht sie unter
> Und kehrt von hinten zurück.
>
> Heine, *Heine Werke*, Seite 198

Heinrich Heine hat recht. Es ist tatsächlich ein altes Stück. Aber was heißt schon altes Stück. Es ist doch immer wieder neu. Jeden Morgen geht die Sonne auf und jeden Abend verschwindet sie unter dem Horizont. Die Sonne macht Morgen und Abend. Sie beendet jeden Tag und erschafft ihn wieder neu.
Heine hat unrecht, wenn er sich über die Ergriffenheit des Fräuleins mokiert. Die alten Stücke rühren am tiefsten. Immer wieder erscheinen aufs Neue die gleichen Sternbilder

am Himmel. Die Pflanzen blühen, Bäume werden grün und ihr Laub verfärbt sich wieder. Diese stete Wiederkehr, dieser Rhythmus, welcher die Zeit prägt, begründet unser Vertrauens in die Welt. Jedes Leben richtet sich nach diesem Takt. Die Pflanze lebt, weil sie ihre innere Uhr nach nach dem Taktstock des Dirigenten richtet. Ohne den Taktstock ohne das innere Metronom irrten wir in Raum und Zeit umher. Der Takt richtet uns aus, auf ihn können wir uns verlassen. Deswegen gehört er zu der Urerfahrung, die uns hier zuhause sein lässt und die Leben und Denken erst möglich macht. Geschehnisse wieder-

Abb. 1.2: Sonnenuntergang auf der Insel La Palma

holen sich in voraussagbarer Weise. Regen fällt aus den Wolken, Flüsse fließen abwärts ins Meer. Verdunstetes Wasser steigt wieder aufwärts. Diese ständigen Regelmäßigkeiten und Kreisläufe lassen uns an das Kausalgesetz glauben: Die Ereignisse sind geordnet. Jedem Weltzustand geht ein andere Zustand voraus. Das Gestern ist Grund für das Heute und das Heute ist Grund für das Morgen. Wie eine große Kette reihen sich die Geschehnisse aneinander. In seiner engen dogmatischen Form heißt das Kausalgesetz.

Satz 1.1. *Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkung.*

Oft sind große Entdeckungen mit der Entdeckung oder Umdeutung von Rhythmen verbunden. Die Erde dreht sich um sich selbst. Myten erzählen davon. In dem Buch der Prediger des alten Testamentes heißt es:

> Nun liest man freilich im Buche Salomos, genannt der Prediger, die Worte ‘Was ist’s, das geschehen ist? Eben das hernach geschehen wird. Was ist’s, das man getan hat? Eben das man hernach wieder tun wird, und geschieht nichts neues unter der Sonne. Geschieht auch etwas, davon man sagen möchte: ‘Siehe das ist neu’. Es ist zuvor auch geschehen in den langen Zeiten, die vor uns gewesen sind. Augustinus, *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*, Seite 79

Zu Beginn des 19ten Jahrhunderts war vertrat der Physiker und Mathematiker Physiker Pierre Simon de Laplace das dogmatische Kausalgesetz.

> Die gegenwärtigen Ereignisse stehen mit den vergangenen in einer Verbindung, die sich auf das evidente[1] Prinzip gründet, dass ein Ding nicht anfangen kann zu sein ohne Ursache[2], die es hervorbringt. Dieses Axiom, bekannt unter dem Namen des „zureichenden Grundes“, erstreckt sich auch auf Handlungen, die man für indifferent hält. Der freieste Wille kann sie nicht ohne ein bestimmendes Motiv hervorbringen; denn wenn er in dem Falle, dass alle Umstände zweier Lagen gleich wären, das eine Mal handelte und das andere Mal nicht, dann wäre seine Wahl eine Wirkung ohne Ursache; sie wäre dann, sagt Leibnitz, der blinde Zufall der Epikuräer. Die entgegengesetzte Meinung ist eine Täuschung des Geistes, der, indem er die flüchtigen Gründe der Wahl des Willens in indifferenten Dingen aus dem Auge verliert, sich überredet, dass sich der Wille durch sich selbst und ohne Motive bestimmt hat.Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seinesfrüheren Zustandes und andererseits als die Ursache dessen, der folgen wird, betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle Kräfte, von denen die Natur belebt ist, sowie die gegenseitige Lage der Wesen, die sie zusammen setzen, kennen würde, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Grössen einer Analyse zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der grössten Weltkörper wie die des leichtesten Atoms ausdrücken: nichts würde für sie ungewiss sein und Zukunft wie Vergangenheit ihr offen vor Augen liegen.
>
> Pierre Simon de Laplace Auszug aus„Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten“(1814)Quelle: Pierre Simon de Laplace: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten. Nach der sechsten Auflage des Originales übersetzt von Norbert Schwaiger. – Leipzig: Duncker & Humblot, 1886.

Das hängt zusammen mit der Auffassung, dass es nichts wesentlich Neues geben kann. Alles ist in einem Anfangszustand eingewickelt. Im Laufe der Zeit werden die Möglichkeiten nur ausgewickelt. Das Universum ist nicht kreativ. Auch Gott nicht. Erschaffen aus dem Nichts heißt wahrscheinlich: Erschaffen ohne Grund. Grundlos hat Gott die Welt erschaffen. Es gab keinen zureichenden Grund für die Schöpfung. Die Schöpfung wurde nicht ausgewickelt. Sondern Gott war kreativ. Ein allwissender Dämon hätte nicht ausrechnen können, was mit der Welt geschieht. Genauso sind große Künstler und Wissenschaftler im Rahmen des menschlichen kreativ. Keiner kann voraussagen welche Fragen auftauchen werden und welche davon beantwortet werden. Die physikalischen und chemischen Gründe reichen nicht aus um Bachs Johannespassion zu erklären.
Um 1650 hatte der Erzbischof Usher aufgrund der Bibel berechnet, dass Gott die Welt am Sonntag den 23. Oktober 4004 vor Christus geschaffen habe. Leibniz fragt dazu:

> Angenommen, es fragte jemand, weshalb Gott nicht alles ein Jahr früher geschaffen hat, ferner, er wolle daraus den Schluss ziehen, Gott habe da etwa getan, wofür sich unmöglich ein Grund finden lässt, weshalb er so und nicht anders gehandelt, so würde man ihm erwidern, dass seine Schlussfolgerung nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Zeit etwas außer den zeitlichen Dingen ist.

[1] „evident“ sagt der hohe Priester der Wissenschaft immer wenn er den Leser einschüchtern will. Es soll eigentlich heißen: Liebe Leserin, denke an dieser Stelle nicht weiter über meine Behauptung nach, sondern glaube sie einfach unbesehen. Sonst wirst Du der heiligen Inquisition übergeben. Die werden dich ins Verließ sperren. Dort wirst Du zusammen mit den Uneinsichtigen vergeblich nach den Quellen der Weiheit dürsten

[2] Was ist das Ursache?

(nach Roman Sexl, *Raum-Zeit-Relativität*, Seite 16)

1.2 Köcher

Ich will mich mit dem Problem der Wiederkehr beschäftigen.
Wir denken an die Karte eines Wegenetzes, an den Plan einer Stadt. In Stadt gibt es Straßen und Orte. Die Orte wollen wir auch Knoten nennen. Die Richtung, in der man die Straße wandern oder fahren kann, wird durch Pfeile symbolisiert. Ein Beispiel eines solchen Planes ist:

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr] \arrow[drrrr] & & & & \\
0 \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \arrow[r] & 2 \arrow[u] & 4 \arrow[l, bend left] \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & 8 \arrow[l, bend left] \arrow[r] & 9
\end{tikzcd}$$

Abb. 1.3: Stadtplan

In diesem Stadtplan gibt es Schleifen oder Kreise und abgeschlossene Teilpläne. Zwischen manchen Knoten gibt es mehrere Wege. Man denke nur daran, dass es manchmal zwischen zwei Orten einen Fußweg, einen Radweg und eine Straße gibt. Von 0 kann man ausgehen und auch wieder zurückkehren. Genau dasselbe gilt für 1. Von 2 aus führt kein Weg zurück nach 0 oder 1. Bei 2 startet ein abgeschlossenes Straßensystem ein abgeschlossener Teilplan. 3 ist auch ein Ausgangspunkt desselben Teilplanes. . Ich beschäftige mich zunächst mit dem Thema , wann es Rückkehr gibt und wann nicht. Um eine Wanderrichtung anzugeben ist ein Pfeil notwendig. Der Pfeil geht von einer Quelle aus und deutet auf ein Ziel. Den Plan nennt man einen gerichteten Multigraphen oder Köcher. Wir können gerichtete Graphen auch folgendermaßen deuten: Jeder Knoten des Graphen entspricht ein möglicher Weltzustand. [3]. Geht von einem Knoten A ein Pfeil aus und zeigt auf einen Knoten B, so ist B ein möglicher Folgezustand.

- Bei $0, 2, 4, 6$ und 9 ist die Zukunft, das Morgen oder der nächste Weltzustand eindeutig bestimmt. In diesen Knoten ist Prophetie möglich. Denn Prophetie heißt aus dem Zustand jetzt auf die Zukunft schließen. Aber es ist nur die nächste Zukunft erschließbar.

- Bei 0 und 1 kann man eindeutig auf die Vergangenheit zurückschließen. Die nächste Vergangenheit ist daher eindeutig bestimmt. In diesen Punkten ist Geschichtsforschung möglich.

- Es kann durchaus sein, dass man die Zukunft voraussagen kann aber wenig über die Vergangenheit. Also ist manchmal Prophetie leichter als Geschichtsforschung.

Laplace dachte bei seiner Bemerkung 1.1 wahrscheinlich an den folgenden besonders einfachen Graphen: In diesem gerichteten Graph sind in jedem Knödel Vergangenheit und

[3] Oder wer nicht so hoch greifen will denke etwa an ein Brettspiel etwa Schach. Dann ist ein Knoten eine bestimmte Stellung

$$0 \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \dashrightarrow \infty$$

Abb. 1.4: Strenges Kausalgesetz von Laplace

Zukunft eindeutig bestimmt. Im Punkte 0 ist es verboten (sinnlos) nach der Vergangenheit zu fragen[4].
Aufgaben:

1. Gib alle abgeschlossenen Teilmengen in der Figur 1.3 an.
2. Von welchen Punkten kann man alle Punkte erreichen.

Definition 1. Ein Quadrupel (A, Ω, o, t) heißt ein Köcher, wenn folgendes gilt:

- A, Ω sind Mengen.
- $o, t \colon \Omega \to A$ sind Funktionen.

Man denke bei der Menge A an eine Menge von Orten, bei der Menge Ω an Einbahnstraßen, die von einem Ort zum anderen führen. Oder man denke bei A an eine Menge von Punkten und bei Ω an eine Menge von Pfeilen, die vom Anfangspunkt zum Endpunkt führen. Daher kommt der Name Köcher. Denn zu einem Pfeil gehört eine Spitze und ein Ende.
Ist $K = (A, \Omega, o, t)$ ein Köcher und $U \subset O$, so heißt U abgeschlossen in O, wenn kein Pfeil aus U herausführt. Genauer bedeutet dies:

Definition 2. $U \subset A$ heißt abgeschlossen, wenn für alle Pfeile $p \in \Omega$ mit $o(p) \in U$ auch $e(p) \in U$ gilt.

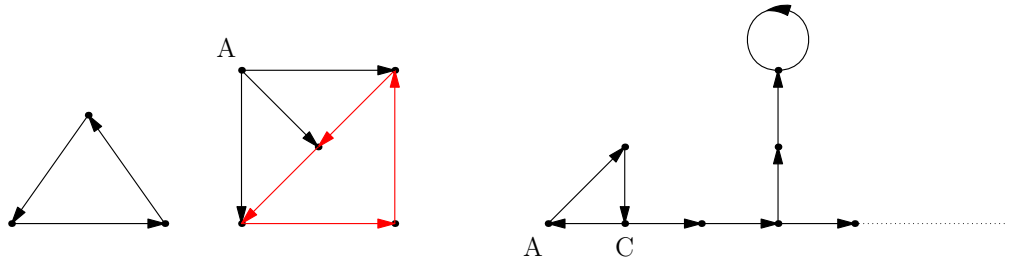
Satz 1.2. *Sei $K = (O, F, o, t)$*

1. *Der Durchschnitt abgeschlossener Teilmengen von O ist abgeschlossen.*
2. *Die Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von O ist abgeschlossen.*

1.3 Relationen

Zunächst wollen wir uns auf den Fall beschränken, dass Quelle und Ziel in der gleichen Menge liegen. Die geeignete Sprache hierzu ist die Sprache der Relationen oder manchmal heißt es auch gerichteter Graph.

1. Im nächsten Bild ist das linke Bild ein Kreis oder eine Schleife. Im Bild der Mitte kann man von A aus jeden anderen Punkt erreichen. Nach A führt kein Weg. Alle anderen Punkte liegen in einer Schleife. Zu ihnen kann man zurückkehren, wenn man den Pfeilen nachgeht. Im rechten Bild kann man von C aus alle Punkte erreichen.



2.

Definition 1 Sei A eine Menge.

- Eine Teilmenge $\alpha \subset A \times A$ heißt Relation von A nach A. Ich schreibe auch $\alpha\colon A \to A$.
- Ist $\alpha\colon A \to A$ eine Relation und $U \subset A$ so heißt

$$\alpha(U) := \{b|\ \text{Es gibt } u \in U \text{ und } (u,b) \in \alpha\}$$

  die Bildmenge von U in A. Das ist die Menge der Elemente aus A, die von einem Pfeil aus U getroffen werden.
- Ein Element $a \in A$ heißt Anfang, wenn bei ihm keine Pfeile enden.
- Ein Element $e \in A$ heißt Ende, wenn von ihm keine Pfeile ausgehen.
- Ein $a \in A$ heißt isoliert, wenn von a kein Pfeil ausgeht und kein Pfeil in a endet. □

Zunächst will ich mich mit Teilmengen beschäftigen, aus denen kein Pfeil herausführt.

Definition 2 Ist (A, α) eine Relationsalgebra, so heißt eine Teilmenge $U \subset A$ abgeschlossen gegenüber α, wenn $\alpha(U) \subset U$ ist. □

Richard Dedekind nennt im Spezialfall, dass $\alpha\colon A \to A$ eine Selbstbbildung ist, eine Kette (Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Erklärung 37)
Ein erster kleiner Satz:

Satz 1.3. *Sei (A, α) eine Relationsalgebra. Dann gilt:*

1. *Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
2. *Der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
3. *$\emptyset$ und A sind abgeschlossen.*

[4] Wenn einer die Unverfrorenheit haben sollte danach zu fragen, was vor dem Urknall war, so wird er vielfach belehrt, dass dies eine sinnlose Frage sei. Man sollte viel besser antworten. Darüber wollen wir jetzt nicht nachdenken. Es gibt gibt viele wesentlich konkretere Fragen. Beschäftigen wir uns zunächst mit ihnen.

A ist zusammen mit den abgeschlossen Mengen ein topologischer Raum.

Zu 1.: Sei $(U_i | i \in I)$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von A. Weiterhin sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Ist $u \in U$, so gibt es ein $i \in I$ mit $u \in U_i$. Da U_i abgeschlossen ist, ist die Menge $\alpha(\{u\}) \subset U_i \subset U$. Daher ist U abgeschlossen. In der Schrift von Dedekind (Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*) ist dies der Satz 42.
Zu 2.: Sei $(V_i | i \in I)$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen. Weiter sei $V := \bigcap_{i \in I} V_i$. Ist $i \in I$, so ist $V \subset V_i$ und daher $\alpha(V) \subset \alpha(V_i) \subset V_i$, da V_i abgeschlossen gegenüber α ist. Also ist $\alpha(V) \subset V_i$ für alle $i \in I$. Daher ist $\alpha(V) \subset V$. Dies war zu zeigen. Die zweite Aussage folgt auch direkt. □

Die abgeschlossenen Teilmengen von (A, α) heißen auch Unteralgebren.

Folgerung 1.4. *Ist (A, α) eine Relationsalgebra und $U \subset A$, so gibt es eine kleinste abgeschlossene Menge $[U]$, welche U enthält. Sie heißt die von U erzeugte Unteralgebra von A.*

Induktion Eine Relationsalgebra (A, α) werde von der Teilmenge $U \subset A$ erzeugt. Es ist $[U] = A$. Gilt eine Aussage für alle Elemente aus U und ist der Gültigkeitsbereich dieser Aussage gegenüber α abgeschlossen, so ist die Aussage für alle $a \in A$ gültig. Dies entspricht dem Satz 59 aus der Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“ von Richard Dedekind. (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Satz 59)
Sei im weiteren (A, α) eine Relationsalgebra. Weiter sei $[U]$ der Abschluss von $U \subset A$. Es gelten die folgenden Regeln.

Satz 1.5.

1. *Ist $U \subset A$ abgeschlossen, so ist $\alpha(U)$ abgeschlossen.*
2. *Es ist $[U] = U \cup \alpha([U])$.*
3. *Es ist $\alpha([U]) = [\alpha(U)]$.*

Zu 1. Sei $a \in \alpha(V)$ und $(a, b) \in \alpha$. Da $a \in \alpha(V)$ ist gibt es ein $v \in V$ mit $(v, a) \in \alpha$. Da V abgeschlossen gegenüber α abgeschlossen ist, folgt $a \in V$. und daher $b \in \alpha(V)$. Also ist $\alpha(V)$ abgeschlossen gegenüber α.
Zu 2. Es ist $U \cup \alpha([U])$ abgeschlossen. Und $U \subset U \cup \alpha([U])$. Daher ist $[U] \subset U \cup \alpha([U])$. Andererseits ist $U \subset [U]$ und da $[U]$ abgeschlossen ist, ist $\alpha([U]) \subset [U]$. Daher ist $U \cup \alpha([u]) \subset [U]$. Es folgt die Gleichheit.
Zu 3. Es ist $\alpha([U])$ das Bild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. und $\alpha(U) \subset \alpha([U])$. Daher ist $[\alpha(U)] \subset \alpha([U])$.
Es ist $\alpha(U) \subset [\alpha(U)]$. Durch Induktion zeige ich, dass $\alpha([U]) \subset [\alpha(U)]$ ist.
Es sei

$$T = \{c | c \in [U] \text{ und } \alpha(\{c\}) \subset [\alpha(U)]\}$$

Sicherlich ist $U \subset T$. Sei $c \in T$. Also ist $\alpha(\{c\}) \subset [\alpha(U)]$. Da $[\alpha(U)]$ abgeschlossen ist, ist $\alpha(\alpha(\{c\})) \subset [\alpha(U)]$. Ist also $d \in \alpha(\{c\}))$, so ist $\alpha(\{d\}) \subset [\alpha(U)]$. Daher ist T abgeschlossen gegenüber α. Damit folgt $T = [U]$. Damit folgt $\alpha([U]) \subset [\alpha(U)]$.

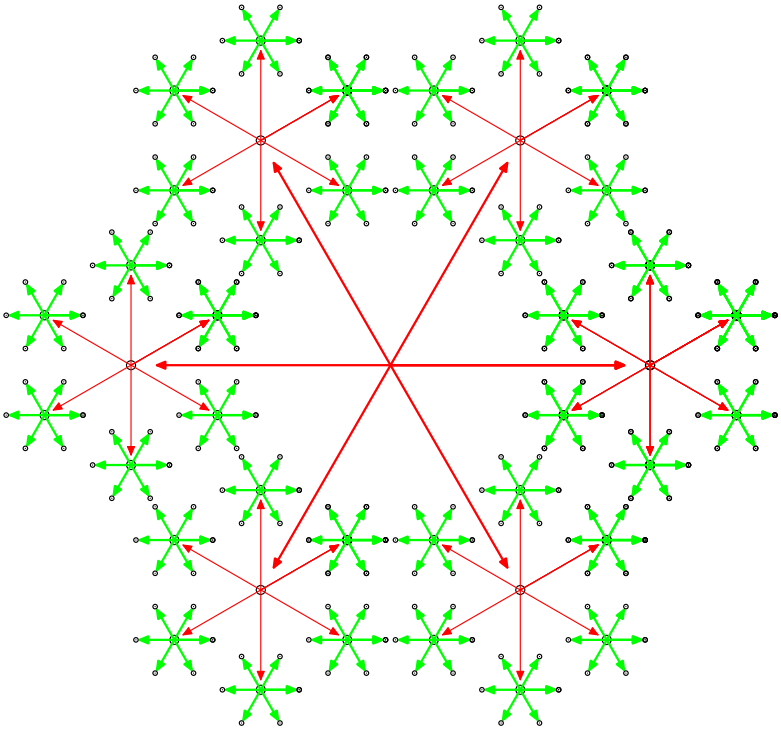


Abb. 1.5: Injektive Relation

Satz 1.6. *Sei α eine injektive Relation auf A und $a, b \in A$. Dann gilt: $[a] \subset [b]$ oder $[b] \subset [a]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$*

Seien $a, b \in A$ und $[a] \not\subset [b]$ und $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Insbesondere ist $a \notin$, da sonst $[a] \subset [b]$. Wäre $[a] \setminus [b]$ abgeschlossen gegenüber α, so wäre $[a] = [a] \setminus [b]$, also $[a] \cap [b] = \emptyset$. Daher gibt es ein $x \in [a] \setminus b$ und ein $c \in A$ mit $(x, c) \in [b]$. Von diesem x weist ein Pfeil nach $[b]$. Da $[a]$ abgeschlossen ist, ist $c \in [a] \cap [b]$. Ist $c = b$, so ist $[b] \subset [a]$ und wir sind fertig. Andernfalls ist $c \in \alpha([b])$. Es gibt daher ein $y \in [b]$ mit $(y, c) \in \alpha$. Da α injektiv ist, ist $x = y$. Daher ist $x \in [b]$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Jetzt aber zur Wiederkehr.

Definition 3 Ist $\alpha \subset A \times A$ eine Relation, so liegt a in einer Schleife, wenn $a \in \alpha([a]) = [\alpha(\{a\})]$. □

Wenn ich von a ausgehe kann ich durch weitergehen a wieder erreichen. Also muss bei a mindesten ein Pfeil enden. Anfangselemente liegen nicht in einer Schleife. Liegt a in keiner Schleife und ist α injektiv, so liegt kein von a aus erreichbarer Punkt in einer Schleife.

Satz 1.7. *Sei (A, α) eine einstellige Relationsalgebra mit injektivem α. Ist $a \notin \alpha([a])$, so ist für jedes $b \in [a]$ $b \notin \alpha([b])$. Das heißt: Gibt es keinen Rückweg nach a, so gibt es für keinen Nachfolger b von a einen Rückweg nach b*

Durch Induktion. Sei

$$T = \{b | b \in [a] \text{ und } b \notin \alpha([b])\}$$

Es ist $a \in T$. Ich zeige T ist gegenüber Nachfolgern abgeschlossen. Sei $b \in T$. Also ist $b \notin \alpha([b])$. Weiterhin sei c ein Nachfolger von b. Das heißt es besteht die Relation $(b, c) \in \alpha$. Also ist $c \in \alpha([b])$. Zu zeigen ist $c \notin \alpha([c])$. Es ist $[c] \subset \alpha([b])$, da $\alpha([b])$ abgeschlossen ist.
Angenommen $c \in \alpha([c])$. Dann ist $c \in \alpha(\alpha([b]))$. Es gibt daher ein $y \in \alpha([b])$ mit $(y, c) \in \alpha$. Da auch $(b, c) \in \alpha$ und α injektiv ist, folgt $y = b$. Es ist aber $\alpha([b]) \ni y = b \notin \alpha([b])$. Dies widerspricht der Vorraussetzung über b. Daher ist T gegenüber Nachfolgern abgeschlossen. Damit ist $T = [a]$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Satz 1.8. *Sei (A, α) eine einstellige Relationsalgebra mit injektivem α. A werde von seinem Anfang E erzeugt. Durch $a \leq b :\Longleftrightarrow [b] \subset [a]$ wird eine fundierte Halbordnung auf A definiert.*

Transitivität: Sei $a \leq b$ und $b \leq c$. Dann ist $[b] \subset [a]$ und $[c] \subset [b]$. Daher ist $[c] \subset [a]$. Also ist $a \leq c$.
Refexivität: Es sei $[a] = [b]$. Da A von seinem Anfang erzeugt wird, und α injektiv ist, ist $a \notin \alpha([a])$. Es ist $[b] = \{b\} \cup \alpha([b]) = \{b\} \cup \alpha([a])$. Da $a \notin \alpha([a])$ ist ist $a = b$.
$\leq$ ist fundiert: Das heißt jede nicht leere Teilmenge von A hat ein minimales Element. Sei V eine nicht leere Teilmenge von A. Ist $[V] \cap E \neq \emptyset$, so gibt es ein $e \in E \cap [V]$. Denn $[V] = V \cup \alpha([V])$. Da e ein Anfangselement ist, ist $e \notin \alpha([V])$. Also ist $e \in V$. Damit ist e ein minimales Element.
Andernfalls ist $E \cap [V] = \emptyset$. Sei

$$T = \{x | x \notin [V]\}$$

Es ist $E \subset T$. T kann nicht abgeschlossen gegenüber α sein, da $\emptyset \neq V \subset [V]$. Also gibt es $x \in T$ und ein $c \in [V]$ mit $(x, c) \in \alpha$.
Beh.: v ist minimal in V.
Bew.: Wäre $c \notin V$, so wäre $c \in \alpha([V])$. Das hieße es gäbe ein $d \in [V]$ mit $(d, c) \in \alpha$. Außerdem ist $(x, c) \in \alpha$. Weil α injektiv ist, folgt $x = d$. Es war aber $x \notin [V]$. Dies ist ein Widerspruch. Daher ist $c \in V$.
Beh.: c ist minimal in V.
Angenommen es gibt ein $m \in V$ mit $[c] \subset [m]$. Wäre $c \in \alpha([m])$, so wäre $c \in \alpha([m])$, so wäre $c \in \alpha([V])$. Dies kann nicht sein, wie wir gerade gesehen haben. Daher ist $c = m$.□

2 Muster

2.1 Definition und Eigenschaften

(Ich hab dies früher als Ω-Ketten bezeichnet. In Zukunft will ich es Muster nennen)

Abb. 2.1: Römisches Fußbodenmosaik im Landesmuseum in Trier

Wollen wir ein Muster auf ein Blatt Papier malen gehen wir beispielsweise folgendermaßen vor. Wir malen irgend eine Figur, auf das Blatt, verschieben das Blatt um einen Vektor $\vec{v}$ und zeichnen die gleiche Figur. Das wiederholen wir. [1] Beispielsweise ist die Startfigur ein Punkt, ein Strich oder ein Strichmännchen.

Wir mustern unsre Umgebung, um sich in ihr zurechtzufinden.

- Wir zählen die Schritte, die wir vom Ort A zum Ort B brauchen um wenigsten ungefähr die Entfernung der beiden Orte zu beschreiben. Natürlich ist das eine sehr ungenaue Beschreibung. Beispielsweise wird Franz eine andere Schrittzahl ermitteln als Andreas. Die beiden werden ihre Entfernungsangaben objektivieren. Das heißt sie werden sich auf einen Normschritt einigen. In jedem Fall versehen sie die Strecke $[A, B]$ mit einem Bandmuster.
- Beispielsweise wird die Erde mit einem Koordinatensystem versehen. Das ist nichts anderes als ein besonders einfaches Muster auf die Erdkugel gelegt.

Um etwas handfestes vor Augen zu haben, denken wir an die euklidische Ebene E. Es sei A die Potenzmenge von E. Auf A wirken gewisse Funktionen z.B.

- Spiegelungen.
- Verschiebungen.
- Drehungen.
- zentrische Streckungen.

[1] Auch die Zeit wird gemustert. Mit einem Muster von „regelmäßigen“ sich wiederholenden, sogenannten periodischen Bewegungen gemessen.

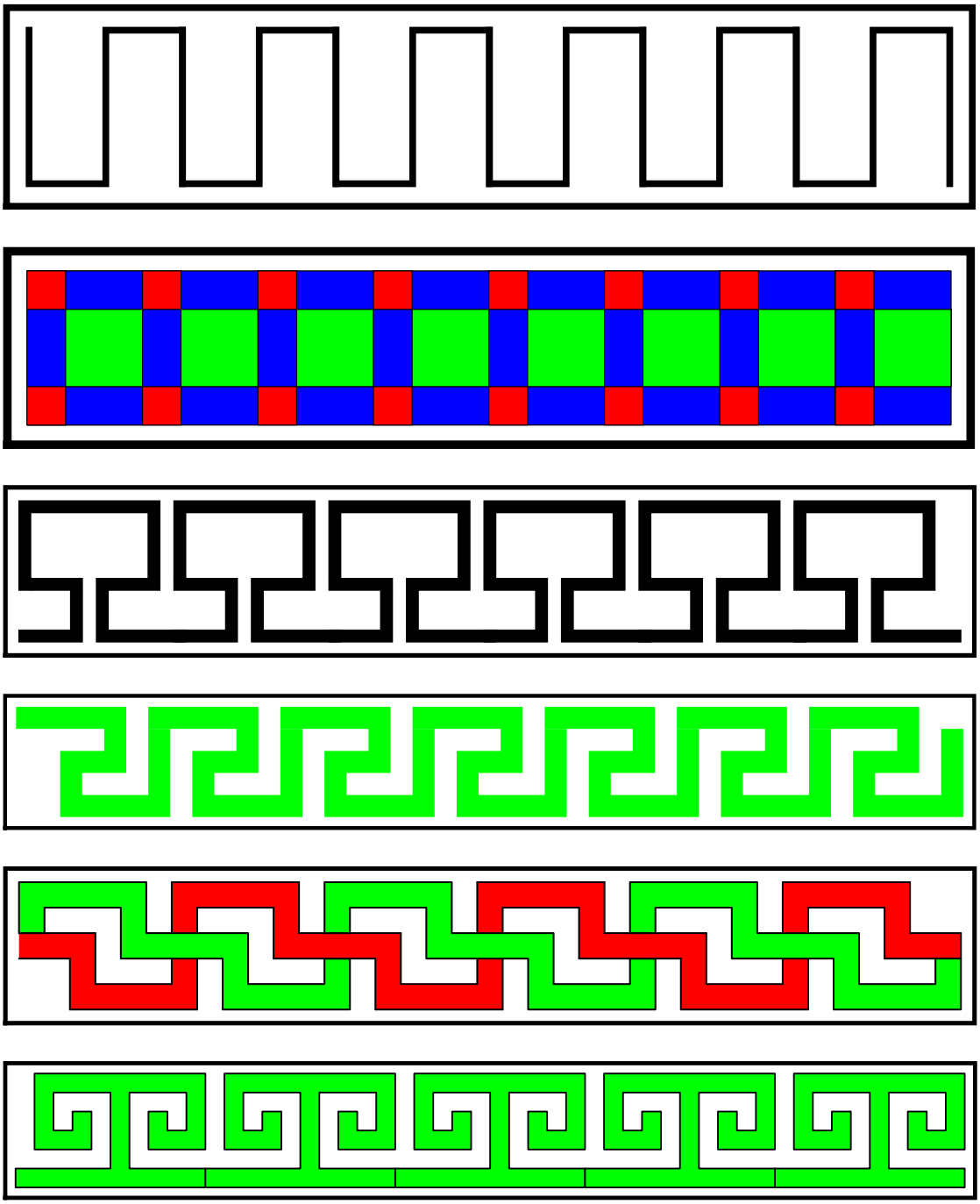


Abb. 2.2: Bandmuster

Definition 4 Seien Ω, A Mengen und $F\colon \Omega \times A \to A$ eine Funktion. Das Tripel (Ω, A, F) heißt Ω-Muster. □

Es ist $[\Omega \times A, A]$ in natürlicher Weise isomorph zu $[\Omega, [A, A]]$. Jeder Funktion

$$F\colon \Omega \times A \to A$$

entspricht bei dieser natürlichen Isomorphie die Funktion

$$\hat{F}\colon \Omega \ni \alpha \mapsto (A \ni a \mapsto F(\alpha, a) \in A).$$

In Bourbaki (Bourbaki, *Algebra I Chapters 1-3*, Seite 24) heißt dies eine Aktion von Ω auf A.

Definition 5 Für $\alpha \in \Omega$ und $a \in A$ bezeichne ich mit $\alpha \cdot a := F(\alpha, a) \in A$. Oft wird auch einfach αa geschrieben. □

Wir haben dann eine Relation R auf A indem man erklärt:

$$(a, b) \in R \iff : \text{Es gibt } \alpha \in \Omega \text{ und } b = \alpha \cdot a.$$

Der Begriff der Abgeschlossenheit überträgt sich auf diese Relation. Eine Teilmenge $U \subset A$ ist abgeschlossen gegenüber Ω, wenn für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $a \in U$ auch $\alpha \cdot a \in U$ ist. Die Relation ist genau dann injektiv, wenn die Abbildung F injektiv ist.

Beispiele:

1. Das wichtigste Klasse von Beispielen erhält man folgendermaßen: Es sei $\Omega = \{1\}$. Eine Funktion $F\colon \Omega \to [A, A]$ ordnet der 1 eine Funktion $\alpha\colon A \to A$ zu. Wir haben also eine Menge A und eine Funktion $\alpha\colon A \to A$. Dann ist das Paar (A, α) eine Kette im Sinne von Dedekind.[2] Manchmal nennt man das Paar (A, α) auch einstellige Algebra. (Siehe den Wikipedia Artikel: Einstellige Verknüpfung) Ein paar Ketten habe ich gezeichnet:

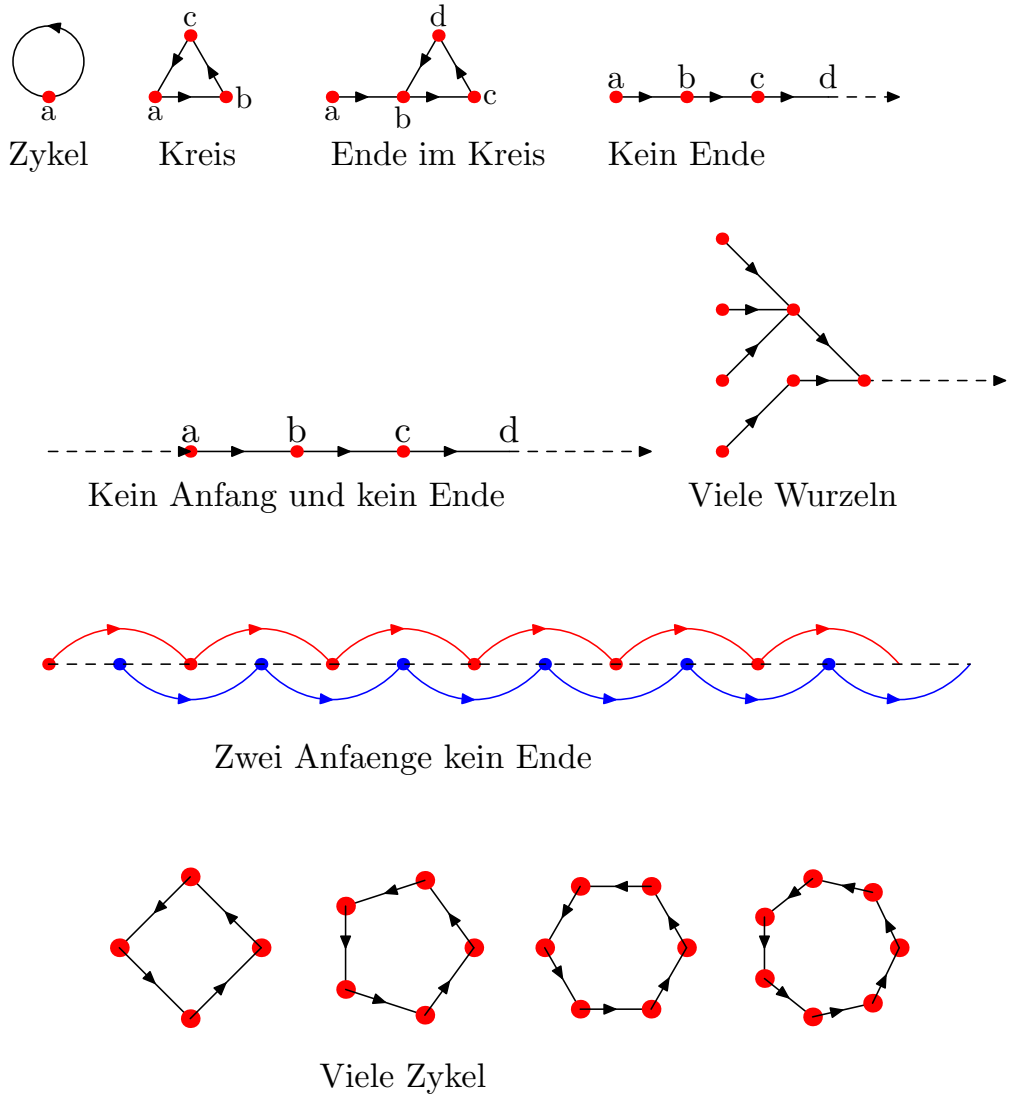


Abb. 2.3: gerichtete Graphen

2. Sei $(A, \alpha) = (\mathbb{N}, 1+)$. (In den Beipielen verwende ich $\mathbb{N}$). Ist dann $n \in \mathbb{N}$, so ist $[n] =$

[2] Dedekind definiert den Begriff Kette eine Kleinigkeit anders.(Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Erklärung 37.) Er geht aus von einer Menge S und einer Abbildung $\varphi : S \to S$. Eine Teilmenge K von S nennt er Kette, wenn $\varphi(K) \subset K$ ist. Wenn also K abgeschlossen gegenüber φ ist.

$\{x|x \in \mathbb{N}$ und $x \geq n\}$. Es ist $[n]$ die Menge der Zahlen, die von n aus durch weiterzählen erreichbar sind.

$$[153] := \quad \bullet^{153} \longrightarrow \bullet^{154} \longrightarrow \bullet^{155} \longrightarrow \bullet^{156} \dashrightarrow$$

Hier das Beispiel mit der Zahl 153 einfügen.

3. Ist $A = \mathbb{N}$ und $\alpha(n) = 2 + n$, so ist α injektiv. Daher ist wegen Satz 1.6 $[0] \cap [1] = \emptyset$. Es ist $[0]$ die Menge der geraden Zahlen und $[1]$ = Menge der ungeraden Zahlen. Es ist $\{0, 1\}$ eine Basis von (A, α). Der Begriff Basis von X-Ketten wird später erklärt.

4. Verwickelter ist schon das nächste Beispiel. Es sei $A = \mathbb{N}$ und $\alpha(n) = 2 \cdot n + 1$. Dann ist α injektiv. Geht man von 0 aus und wendet immer wieder α an, so erhält man die Bahn von 0:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 15 \longrightarrow 31 \longrightarrow 63 \longrightarrow \dots$$

$$2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 23 \longrightarrow 47 \longrightarrow 95 \longrightarrow 191 \longrightarrow \dots$$

$$4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 15 \longrightarrow 31 \longrightarrow 63 \longrightarrow 127 \longrightarrow 254 \longrightarrow \dots$$

In der zweiten Zeile steht die Bahn von 2. In der dritten Zeile steht die Bahn von 4. Der Durchschnitt der Bahnen ist paarweise leer. Dies ergibt sich aus dem Satz 1.6. Die Menge der geraden Zahlen bilden eine Basis von $(\mathbb{N}, \alpha)$

Ehe ich die Theorie weiter verfolge noch ein paar Beispiele in den Ω mehr Elemente enthält:
Beispiele:

5. Sei A ein Ω- Muster und B ein Γ-Muster. Ist $F\colon \Omega \to \Gamma$ eine Funktion, so wird B durch $\alpha \cdot b := F(\alpha) \cdot b$ zu einem Ω-Muster.

6. Sei $A = \mathbb{N}$ mit den beiden Abbildungen $\alpha(n) = 1 + n$ und $\beta(n) = 2 + n$. Man erhält folgendes Muster:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "1+"] \arrow[dr, "2+"'] & 1 \arrow[r, "2+"] \arrow[d, "1+"] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[r] \arrow[d] & 7 \arrow[r] \arrow[d] & 9 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & {} \\
& 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \arrow[r] \arrow[ur] & 6 \arrow[r] \arrow[ur] & 8 \arrow[r] \arrow[ur] & 10 \arrow[r, dotted] & {}
\end{tikzcd}$$

7. Sei $A = \mathbb{N}$, $\alpha(n) = 2 + n$ und $\beta(n) = 3 + n$, Es ergibt sich das folgende Muster.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 6 \arrow[r] \arrow[d] & 9 \arrow[r] \arrow[d] & 12 \arrow[r] \arrow[d] & 15 \arrow[r] \arrow[d] & 18 \arrow[r] & 21 \\
2 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & 8 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & 11 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & 14 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & 17 \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & & \\
4 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 7 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 10 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 13 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 16 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 19 \arrow[ur, dotted] & &
\end{tikzcd}$$

Die Pfeile nach rechts entsprechen β. Die Pfeile nach unten und die gepunkteten Pfeile entsprechen α.

8. Sei wieder $A = \mathbb{N}$, $\alpha(n) = n + 3$ und $\beta(n) = n + 5$. Dann gehen von jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Pfeile aus. In $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ sei $[0]$ die von 0 erzeugte Unteralgebra. Ein Pfeildiagramm von $[0]$ sieht so aus.:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[r] \arrow[d] & 10 \arrow[r] \arrow[d] & 15 \arrow[r] \arrow[d] & 20 \arrow[r] \arrow[d] & 25 \\
3 \arrow[r] \arrow[d] & 8 \arrow[r] \arrow[d] & 13 \arrow[r] \arrow[d] & 18 \arrow[r] & 23 & \\
6 \arrow[r] \arrow[d] & 11 \arrow[r] & 16 & & & \\
9 \arrow[d] & & & & & \\
12 \arrow[uurr, dotted] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Man geht dabei von 0 aus zeichnet einen Pfeil nach unten und berechnet $0 + 3 = 3$. Man zeichnet von 0 aus einen Pfeil nach rechts und berechnet $0 + 5 = \beta(0) = 5$. Das wiederholt man bei jedem berechneten Wert.

Beh.: Es ist $\{n | 8 \leq n \in \mathbb{N}\} \subset [0]$

Es ist $\{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \subset [0]$ wie man oben berechnet hat. Sei

$$T = \{x | x \geq 13 \text{ und } [8, x] \subset [0]$$

Dabei ist mit $[8, x]$ das Intervall zwischen 8 und x gemeint. Es ist $13 \in T$.

Beh T ist gegenüber $1+$ abgeschlossen.

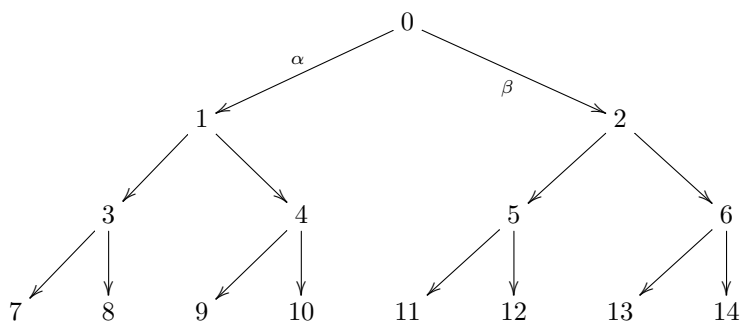
Bew.: Sei $x \in T$. Dann ist $1+x = (x-5)+3+3 = \beta(\beta(x))$. Da $x-5 \in T \cap [0]$ ist, ist $1+x \in [0]$ und daher $[8, x+1] \subset [0]$. Daher ist $1+x \in T$. Es folgt die Behauptung. In diesem Beispiel kommutieren die beIden Abbildungen α, β. Die Abbidung $\Phi\colon \{\alpha, \beta\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist nicht injektiv. Es ist beispielsweise $\alpha(5) = \beta(3)$. Aber $\alpha \neq \beta$. Im nächsten Beispiel kommutieren die beiden Abbildungen nicht.

Das Muster aus diesem Beispiel ist wesentlich verschieden vom Beispiel 6. Das wird später genauer ausgeführt.[3]

9. Wir betrachten wieder $\mathbb{N}$-

$$\cdot\colon \{1, 2\} \times \mathbb{N} \ni (x, n) \mapsto 1 + x + n \in \mathbb{N}$$

Bezeichnet man $\alpha(n) = 1 + 1 + 2n$ und $\beta(n) = 1 + 2 + 2n$ und zeichnet den Baum, so erhält man



[3]Im Beispiel 6 ist $\alpha^2 = \beta$. Im Beispiel 9 ist dies nicht der Fall. In der Kategorie der Muster mit $\alpha^2 = \beta$ ist das Beispiel 6 ein freier Generator.

Die Abbildung $F\colon \{\alpha,\beta\}\times\mathbb{N}\ni(\gamma,n)\mapsto\gamma(n)\in\mathbb{N}$ ist injektiv. Denn ist $\gamma(n)=\gamma'(m)$, so ist etwa $\gamma(n)$ und damit $\gamma'(m)$ ungerade. Daher ist $\gamma=\gamma'=\alpha$. Daher ist $2\cdot n+1=2\cdot m+1$. Daher ist $n=m$. Also ist F injektiv.

Beh: $[0]=\mathbb{N}$

Bew.: Sei $T=\{x|[0,x]\subset[0]\}$

Es ist $0\in T$ und T ist gegenüber $1+$ abgeschlossen. Sei $n\in T$. Ist n gerade, so ist $n=2\cdot k$. Und es ist $k\in T\cap[0]$. Daher ist $2\cdot k+1\in[0]$. Daher ist $n+1=2\cdot k+1\in T$. Enstprechend schließt man, wenn n ungerade ist.

10. Das letzte Beispiel verallgemeinere ich: Sei $\Omega=\{0,\ldots,n-1\}$ mit $n\geq 2$.

$$\cdot\colon\Omega\times\mathbb{N}\ni(\alpha,a)\mapsto 1+\alpha+n\cdot a\in\mathbb{N}$$

Es ist $\cdot$ injektiv: Sei $\alpha\cdot a=\alpha'\cdot a'$. Dann ist $1+\alpha+n\cdot a=1+\alpha'+n\cdot a'$. Nehmen wir an es ist $a\geq a'$. Es folgt: $n\cdot(a-a')=\alpha'-\alpha$. Es ist $\alpha-\alpha'<n$. Also ist $a=a'$ Daher ist $\alpha=\alpha'$.

$[0]=\mathbb{N}$. Das heißt der Ω Abschluss von $\{0\}$ ist $\mathbb{N}$.

Es sei

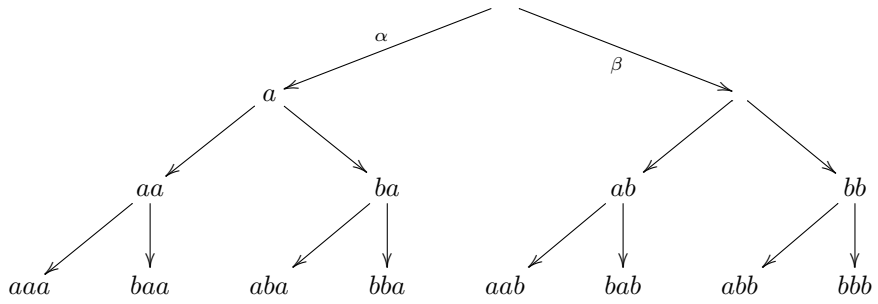
$$T:=\{m|k\leq m\Rightarrow k\in\mathbb{N}\cap[0]\}$$

Es ist $\{0,\ldots,n\}\subset T$ und T ist abgeschlossen gegenüber $1+$. Sei $m\in T$ und $m\geq n$. Ich zeige $m+1\in T$. Sei $m\in T$ und $m\geq n$. Ich zeige $m+1\in T$. Da $m\in T$ und $m\geq n$, ist kann $m-1$ geschieben werden $m-1=\alpha+n\cdot a$. mit $\alpha\geq n-1$. Daher ist $m=1+\alpha+n\cdot a$.

1.Fall: $\alpha<n-1$. Dann ist $1+\alpha\leq n-1$. Also ist $m+1=1+(\alpha+1)+n\cdot a\in[0]$.

2. Fall $\alpha=n-1$. Dann ist $m+1=1+(n-1)+1+n\cdot a=1+n\cdot(a+1)\in[0]$. Daher ist $[0]=\mathbb{N}$

11. In diesem Beispiel sieht man, dass es eine durche eine „Ersetzung“ aus dem vorigen Beispiel hervorgegangen ist. Es wird von dem leeren Wort ausgegangen. Die Funktion α heißt: Es wird vor das Wort ein Buchstabe a gehängt. Die Funktion β bedeutet: Es wird vor das Wort der Buchstabe b gehängt. Man „fühlt“, dass das letzte Beispiel im wesentlichen gleich dem vorherigen ist. Dies wird im weiteren Verlauf des Textes verdeutlicht und bewiesen.



Ich wende jetzt die Ergebnisse aus dem 1. Kapitel an.

Definition 6 Sei A eine Ω-Kette. Ist $U\subset A$, so bezeichne

$$\Omega\cdot U:=\{\alpha\cdot a|a\in U\text{ und }\alpha\in\Omega\}.$$

Satz 2.1. *1. Ist U abgeschlossen in A gegenüber Ω, so ist $\Omega \cdot U$ abgeschlossen.*

2. Es ist $\Omega \cdot [U] = [\Omega \cdot U]$.

3. Es ist für alle $U \subset A$: $[U] = U \cap [\Omega \cdot U] = U \cup \Omega \cdot [U]$.

Dies ist nichts anderes als die Aussagen der Satzes 1.5. Unter gewissen Voraussetzungen vererbt sich die Eigenschaft nicht in einer Schleife zu liegen.

Satz 2.2. *Sei $F\colon \Omega \times A \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha(a) \in A$ injektiv. Dann ist die Menge der Elemente, die nicht in einer Schleife liegen gegenüber Ω abgeschlossen.*

Liege a nicht in einer Schleife. Dann ist $a \notin \Omega \cdot [a]$. Sei $\alpha \in \Omega$. Angenommen $\alpha(a) \in \Omega \cdot [\alpha(a)]$. Dann gibt es ein $\beta \in \Omega$ und ein $b \in [\alpha(a)]$ mit $\alpha(a) = \beta(b)$. Daher ist $\alpha = \beta$ und $a = b$. Daher ist $a \in [\alpha(a)]$. Dies widerspricht der Voraussetzung über a. □

Definition 7 Sei A eine Ω- Kette. Ω kommutiert auf A, wenn für alle $\alpha, \beta \in \Omega$ und alle $a \in A$ gilt: $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = \beta \cdot (\alpha \cdot a)$. □

Satz 2.3. *Kommutiert Ω auf A und ist U gegenüber Ω in A abgeschlossen, so ist $\Omega^{-1}(U) := \{a | a \in A$ und $\alpha \cdot a \in U$ für ein $\alpha \in \Omega\}$ abgeschlossen in A.*

Sei $a \in \Omega^{-1}(U)$. Also gibt es ein $\alpha \in \Omega$, so dass $\alpha \cdot a \in U$ gilt. Ist $\beta \in \Omega$. so ist $\beta \cdot (\alpha \cdot a) \in U$, da U abgeschlossen ist. Daher ist $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = \beta \cdot (\alpha \cdot a) \in U$. Also ist $\beta \cdot a \in \Omega^{-1}(U)$. □

Beispiele:

12. Besteht Ω nur aus einem Element, so wirkt Ω auf jedem Ω-Muster (Ω-Kette) kommutativ.
13. Betrachte $\mathbb{N}$ mit den beiiden Abbildungen $\alpha(x) = 2x+1$ und $\beta(x) = 3x+2$. Dann operieren α, β kommutativ auf $\mathbb{N}$.

Einfache Muster

Satz 2.4 (Einfache Muster). *Für ein Ω-Muster sind äquivalent:*

1. Das einzige nicht leere Untermuster von A ist A.

2. Für alle $a \in A$ ist $[a] = A$.

1.$\Longrightarrow$2.: Sei $a \in A$. Dann ist $[a]$ ein Untermuster von A, das nicht leer ist. Also ist $[a] = A$.
2. $\Longrightarrow$1.: Sei U ein nicht leeres Untermuster und $a \in U$. Dann ist nach Voraussetzung $A = [a] \subset U$. Also ist $U = A$. □

Definition 8 Trifft eine der Aussagen des Satzes und damit beide zu, so heißt das Ω-Muster A einfach.

Ein Muster ist einfach, wenn man von jedem Punkt aus überall hin kommt.
Beispiele:

14. Jeder Kreis (1-Muster) ist einfach.
15. Der folgende gerichtete Graph ist einfach.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & 1 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] & 2 \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dl, shift left] \\
3 &&
\end{tikzcd}$$

Von 1 gehen zwei verschiedene Pfeile aus. Von den anderen Elementen können auch zwei Pfeile angenommen werden. Es ist $\alpha \cdot 0 = \beta \cdot 0$, $\alpha \cdot 3 = \beta \cdot 3$ und $\alpha \cdot 2 = \beta \cdot 2$. Das Muster ist nicht kommutiv. Denn $\alpha \cdot \beta \cdot 1 = 2$ und $\beta \cdot \alpha \cdot 1 = \beta \cdot 0 = 3$.

2.2 Morphismen

2.2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir reden in verschiedenen Sprachen manchmal von den ähnlichen Gegenständen[4]. Wir ordnen die Dinge in verschiedene Regale ein. Ein Hirte der Steinzeit, nennen wir ihn Abel wird möglicherweise seine Schafe so gezählt haben: Abel lässt die Schafe an sich vorüberziehen und für jedes Schaf zeichnet er einen Strich in den Sand. Er symbolisiert also die Zahlen durch verschieden lange Strichlisten.
Der Inder Āryabhata hat unser Stellenwertsystem erfunden. Nehmen wir an es sei schon das Dualsystem gewesen. Er zählt $0, 1, 10(= 2), 11(= 3)$ etc. Wir fragen uns: Gibt es eine Übersetzung von dem Zahlenmuster des Hirten Abel in das des Inders? Bedeuten die Zeichenreihen „|||“ und „11“ das selbe.
Kann das „Eins mehr“ Abels in das „nächste Zahl“ des Inders übersetzt werden.
Bedeuten die Zeichenreihen `||||` und `100` dasselbe? Gibt es eine Übersetzung, die mit dem „Eins mehr“ des Urzeithirten und dem „nächste Zahl“ des Inders verträglich ist? Ich bezeichne das „Eins mehr“ von Abel mit α. Das „nächste Zahl“ von Āryabhata mit β. Gibt es eine Funktion f, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist?

$$\begin{tikzcd}
\text{Abel} & & \arrow[r, "\alpha"] & | \arrow[r, "\alpha"] & || \arrow[r, "\alpha"] & ||| \arrow[r, "\alpha"] & |||| \arrow[r, "\alpha"] & \dots \\
& & \arrow[d, "f"] & \arrow[d, "f"] & \arrow[d, "f"] & \arrow[d, "f"] & \arrow[d, "f"] & \\
\text{Inder} & & 0 \arrow[r, "\beta"'] & 1 \arrow[r, "\beta"'] & 10 \arrow[r, "\beta"'] & 11 \arrow[r, "\beta"'] & 100 \arrow[r, "\beta"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

Es muss eine ordentliche Leiter entstehen. Wenn Abel eins weiter geht und dann übersetzt, muss dasselbe herauskommen, wie wenn zuerst übersetzt wird und dann der Inder eins weiter geht. Betrachtet man die Paare der Kette, so sieht man die Menge der Paare

$$\{(a, f(a)) | a \text{ ein Strichmuster } \wedge f(a) \text{ ein 01 Muster}\}$$

ist gegenüber der Abbildung $(\alpha|\beta)$ abgeschlossen. Tatsächlich gibt es eine solche Übersetzung. Sie ist leicht zu programmieren.

[4] Hierher gehört eine längerer Ausflus über die verschiedenen Methoden Zahlen darzustellen. Zum Beispiel Zahldarstellungen der Mayas, der Römer etc. Vielleicht der Zahlbegriff von Vögeln

Präzisieren wir dies. Sind A, B zwei Ω-Muster, so wird $A \times B$ durch komponentenweise Multiplikation mit Elementen aus Ω zu einer Ω- Kette.

Satz 2.5. *Sind (A, α) und (B, β) zwei Ω-Muster, so sind für eine Abbildung $f : A \to B$ äquivalent:*

1. *Für alle $\alpha \in \Omega$ gilt: Das Diagramm ist kommutativ.*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha\cdot"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\alpha\cdot"'] & B \end{tikzcd}$$

2. *Der Graph $G = \{(a, f(a)) | a \in A\}$ ist gegenüber Ω abgeschlossen.*

3. *Es ist für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $a \in A$ ist $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a)$.*

1. $\Rightarrow$ 3. Sei $a \in A$. Dann ist $f(\alpha \cdot a)) = \alpha \cdot (f(a))$ für alle $a \in A$, wegen der Kommutativität des Diagramms.
3. $\Rightarrow$ 2. Es sei $(a, f(a)) \in G$. Dann ist $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a)$. Also ist $((\alpha \cdot a), f(\alpha \cdot a)) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot f(a)) \in G$. Also ist $\alpha \cdot (a, f(a)) \in G$. Also ist G gegenüber Ω abgeschlossen.
2. $\Rightarrow$ 1. Sei $a \in A$. $(a, f(a))) \in G$ Also ist $(\alpha(a), \alpha \cdot f(a)) \in G$. Da f eine Funktion ist, ist $f(\alpha(a)) = \alpha \cdot (f(a))$. Das war behauptet. □

Definition 9 Sind A und B Ω-Ketten, so heißt $f\colon A \to B$ ein Homomorphismus oder Morphismus, wenn f die Eigenschaften des Satzes erfüllt. A, B heißen isomorph, wenn es $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ gibt mit $g \circ f = 1_A$ und $f \circ g = 1_B$.

Damit ist $f\colon A \to A$ ein Morphismus, wenn f mit mit allen Elemente aus Ω kommutiert. Die Identität ist immer ein Morphismus. Die Verkettung von Morphismen ist assoziativ. Kurz die Klasse der Ω- Ketten zusammen mit den Morphismen bilden ein Kategorie.
Beispiele:

16. Sei $A = \mathbb{R}$ und $\alpha\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$. Ein Morphismus $f\colon (\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \alpha)$ ist eine Abbildung, für die gilt:$f(-x) = -f(x)$. Beispielsweise ist jede Potenzabbildung $f(x) = x^n$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ ein Morphismus.

17. Sei wieder $A = \mathbb{R}$ $\alpha(x) = -x$ und $\beta(x) = x$. Ein Morphismus $f\colon (\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \beta)$ ist eine Abbildung für die gilt: $f(-x) = f(x)$. Dies sind die Abbildungen, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

18. Sei $A = \mathbb{R}^n$ und Ω die Menge der Permutationen von $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Weiter sei $B = \mathbb{R}$ und $\beta = Id$. Ein Morphismus $f\colon (A, \Omega) \to (\mathbb{R}, \beta)$ ist eine Abbildung für die gilt: $f(\alpha(x_0, \ldots, x_{n-1})) = f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ für alle $\alpha \in \Omega$. Dies ist zum Beispiel für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \ni (x_0, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_0 + \ldots x_{n-1})^k \in \mathbb{R}$ der Fall für alle $k \in \mathbb{N}$.

19. Sei $A = \mathbb{R}^2$und Ω die Menge der Drehungen um den Nullpunkt. Ist $B = \mathbb{R}$ und $\beta = Id$, so ist ein Morphismus zwischen (A, Ω) und (B, β) eine Abbildung, deren Werte gegenüber Drehungen invariant sind. Also beispielsweise $f(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|+1}$

Satz 2.6. *Ist $: A \to B$ ein Morphismus zwischen zwei Ω Ketten, ist $U \subset A$ abgeschlossen in A und ist V abgeschlossen in B, so ist $f(U)$ abgeschlossen in B und $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in A.*

Sei $b \in f(U)$. Dann gibt es ein $a \in U$ mit $b = f(u)$. Ist $\alpha \in \Omega$, so ist $\alpha \cdot a \in U$. Daher ist $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot b \in f(U)$. Also ist $f(U)$ abgeschlossen in B.
Ist $V \subset B$ abgeschlossen in B und $a \in f^{-1}(V)$. Also ist $f(a) \in V$ und daher $\alpha \cdot f(a) = f(\alpha \cdot a) \in V$. Daher ist $\alpha \cdot a \in f^{-1}(V)$. Das war behauptet. □

Satz 2.7. *Sind zwei Morphismen $f, g\colon A \to B$ auf einem Erzeugendensystem gleich, so sind sie gleich.*

Sei E ein Erzeugendensystem. Für alle $e \in E$ ist nach Voraussetzung $f(e) = g(e)$. Es sei

$$T = \{a | a \in A \text{ und } f(a) = g(a)\}$$

Sei $\alpha \in \Omega$ und $a \in T$. Es folgt $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot g(a) = g(\alpha \cdot a)$. Daher ist T gegenüber Ω abgeschlossen. Außerdem ist $E \subset T$. Daher ist $T = A$ □

Produkte

Sei $(A_i | i \in I)$ eine Familie von Ω- Ketten. Wir betrachten

$$\prod_{i \in I} = \{f | f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \text{ mit } f(i) \in A_i\}$$

Ist $f \in \prod_{i \in I} A_i$, so bezeichne ich mit $a_i := f(i)$. Weiter sei $(a_i) := f$. Es heißt a_i die i-te Komponente von $f = (a_i)$. Die Abbildung $\pi_i\colon \prod_{i \in I} A_i \ni (a_i) \mapsto a_i \in A_i$ heißt $i$te Projektion. $\prod_{i \in I} A_i$ wird durch $\alpha \cdot (a_i) := (\alpha \cdot a_i)$ zu einer Ω-Kette. Diese Ω-Kette hat die Eigenschaft eines kategoriellen Produktes.

Satz 2.8 (Produkte von Ketten). *Sei $(A_i | i \in I)$ eine Familie von Ω- Ketten. Weiter sei $(f_i | i \in I)$ eine Familie von Morphismen $f_i\colon B \to A_i$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon B \to \prod_{i \in I} A_i$ mit $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$. Durch diese Eigenschaft ist das Produkt der A_i bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Der Beweis geht wie üblich.
Beispiele:

20. Sei $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1+)$ und $B = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, 1+)$. Es gibt nur eine einzige abgeschlossene Teilmenge von $A \times B$. Denn startete man mit dem Paar $(0, 0)$ und wendet wiederholt $1+$ auf das Paar an, so erhält man die Kette

$$(0,0) \to (1,1) \to (0,2) \to (1,0) \to (0,1) \to (1,2) \to (0,0).$$

In dieser Kette kommt jedes Element aus dem Produkt $A \times B$ genau einmal vor. Also ist $A \times B$ die einzige abgeschlossene Teilmenge von $A \times B$. Es ist $A \times B \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, 1+)$. Dies ergibt sich aus dem folgenden Diagram:

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (1,1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,2) \arrow[r] \arrow[d] & (1,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (1,2) \arrow[r] \arrow[d] & (0,0) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

21. Sei $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Betrachte $A \times A$. Hier gibt es drei echte Teilmengen, die abgeschlossen sind:

$$\begin{aligned}(0,0) &\to (1,1) \to (2,2) \to (0,0)\\ (0,1) &\to (1,2) \to (2,0) \to (0,1)\\ (0,2) &\to (1,0) \to (2,1) \to (0,2)\end{aligned}$$

Dies ist isomorph zur elementfremden Vereinigung $A \sqcup A \sqcup A$.

Koprodukte

Ist $(A_i | i \in I)$ eine Familie von Ketten, so wird die elementfremde Vereinigung

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \{(i,a) | a \in A_i\}$$

durch die folgende Definition zu einer Ω-Kette. Ist $x \in \bigsqcup_{i \in I} A_i$, so gibt es genau $i \in I$ und ein $a \in A_i$ mit $x = (i,a)$. Man erklärt für ein $\alpha \in \Omega$: $\alpha \cdot x := (i, \alpha \cdot a)$. Die elementfremde Vereinigung der A_i wird auf diese Weise zu dem Koprodukt der Familie $(A_i | i \in I)$. Es wird mit $\coprod_{i \in I} A_i$ bezeichnet. Genauer:

Satz 2.9 (Koprodukt). *Ist $(A_i | i \in I)$ eine Familie von Ω- Ketten. und $f_i \colon A_i \to B$ eine Familie von Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f \colon \bigsqcup A_i \to B$ mit $fq_i = f_i$ für alle $i \in I$. Dabei sind $q_i \colon A_i \ni a \mapsto (i,a) \in \bigsqcup A_i$ die natürlichen Inklusionen.*

Der Beweis des Satzes ist wie üblich.
Ist $A_i \cong A$ für alle $i \in I$, so bezeichnet man mit $A^I := \prod A_i$ und $A^{(I)} := \coprod A_i$.

Satz 2.10. *1. Wirkt Ω auf A kommutativ, so ist für jeden Morphismus $f \colon A \to B$ auch die Abbildung $(f \cdot \alpha)(a) := f(\alpha \cdot a)$ ein Morphismus.*

2. Wirkt Ω kommutativ auf B, so ist für jeden Morphismus $f \colon A \to B$

$$\hat{f} = \alpha \cdot f \colon A \ni a \mapsto \alpha \cdot f(a) \in B$$

ein Morphismus. Da heißt ${}_\Omega[A,B]$ wird auf der linken Seite zu einem Ω-Muster.

Zu 1. Sei $\beta \in \Omega$. Man erhält für $a \in A$: $(f \cdot \alpha)(\beta \cdot a) = f(\alpha \cdot \beta \cdot a) = f(\beta \cdot \alpha a) = \beta \cdot f(\alpha \cdot a) = \beta \cdot (f \cdot \alpha)(a)$. Daher folgt de Behauptung.
Zu 2. Seien $\alpha, \beta \in \Omega$ und $a \in A$. Wir erhalten $(\alpha \cdot f)(\beta \cdot a) = \alpha \cdot (f(\beta \cdot a)) = \alpha \cdot (\beta \cdot f(a)) = \beta \cdot (\alpha \cdot f(a)) = \beta \cdot \hat{f}(a)$. Also ist $\hat{f}$ ein Morphismus. □

2.2.2 Verträgliche Äquivalenzrelationen

Ich will untersuchen, welche surjektiven Bilder eines Ω- Musters A möglich sind.

Definition 10 Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf dem Ω- Muster A heißt verträglich mit Ω, wenn für alle a, a' mit $a \sim a'$ und alle $\alpha \in \Omega$ gilt: $\alpha a \sim \alpha a'$. □

Satz 2.11. *Der Durchschnitt von Äquivalenzrelationen, die mit Ω verträglich sind, ist mit Ω verträglich.*

Sei $(R_i | i \in I)$ eine Familie von Äquivalenzrelationen, die mit Ω verträglich sind. Weiter Sei $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ und $(a, a') \in R$. Dann ist $(\alpha \cdot a, \alpha \cdot a') \in R_i$ für alle $i \in I$, da die R_i Äquivalenzrelationen sind, die mit Ω veträglich sind. Also ist $(\alpha \cdot a, \alpha \cdot a') \in R$. Dies war behauptet. □

Satz 2.12. *Ist $f\colon A \to B$ ein Morphismus, so definiert $a \sim a' \iff f(a) = f(a')$ eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation.*

Satz 2.13. *Es sei A ein Ω-Muster und $\sim$ eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation. Mit $\pi(a)$ sei die zu a gehörende Äquivalenzklasse bezeichnet. Man hat diie surjektive Abbildung $\pi\colon A \ni a \mapsto \pi(a) \in A/\sim$. Es wird $A/\sim$ zu einem Ω Muster, wenn man für $\alpha \in \Omega$ definiert:$\alpha \cdot \pi(a) := \pi(\alpha \cdot a)$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl des Vertreters der Äquivalenzklasse von a ab. Außerdem ist die Abbildung π ein surjektiver Morphismus.*

Ist $a \sim a'$, so ist $\pi(a) = \pi(a')$. Damit ist für $a \sim a'$ und $\alpha \in \Omega$ auch $\alpha \cdot a \sim \alpha \cdot a'$ und daher $\pi(\alpha \cdot a) = \pi(\alpha \cdot a')$. Die Definition hängt daher nicht von der Wahl des Vertreters ab. Der Rest der Aussage ergibt sich aus der Definition. □

Satz 2.14. *Ist A ein Ω- Muster und U eine abgeschlossene Teilmenge von A, so wird folgendermaßen eine mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation definiert:*

$$a \sim a' \iff a, b \in U \text{ oder } a = b.$$

In diesem Fall bezeichnet man $A/\sim$ mit A/U. Für alle $\alpha \in \Omega$ ist $\alpha \cdot \pi(U) = \pi(U)$. Es ist $\pi(U)$ eine Senke.

1. $\sim$ ist reflexiv. Da $a = a$ ist, ist $a \sim a$.
2. $\sim$ ist symmetrisch. Ist $a = b$, so ist $b = a$ und daher $b \sim a$.
3. $\sim$ ist transitiv. Es sei $a \sim b$ und $b \sim c$. 1. Fall. a und b sind aus U. Ist in dieser Situation $b = c$, so sind $a, c \in U$. Daher ist $a \sim c$. Ist in der Situation $b, c \in U$ so sind $a, c \in U$. Daher ist $a \sim c$.
2. Fall: $a = b$. Ist in der Situation $b, c \in U$, o sind $a = b, c \in U$. Also ist $a \sim c$. Ist in der Situation auch $b = c$ so ist alles klar.

Also ist dies eine Äquivalenzrelation. Sie ist auch mit Ω verträglich. Denn seien $a \sim b \in A$. Außerdem sei $\alpha \in \Omega$. sind $a, b \in U$, so sind $\alpha \cdot a$ und $\alpha \cdot b \in U$. Also ist $\alpha \cdot a \sim \alpha \cdot b$. Ist eines der beiden Elemente nicht in U, so können sie nur äquivalent sein, wenn sie gleich sind. Dann ist aber auch $\alpha \cdot a = \alpha \cdot b$. Also folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.15. *In der Kategorie der Ω- Muster ist jeder Epimorphismus eine surjektive Abbildung.*

Sei $f\colon A \to B$ ein Epimorphismus zwischen den Mustern. Sei $U = f(B)$. Es ist U abgeschlossen in B. Ist $\pi\colon B \to B/U$ der Morphismus, der oben definiert wurde und ist $u \in U$ beliebig, so ist für alle $u' \in U$: $\pi(u') = \pi(u)$. Und es ist für alle $\alpha \in \Omega$: $\alpha \cdot \pi(u) = \pi(u)$. Daher ist auch die konstante Abbilgung $k\colon B \ni b \mapsto \pi(u) \in B/U$ ein Morphismus. Für alle $a \in A$ ist $\pi(f(a)) = k(f(a)) = \pi(u)$. Also ist $k \circ f = \pi \circ ff$. Daher ist $k = \pi$. Es ist aber für $\pi(b) = b$ für $b \notin U$. Daher kann es kein $b \notin U$ geben. Also ist $U = B$. Daher ist f eine surjektive Abbildung. □

Satz 2.16. *In der Kategorie der Ω- Muster gibt es Differnzkokerne.*

Seien $f, g\colon A \to B$ Morphismen zweischen Ω-Mustern. Weiter sei

$$H := \{(f(a), g(a)) | a \in A\} \subset B \times B.$$

R die kleinste Äquivalenzrelation, die H enthält und mit Ω verträglich ist. Sei weiter $h\colon B \to C$ mit $hf = hg$. Es definiert h durch $x \sim y \iff h(x) = h(y)$ eine Äquivalenzrelation auf B, die mit Ω verträglich ist. Außerdem enthält sie R. Wir erklären:

$$h^*\colon B/\sim \ni \pi(b) \mapsto h(b) \in C$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und ein Morphismus. Es ist auch der einzige Morphismus mit $h^*\pi = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & C \\ & B/\sim \arrow[ur, "h*"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung. *Hier fehlt die Existenz von Differenzkern.*

Aufgaben:

3. Betrachte $(\mathbb{N}, 1+)$ mit den beiden Morphismen $f(0) = 0$ und $g(0) = m$. Berechne den Differnzkokern.
4. Betrachte $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha(n) = 2n + 1$ und $\beta(n) = 2n + 2$.
   a) Es soll $0 \sim 2$ gelten. Berechne $\mathbb{N}/\sim$.
   b) Es soll $0 \sim 4$ gelten. Berechne $\mathbb{N}/\sim$.

Satz 2.17. *Sei A ein Ω Muster. Ist $\sim$ die kleinste mit Ω verträgliche Äquivalenzrelation mit $\alpha\beta \cdot a \sim \beta\alpha \cdot a$ dann gilt: Auf $A/\sim$ wirken α, β komutativ.*

Es ist $\beta\alpha \cdot a \sim \alpha\beta \cdot a$. Sei $\pi\colon A \to A/\sim$ der kanonische Epimorphismus. Für $\pi(a)$ und α, β:

$$\alpha\beta \cdot \pi(a) = \pi(\alpha\beta \cdot a) = \pi(\beta\alpha \cdot a) = \beta\alpha \cdot \pi(a)$$

Beispiele:

22. Sei $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\alpha(x) = x{+}1$ und $\beta(x) = 2x$. Dann ist $\beta\alpha(x) = 2x{+}2$ und $\alpha\beta(x) = 2x{+}1$. Für alle $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist $2x + 1 \sim 2x + 2$. Daher ist $1 \sim 2$ und daher $\alpha(1) = 2 \sim \alpha(2) = 0$. Also auch $2 \sim 0$. Das heißt $A/\sim$ besteht nur aus einem Element.

23. Es genügt nicht nur auf einem Erzeugendensystem zu testen ob α, β kommutativ auf A wirken. Betrachten folgendes Beispiel: $A : \{0, 1, 2, 3\}$

	0	1	2	3
α	1	1	3	1
β	2	3	2	2

Von 0 aus kann man jedes Element aus A erreichen. Es ist $[0] = A$. Auch ist $\beta\alpha(0) = \beta(1) = 3$ und $\alpha\beta(0) = \alpha(2) = 3$. Aber! $\beta\alpha(1) = \beta(1) = 3$ und $\alpha\beta(1) = \alpha(3) = 1$. Daher wirken α, β nicht kommutativ auf A.

2.2.3 Rekursionssatz

Beispiele:

24. Jede Menge A wird mit der Identität zu einer Kette. Durch die Identität wird der Menge noch keine Struktur aufgeprägt. Es sei $\mathbf{I} = \{0\}$ eine Mnege mit einem Knoten und der Identität als Selbstabbildung. Zu jeder Menge $(A, 1_A)$ und jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon I \to A$ mit $f(0) = a$. Das ist ziemlich trivial. Deswegen wollen wir ein etwas verwickelteres Beispiel betrachten.

25. Wir betrachten $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit der Abbildung $1+$ also $1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 0$. Ist $f\colon \mathbb{Z}_2 \to A$ ein Morphismus und $a = f(a)$. Dann ist $f(1) = f(1 + 0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot a$. Weiter ist $f(0) = f(1 + 1) = \alpha^2 a$. Umgekehrt gilt:

    Ist (A, α) eine Kette mit $\alpha^2 = Id$, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $f\colon \mathbb{Z}_2 \to A$ mit $f(0) = a$.

    Beweis: Wir erklären $f(0) = a$ und $f(1) = \alpha(a)$. Dann ist f ein Morphismus. Denn betrachten wir den Graphen von f:

$$(0,{\cdot}a) \longrightarrow (1, \alpha(a)) \longrightarrow (0, \alpha^2(a) = a$$

    Er ist abgeschlossen gegenüber $(1{+}, \alpha)$. Daher ist f ein Morphismus.

Satz 2.18 (Rekursionssatz). *Sei A eine Ω-Kette. E erzeuge A und $E \cap \Omega \cdot A = \emptyset$. Die Abbildung*

$$\cdot\colon \Omega \times A \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a \in A$$

sei injektiv. Dann gilt: Zu jeder Ω-Kette B und jeder Abbildung $f\colon E \to B$ gibt es genau einen Morphismus $f^*\colon A \to B$, so dass $f^* \circ \iota = f$ gilt. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "f*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Sei $D = \{(e, f(e) | e \in E\}$. Da f eine Funktion ist D rechtseindeutig. Das heißt zu jedem $e \in E$ gibt es nur ein $b \in B$ mit $(e, b) \in D$. Es wird $A \times B$ zu einer Ω-Kette durch $\alpha \cdot (a, b) := (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$.
Sei $[D]$ der Ω- Abschluss von D in $A \times B$.

Beh.: $[D]$ ist rechtseindeutig
Beweis durch Induktion: Es sei

$$T = \{a | a \in \text{ Es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in [D]\}$$

Es ist $E \subset T$: Denn sei $(e, b) \in [D] = D \cup \Omega \cdot [D]$, so gäbe es ein $\alpha \in \Omega$ und ein $(a', b') \in [D]$ mit $\alpha \cdot (a', b') = (e, b)$. Daher ist $\alpha \cdot a' = e$. Dies kann nicht sein, da $E \cap \Omega \cdot A = \emptyset$ vorausgesetzt ist. Also ist $(e, b) \in D$. Daher ist $(e, b) = (e, f(e)$.
T ist abgeschlossen gegenüber Ω:
Sei $a \in T$. Dann gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in [D]$. Ist $\alpha \in \Omega$, so ist sicher $\alpha \cdot (a, b) \in [D]$. Ich zeige $\alpha \cdot b$ ist das einzige Elemant aus B, so dass $(\alpha \cdot a, b') \in [D]$ ist. Denn sei $(\alpha \cdot a, b')) \in [D]$. Dann ist $(\alpha \cdot a, b')$ sicher nicht in D. Denn sonst wäre $\alpha \cdot a \in E$. Also gibt es ein $\beta \in \Omega$ und ein $(a'', b'') \in [D]$ mit $(\alpha \cdot a, b') = \beta \cdot (a'', b'')$. Daher ist $\alpha \cdot a = \beta \cdot a''$. Es folgt $\alpha = \beta$ und $a = a''$. Daher ist (a, b'') und a, b in $[D]$. Da $a \in T$ ist folgt $b = b''$. Daher folgt $b' = \alpha \cdot b'' = \alpha \cdot b$. Also ist T abgeschlossen gegenüber Ω. Also ist $T = A$. Daher ist $[D]$ der Graph einer Funktion $A \to B$. Da $[D]$ abgeschlossen gegenüber Ω ist, ist f auch ein Morphismus. □

Definition 11 Eine Ω- Kette heißt frei, wenn folgendes gilt:

1. $\cdot \colon \Omega \times A \ni (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a \in A$ ist injektiv und nicht surjektiv.

2. Ist $E = A \setminus \Omega \cdot A$, so ist $[E] = A$. Das heißt E erzeugt A.

In diesem Fall heißt E Basis von (A, Ω). □

Satz 2.19. *Haben die freien Ω- Ketten A, B gleich mächtige Basen, sind sie isomorph.*

Sei E eine Basis von A und F eine Basis von B. Nach Voraussetzung gibt es eine bijektive Abbildung $f \colon E \to F$ mit der Umkehrabbildung $g \colon F \to E$. Aus dem Rekursionssatz ergibt sich: Es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $f^* \colon A \to B$ mit $f^* \iota = f$. Genauso gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $g^* \colon B \to A$ mit $g^*(b) = g(b)$ für alle $b \in F$. Für $e \in E$ folgt: $g^* f^*(e) = g^* f(e) = g(f(e)) = e$, da f, g invers zueinander sind. Außerdem ist $1_A(e) = e$ für alle $e \in E$. Da 1_A ein Morphismus ist folgt wegen Satz 2.7, dass $g^* f^* = 1_A$ ist. Genauso ist $f^* g^* = 1_B$. Daher sind f^* und g^* zueinander inverse Morphismen. □

2.2.4 Unendliche Mengen

Kurze Geschichte der Unendlichkeit

Gibt es Unendlichkeit? Darüber haben vielleicht schon die Steinzeitjäger am Lagerfeuer gestritten, während sie den Sternhimmel betrachteten. Es wird immer welche gegeben haben, die den Zaun am Weltende zeigen konnten, die genau wussten, wo man umkehren

musste. [5] Andere wagten sich einen Schritt weiter. Das sind und waren die „eins weiter“ Optimisten. Es gibt immer einen Schritt in neues Land.[6]
Aristoteles lehnte die Unendlichkeit des Universums entschieden ab. Für ihn befand sich die existierende Welt innerhalb der äußersten Kristallschale, an der die Fixsterne hingen. Da draußen war so viel Nichts, so dass es sogar kein Draußen mehr gab. Die Welt als ganzes war vollkommen. Ohne Grenzen zu sein, war ein Mangel, es mangelte an Grenzen. Ein vollkommenes Ding hat auch eine Grenze.

> ...unendlich sein ist ein Mangel und kein Ausdruck der Vollkommenheit; es ist gleichbedeutend mit dem Fehlen einer Grenze ...(zitiert nach Rucker Rucker, *Die Ufer der Unendlichkeit*, Seite 15)

[7] Natürlich wusste auch er, dass man zumindest in der geistigen Welt stets Neuland betreten kann. Daher erfand er den seltsamen Begriff der „potentiellen Unendlichkeit“. Das ist eine Unendlichkeit, die nicht tatsächlich vorhanden ist, sondern immer im Entstehen begriffen ist. [8] Der aktuellen Unendlichkeit verweigerte er das Dasein. Noch Karl Friedrich Gauß war so der Autorität des Aristoteles hörig, dass er „zuförderst gegen den Gebrauch des aktuell Unendlichen protestierte“. Als Anfang des 20ten Jahrhunderts die Widersprüche in der noch jungen Mengenlehre auftauchten, fiel auch Mathematikern vom Schlage Poincarés nichts besseres ein, als den guten Aristoteles wieder hervorzuzerren: Er meinte „Es gibt kein aktual Unendliches, das haben die Cantorianer vergessen, und haben sich in Widersprüche verwickelt“(zitiert nach Herbert Meschkowski, *Georg Cantor Briefe*, Seite 447
Der antike Philosoph und Dichter Lukrez (ca 96 bis 55 v.Chr) widersprach heftig Aristoteles. Er meinte:

> „Zeig mir lieber Aristoteles Deine Weltgrenze. Ich will hingehen mich auf die Grenzmauer stellen und meinen Speer werfen. Wohin fliegt er? Wird er zurückgeworfen, oder fliegt er über die Grenze? Was geschieht mit dem Speer? Mit dieser Frage will ich dich verfolgen, bis du mir eine einleuchtende Antwort geben kannst.“

[5] Hier sollte ein Bild eingefügt werden.

[6] Es gibt eine sehr schöne Geschichte von Anderssen. Die Geschichte vom Diamantberg. Hier erläutert er die Unendlichkeit.

[7] Aristoteles setzt hier zwei Dinge gleich, die nicht unbedingt gleich sind. „Grenze haben“ ist nicht dasselbe, wie „endlich sein“. So hat eine Strecke der Länge 1 sicher Grenzen. Aber auch Aristoteles wussete, dass man die Strecke halbieren kann. Die halbierte Strecke kann jedes kleine Griechlein wieder halbieren. Im Prinzip kann man so fortfahren. Wieviel Punkte liegen auf auf der ursprünglichen Strecke?

[8] Cantor bemerkt an einer Stelle in seinen Briefen (wo??), dass der Begriff der potentiellen Unendlichkeit, den der aktualen Unendlichkeit voraussetze.

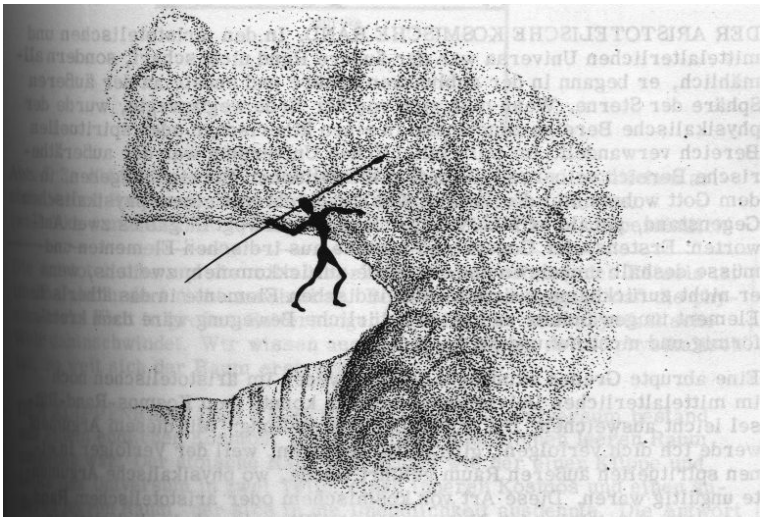


Abb. 2.4: Der Speerwerfer am Rande des Unversums. Eine Grafik aus „Kosmologie“ von Harrison

Auch Aurelius Augustinus verteidigte das aktual Unendliche mit Leidenschaft. Er braucht in seiner Argumentation gegen die ewige Wiederkehr des Gleichen eine unendliche Welt.

> *19. Auch das Unendliche umfasst Gottes Wissen*
>
> Wenn sie aber sagen, selbst Gottes Wissen könne das Unendliche nicht fassen, wird ihnen nichts anderes übrigbleiben, als auch die dreiste Behauptung aufzustellen und damit in den Abgrund tiefer Gpttlosigkeit zu stürzen, Gott wisse nicht alle Zahlen. Denn dass diese unendlich sind, ist unbestreitbar. Kann man doch jede Zahl, bei der man zu zählen aufhören möchte, nicht nur um eins vermehren, sondern auch ....
>
> Dabei hat jede Zahl ihre besondere Eigentümlichkeit, so dass keine einer anderen gleich sein kann ...
>
> (Zitiert nach Augustinus, *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*, Seite 90,91)

Augustinus hat viel über Unendlichkeit insbesondere die Unendlichkeit Gottes nachgedacht. dies kristallisiert sich in einer schönen Legende:
Sinnend spazierte er morgens am Ufer des Meeres und sieht er einen Knaben am Ufer spielen. Mit einer Muschel füllte er aus dem Meer Wasser in ein kleines Loch. Augustinus fragte ihn. „Was machst du da?“ „Ich schöpfe das Meer aus“. Augustinus lachte und meinte das Kind belehren zu müssen. Der Junge aber sagte: „Eher hat das Meer in dieser Kuhle Platz, als dass du die Unendlichkeit Gottes verstehst.“ Die Methode des Ausschöpfens wird uns noch beschäftigen.
Thomas von Aquin hielt an Lehre seines Meisters Aristoteles fest. Meiner Meinung nach hauptsächlich deswegen, weil in einer endlichen Welt die Methode des Abstiegs so gut funktioniert. Alles was ist, hat ein Ursache. Diese ist wieder verursacht. So erhalten wir eine absteigende Kette von Ursache und Wirkung. In einer endlichen Welt muss jede solche Kette abbrechen. Es gibt einen Erstverursacher. Dies ist Gott. Der Beweis klappt aber nur in einer endlichen Welt.
Giordano Bruno ließ sich für die Unendlichkeit des Universums foltern und verbrennen. Er griff das Argument von Lukrez wieder auf und fragte. „Wenn die Welt endlich ist und außerhalb nichts, wo ist dann die Welt. Hängt sie im Nichts? Wo ist die Hand die ich über den Rand des Universums hinaus ausstrecke? “.
Verrückte oder scheinbar verrückte Fragen wurden im Zusammenhang mit der Unendlichkeit beredet. Engel sind Geister. Wem Engel zu transzendent sind, ersetze sie durch Punkte. Sie dehnen sich nicht wie Körper räumlich aus. Der wissensdurstige Scholastiker fragt sich: „Wieviel Engel haben auf einer Nadelspitze Platz?“ Oder wieviel Engel können von der Decke des Brautzimmers in der „Camera degli Sposi“ den jungen Eheleuten bei ihrem vergnüglichen Tun zuschauen? Eine Nadelspitze hat eine gewisse Breite etwa 1mm. Angenommen auf dieser Nadelspitze haben x solcher Wesen Platz. Dann können sich doch auf 1m sicher $1000x$ dieser transzendenten Wesen lagern. Aber der Strahlensatz belehrt uns eines besseren. Offensichtlich gibt es zu jedem Punkt des 1m genau einen Punkt des 1mm. Also ist $x = 1000x$. Es folgt daraus $x = 0$. Für Heiden, die sowieso nicht an Engel glauben, ist dies nicht absurd. Aber die sollten ja Punkte betrachten. Dass aber kein Punkt auf einem 1m Stab liegen soll, ist mit Sicherheit noch absurder. Daher muss die Voraussetzung falsch sein: Es gibt eine bestimmte Zahl von Punkten

auf einer Strecke. Es ist nicht alles durch Anzahlen messbar, wie der weise Pythagoras lehrte. Halten wir nochmal in moderner Sprechweise fest:

Bemerkung. *Es gibt eine injektive Funktion f von einer Strecke in dieselbe Strecke, welche nicht surjektiv ist.*

Pythagoras hat Unrecht: Nicht alles ist nach Maß und Zahl geordnet.
Noch krasser –schockierender– wurde diese Erkenntnis mit der Entdeckung der Perspektive zu Beginn der Renaissance unter anderen beispielsweise von Mantegna (1431 bis 1506).

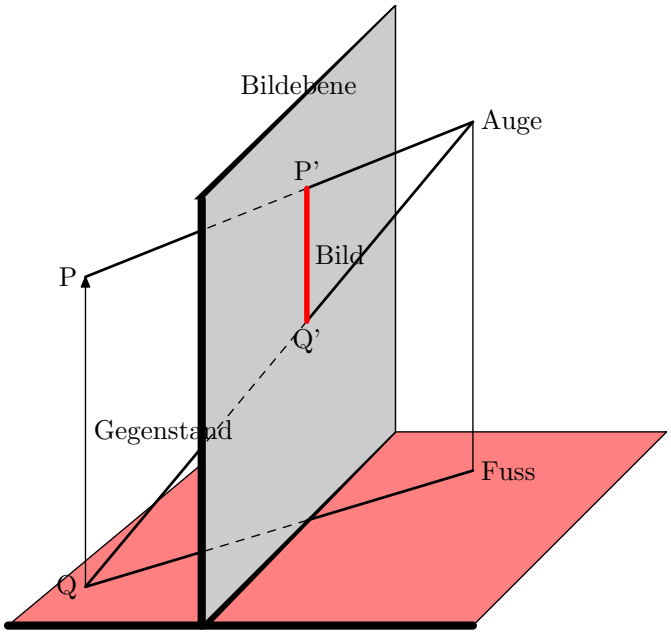


Abb. 2.5: Perspektive

Betrachten wir die folgende Situation.
Jedem Punkt der Halbgeraden entspricht genau ein Punkt der „Leinwand“. Das heißt auf der Leinwand sind genau so viele Punkte, wie auf der ganzen Halbgeraden. Es gibt eine injektive Funktion von der ganzen Geraden in eine Strecke. Oder wieder: Es gibt eine injektive Funktion von der Geraden in die Gerade, welche nicht surjektiv ist. Roger Bacon, Wilhelm von Ockham und Nikolaus von Oresme haben solche Fragen im „finsteren Mittelalter“ bedacht (Siehe Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, Seite 68). Sehr viel später betrachtete Galilei die Quadratfunktion. $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto n^2 \in \mathbb{N}$. Er wunderte sich darüber dass sie injektiv, aber nicht surjektiv ist. Dies heißt doch in einem gewissen Sinn, dass es genausoviel Quadratzahlen wie natürliche Zahlen überhaupt gibt. Schließlich systematisierte Bernhard Bolzano in seiner Schrift „Paradoxien des Unendlichen“ diese Wunder. Erst Richard Dedekind griff in seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“ diese Eigenschaft auf und erklärte: Eine Menge A heißt unendlich, wenn

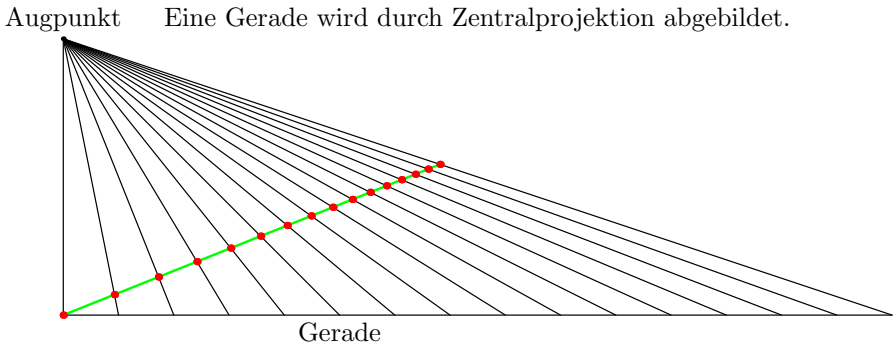


Abb. 2.6: Engel

es eine injektive Funktion von A nach A gibt, welche nicht surjektiv ist. Dabei heißt eine Funktion von A nach B injektiv, wenn bei jedem Element aus B höchstens ein Pfeil endet. Die Funktion heißt surjektiv, wenn bei jedem Element aus B mindestens ein Pfeil endet. Bis dahin war das Wort „Unendlichkeit“ nur mit einer Fülle unklarer Vorstellungen verbunden. Dedekind verband das Wort mit einem klaren Begriff.

Definition 12 (Dedekind) Eine Menge A heißt unendlich, wenn es eine injektive Funktion $\alpha\colon A \to A$ gibt, welche nicht surjektiv ist. □

Satz 2.20. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

1. *Es gibt eine unendliche Menge.*
2. *Es gibt eine freie Kette* $(\mathbb{N}, \alpha)$*, welche von einem Element erzeugt ist.*
3. *Es gibt eine Menge* $\mathbb{N}$ *mit einem besonderen Element* 0*. Zu* $\mathbb{N}$ *gibt es eine Selbstabbildung* $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*
   a) α *ist injektiv.*
   b) 0 *ist nicht im Bild von* α *enthalten.*
   c) $\mathbb{N}$ *ist die einzige gegenüber* α *abgeschlossene Teilmenge, die* 0 *enthält.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei A eine im Sinne von Richard Dedekind unendliche Menge. Dann gibt es eine injektive Funktion $\alpha\colon A \to A$, die nicht surjektiv ist. Sei $o \notin \alpha(A)$. Wir betrachten $[o]$. Es ist $[o]$ zusammen mt α eine Kette. Natürlich ist α eingeschränkt auf $[o]$ nicht surjektiv aber injektiv. o erzeugt $[o]$. Also ist $\{o\}$ eine Basis der freien Kette $[o]$. Nennen wir $\mathbb{N} := [o]$, so ergibt sich 2.
2. $\Longrightarrow$1. Dies ist nach der Definition einer freien Kette klar.
2. $\Longrightarrow$3. $\mathbb{N}$ ist frei und von o erzeugt. Daher ist α injektiv und $o \notin \alpha(\mathbb{N})$. Enthält eine gegenüber α abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ das erzeugende Element o, so ist $M = \mathbb{N}$. mit $0 := o$ folgt die Behauptung.
3. $\Longrightarrow$1. Dies ist klar.

die Aussagen des Teiles 3. dieses Satzes sind die bekannten Peano Axiome (sie z.B Das Buch „Zahlen“ Ebbinghaus und al., *Zahlen*, Seite 13 und Seite 17). Richard Dedekind nennt in seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“ (Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*) eine in dem Satz gekennzeichnete Menge ein „einfach unendliches System“. Je zwei solcher Systeme sind isomorph.

Folgerung 2.21. *Je zwei freie zyklische Ketten sind isomorph.*

Dedekind hat einen schönen „Beweis“ für die Existenz einer unendlichen Menge.

> „Meine Gedankenwelt, d.h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s', dass s der Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S. Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung $\varphi\ldots$“ die gewünschten Eigenschaften.

Für eine gemalte Erläuterung dieser Idee siehe die Abbildung 2.7

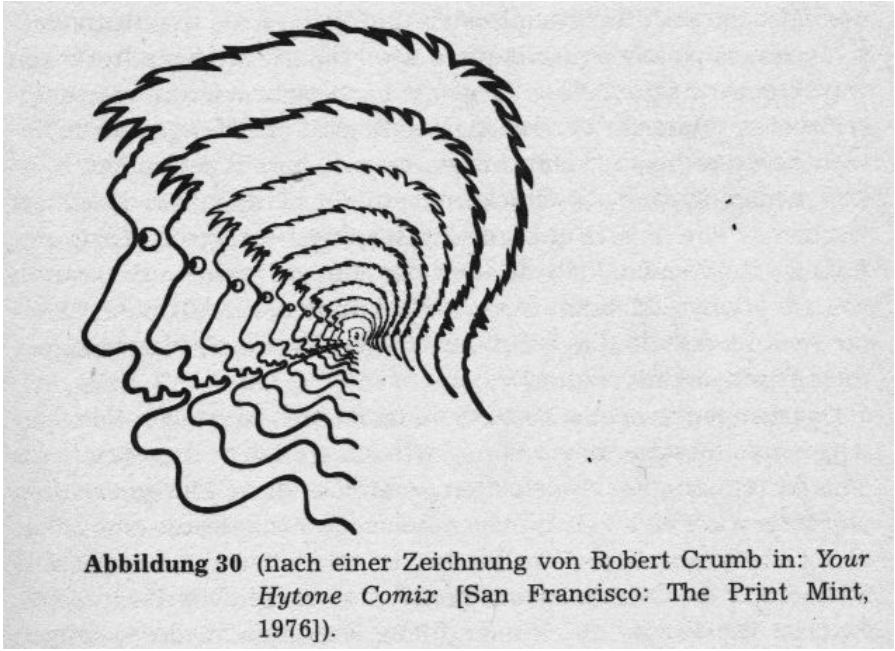


Abb. 2.7: Richard Dedekind und seine Gedanken.

Ich muss gestehen: Mich überzeugt der Beweis. Es gibt Beckmesser, die ihn nicht schlüssig finden. Auf jeden Fall erhellt Dedekinds Definition schlaglichtartig, dass das Unendliche näher liegt als das endliche.
David Hilbert hat folgendes Bild gebraucht: Ein endliches Hotel hat die folgende Eigenschaft: Angenommen in jedem Zimmer wohnt eine Gast. Das Hotel ist voll belegt. Abends kommt ein Fremder an und fragt nach einem Zimmer. Der Portier muss sagen:

„Es tut uns schrecklich leid. Wir können Ihnen kein Zimmer vermieten, das unser Haus voll ist.“
Würde der Fremde fragen, ob man wirklich alle Zuordnungen der Zimmer zu den Gästen bedacht habe, so würde man ihn als verrückt einstufen. Auch wenn die Höflichkeit gebieten würde, es nicht zu sagen.
Stellen wir uns aber einen langen Flur ohne Ende vor. In ihm sind die Zimmer wie an einer Perlenschnur angeordnet. Rechts von jedem Zimmer liegt ein weiteres Zimmer.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow \dots$$

Auch wenn in jedem Zimmer des Flures eine Person untergebracht ist, kann der neue Gast noch mit einem Bett versorgt werden. Jeder Gast muss einfach das Zimmer rechts von seinem Zimmer beziehen. Dann bleibt das erste Zimmer frei. Hier kann der Fremde seinen Koffer auspacken. Bezeichnen wir mit A die Menge der Zimmer dann bedeutet es: Es gibt einen injektive Funktion, $\alpha\colon A \to A$, welche nicht surjektiv ist.
Einer der Kritiker Dedekinds war sein Freund Georg Cantor. Er hatte übrigens die etwas unangenehme Art die Freundschaft unter wissenschaftlichen Auseinandersetzungen leiden zu lassen. So schreibt er in einem Brief an Hilbert: Herbert Meschkowski, *Georg Cantor Briefe*, Seite 427

> Dedekind geht offenbar von der Meinung aus, dass die Zahlentheorie keine anderen Axiome voraussetze als die logischen; dasselbe scheinen die Vertreter des Logikcalcüls zu glauben. ... Mein anderer Gegensatz zu Dedekind besteht, wie Sie ja wissen, darin, dass er jede bestimmte Vielheit für consistent hält, also den Unterschied von consistenten und inconsistenten Vielheiten nicht zugibt.

Dedekind definiert Unendlichkeit als mögliche Beziehung einer Menge zu sich. Dedekind erklärt durch soziale Beziehungen die Unendlichkeit.

Satz 2.22. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

Es gibt eine unendliche Menge.

Für jede Kette (A, α) gilt: Sie ist genau dann zyklisch, wenn sie epimorphes Bild von $(\mathbb{N}, s)$ ist.

Sei (A, α) eine zyklische einstellige Algebra. Ein Element a erzeugt also A. Das heißt $[a] = A$. Wegen dem Rekursionssatz 2.2.3 gibt es zu der Abbildung $\{0\} \ni 0 \mapsto a \in [a] = A$ genau ein Homomorphismus $f^* : \mathbb{N} \to A$ mit $f^*\iota = f$. $f^*(\mathbb{N})$ ist als Bild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Also ist $A = [a] \subset f^*(\mathbb{N})$. Daher ist f surjektiv. Die Umkehrung ist einfach. □

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Ab jetzt setze ich voraus, dass es eine im Sinne von Dedekind unendliche Menge gibt. Dann gibt es auch eine freie Kette, die von einem Element erzeugt ist. Diese ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ich nenne sie $(\mathbb{N}, 1+)$. Das $1+$ wird meist einfach weggelassen.

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Satz 2.23. *Jede Kette ist epimorphes Bild einer freien Kette.*

Sei (B, β) eine beliebige Kette. Wir betrachten die Menge $F := \mathbb{N} \times B$. Als Funktion $\alpha : F \ni (n, b) \mapsto (s(n), b) \in F$. Diese Funktion ist sicher injektiv. Ist $E := 0 \times B$, so ist $E \cap \alpha(F) = \emptyset$. Also ist F frei mit Basis E. Zu der Abbildung $f : E \ni (0, b) \mapsto b \in B$ gibt es genau einen Morphismus $F \xrightarrow{f^*} B$ mit $f^* \circ \iota = f$. Es ist f surjektiv. Also ist auch f^* surjektiv und damit ein Epimorphismus. □

Satz 2.24. *Sei* $([o], \alpha)$ *eine zyklische Kette. Für alle* $a, b \in [o]$ *gilt* $[a] \subset [b]$ *oder* $[b] \subset [a]$.

Sei b beliebig in $[o]$. Sei

$$T = \{a | a \in [o] \text{ mit: } [a] \subset [b] \text{ oder } [b] \subset [a]\}$$

Es ist $o \in T$, denn $b \in [o]$.
Sei $a \in T$.
1. Fall: $a \in [b]$ dann ist $\alpha(a) \in [b]$ und daher $\alpha(a) \in T$.
2. Fall: $[b] \subset [a]$ also $b \in [a]$. Ist $b = a$, so ist $\alpha(a) \in [\alpha(b)] \subset [b]$ und man ist wieder fertig. Andernfalls ist $b \neq a$ und infolgedessen $b \in [\alpha(a)]$. Daher ist wieder $\alpha(a) \in T$. Also ist T abgeschlossen gegenüber α. Daher ist $T = [o]$. □

Satz 2.25. $(\mathbb{N}, 1+)$ *ist wohlgeordnet.*

Wegen dem Satz 1.8 ist $a \leq b \iff [b] \subset [a]$ eine fundierte Halbordnungsrelation. Wegen 2.24 ist die Halbornung linear (total). Also folgt die Behauptung.

Satz 2.26. *Jede Unterkette von* $\mathbb{N}$ *ist zyklisch.*

Sei U eine Unterkette von $\mathbb{N}$. Dann enthält U ein kleinstes Element m. Ist $u \in U$, so ist $m \leq u$. Das heißt $[u] \subset [m]$ oder $u \in [m]$. Daher ist $U = [m]$. Das war behauptet. □

Satz 2.27. *Jede Unterkette einer zyklischen Kette, ist zyklisch.*

Sei U eine Unterkette der zyklischen Kette $[o]$. Es gibt genau einen Morphismus $f : \mathbb{N} \to [o]$ mit $f(0) = o$. Es ist $f^{-1}(U)$ eine Unterkette von $\mathbb{N}$. Daher gibt es ein $a \in f^{-1}(U)$ mit $[a] = f^{-1}(U)$. Es ist $f(f^{-1})(U) = U$, da f surjektiv ist. Also ist $[f(a)] = U$. Damit ist U zyklisch. □

Satz 2.28.

1. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.*
2. *Ist* $f : A \to B$ *eine injektive Abbildung in eine endliche Menge* B*, so ist* A *endlich.*
3. *Jedes surjektive Bild einer endlichen Menge ist endlich.*[9]

[9] Hier braucht man das Auswahlaxiom.

Zu 1. Sei A eine Teilmenge der endlichen Menge B. Dann ist $B = A \cup (B \setminus A)$. Sei $f : A \to A$ eine injektive Abbildung. Wir erklären eine injektive Abbildung $g : B \to B$ mit $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.

$$g(b) := \begin{cases} f(b) & \text{falls } b \in A \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: g ist injektiv.
Es sei $b_1, b_2 \in B$ mit $g(b_1) = g(b_2)$. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1. $b_1, b_2 \in A$. Dann ist $g(b_1) = f(b_1) = g(b_2) = f(b_2)$. Somit ist $b_1 = b_2$, da f injektiv ist.

2. $b_1 \in A$ und $b_2 \in B \setminus A$. Dann ist $g(b_1) = f(b_1) \in A$ aber $g(b_2) = b_2 \notin A$. Dann ist $g(b_1) = g(b_2)$ aber unmöglich.

3. $b_1, b_2 \in B \setminus A$. Dann ist $b_1 = g(b_1) = g(b_2) = b_2$. □

Also ist in jedem Fall, in dem $g(b_1) = g(b_2)$ möglich ist, schon $b_1 = b_2$. Daher ist g injektiv. Da B endlich ist, ist g auch surjektiv. Es gibt daher zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $g(b) = a$. Es ist aber $b \in B \setminus A$ unmöglich. Denn dann wäre $a = g(b) = b \notin A$. Also ist $b \in A$, $g(b) = f(b)$ und man hat: Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $a' \in A$ mit $f(a') = a$. Das heißt f ist surjektiv. Also ist A eine endliche Menge.
Zu 2. Man zeigt leicht, dass die Klasse der endlichen Mengen gegenüber Bijektionen abgeschlossen ist. Damit folgt die Behauptung.
Zu 3. Ist $f : A \to B$ eine surjektive Abbildung mit endlichem A, so gibt ein $g : B \to A$ mit $fg = 1_B$. Daher ist g eine injektive Abbildung. $g(B) \subset A$ ist endlich. Daher ist B endlich. [10]

Aufgaben:

5. a) Zeige: Ist A eine unendliche Menge, und $a \in A$, so ist $A \setminus \{a\}$ unendlich. Nimmt man aus dem unendlichen Meer einen Tropfen heraus, so bleibt das Meer unendlich.

   Lösung:

   Es gibt eine injektive Funktion $\alpha : A \to A$, welche nicht surjektiv ist. Also gibt es ein $b \in A \setminus Bi(\alpha)$.

   $a = b$: Dann ist für jedes $x \in A' = A \setminus \{a\}, \alpha(x) \neq a = b \notin Bi(\alpha)$. Also hat man die injektive Funktion

   $$\alpha' : A' \ni x \mapsto \alpha(x) \in A'$$

   Sie ist als Einschränkung von α sicher injektiv. Sie ist auch nicht surjektiv. Denn es ist $\alpha(a) \neq a \notin Bi(\alpha)$. Also ist $\alpha(a) \in A' = A \setminus \{a\}$. Außerdem ist $\alpha(a) \notin Bi(\alpha')$. Denn wäre $\alpha(a) = \alpha(a')$ mit einem $a' \neq a$, so wäre, weil α injektiv ist $a = a'$. Dies widerspricht sich. Also ist $\alpha' : A' \to A'$ injektiv aber nicht surjektiv. Damit ist $A' = A \setminus \{a\}$ auch unendlich.

[10] Hier ist das Auswahlaxiom für endliche Mengen benutzt.

$a \neq b$**:** In diesem Fall sei f die Funktion, die a und b vertauscht. Die ist sicher bijektiv. Sie ist zu sich selbst invers.

Beh.: $a \notin Bi(f\alpha)$.

Angenommen es gibt ein $x \in A$ mit $f(a) = (f\alpha)(x)$. Dann ist $b = f(a) = \alpha(x)$. Dies widerspricht der Wahl von b. Die Einschränkung:

$$\widehat{f\alpha} : A' \ni x \mapsto f\alpha(x) \in A'$$

ist dann eine injektive Funktion, welche nicht surjektiv ist.

b) Ist die Menge E endlich und x beliebig, so ist $E \cup \{x\}$ endlich.

Lösung: Wäre $E \cup \{x\}$ unendlich, so wäre E unendlich.

c) Sei $([a], \alpha)$ eine einstellige zyklische Algebra, so ist für alle $x \in [a]$ die Menge $[a] \setminus [x]$ endlich.

Lösung:

Ich bezeichne mit $\overline{[x]} := [a] \setminus [x]$. Die Behauptung ist für $x = a$ sicher richtig. Denn dann ist $\overline{[x]} = \emptyset$. Sei

$$\mathbb{T} = \{x | \overline{[x]} \text{ endlich } x \in [a]\}$$

Es ist $a \in \mathbb{T}$. Sei $x \in \mathbb{T}$.

- $x \in \overline{[\alpha(x)]}$: In diesem Fall ist $[\alpha(x)] = [x]$ und daher $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]}$ endlich.
- $x \notin [\alpha(x]$: In diesem Fall ist $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]} \cup \{x\}$ und das ist endlich.

Hinweise:

1. Glaubt man an die Existenz einer unendlichen Menge, so ist wahrscheinlich die metasprachliche Induktion, welche die Logiker immer machen und die ich nie verstanden habe (Sie wollen doch die Induktion begründen) überflüssig. Ich kann ja in der unendlichen Menge Induktion führen.

2. Der Begriff der Unendlichkeit überträgt sich von der Kategorie der Mengen ganz leicht auf andere Kategorien. So kann man sagen: Ein Vektorraum V hat unendliche Dimension, genau dann wenn es einen injektiven Homomorphismus gibt, der nicht surjektiv ist. [11]

   Definition 3. Ein Objekt A in einer Kategorie heißt unendlich, wenn es einen Monomorphismus $f : A \to A$ gibt, der kein Epimorphismus ist. Endlich heißt A, wenn dies nicht der Fall ist. Dabei heißt ein Morphismus f Monomorphismus, wenn für alle Morphimen α, β mit $f \circ \alpha = f \circ \beta$ auch $\alpha = \beta$ ist.

3. In diesem Sinne in in der Kategorie der abelschen Gruppen $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ endlich, während $\mathbb{Z}$ unendlich ist. Also etwas als Menge größeres ist endlich. Dies zeigt einen weiteren Aspekt der Definition von Dedekind. Ob etwas endlich erscheint, hängt von den Beziehungen ab, die betrachtet werden.

4. Man hätte auch den dualen Begriff nehmen können etwa

   Definition 4. Ein Objekt A in einer Kategorie heißt kounendlich, wenn es einen Epimorphismus $f : A \to A$ gibt, der kein Monomorphismus ist. Man könnte vielleicht vernünftiger *epiunendlich* sagen. Dabei heißt ein Morphismus f Epimorphismus, wenn für alle Morphimen α, β mit $\alpha \circ f = \beta \circ f$ auch $\alpha = \beta$ ist.

[11] In diesem Sinne ist auch jeder unzerlegbare injektive Modul endlich.

Satz 2.29. *In der Kategorie der Mengen ist eine Menge genau dann unendlich, wenn sie kounendlich ist.*

Sei E eine unendliche Menge und $E \xrightarrow{f} E$ eine injektive nicht surjektive Abbildung. Es gibt ein $g : E \to E$ mit $gf = 1_E$. Es ist g surjektiv. Wäre g auch injektiv, so wäre g umkehrbar und $f = g^{-1}$. Dem widerspricht, dass f nicht surjektiv ist. Also ist E kounendlich.

Ist umgekehrt E kounendlich und $f : E \to E$ eine surjektive nicht injektive Funktion. Dann gibt es ein $g : E \to E$ mit $fg = 1_E$.[12] g ist sicher injektiv. Wäre g auch surjektiv, so wäre g umkehrbar und wieder $f = g^{-1}$. Dem widerspricht, dass f nicht injektiv ist. Also ist E unendlich. □

2.2.5 Zyklische Muster

Satz 2.30. *Seien A, B Ω- Muster. Es sind äquivalent:*

1. *Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $f \in Mor(A, B)$ und ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.*
2. *Es gibt eine Indexmenge I und einen Epimorphismus $f : A^{(I)} \to B$. Dabei ist $A^{(I)}$ die elementfremde Vereinigung der $(A, i \in I)$.*

1. $\Longrightarrow$2. Zu jedem $b \in B$ gibt es einen Morphismus f_b und ein $a_b \in A$ mit $f_b(a_b) = b$. ZU der Familie der $(f_b | b \in B)$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : A^{(B)} \to B$ mit $f \circ q_b = f_b$. Dabei sind $(q_b | b \in B)$ die natürlichen Inklusionen. Es folgt $f(q_b(b)) = f_b(b) = b$.[13]
2. $\Longrightarrow$1. Es gebe eine Indexmenge I und einen Epimorphismus $f\colon A^{(I)} \to B$. Ist $b \in B$, so gibt es ein $(a_i) \in A^{(I)}$ mit $f((a_i)) = b$. Da $A^{(I)}$ die elementfreme Vereinigung ist, gibt es ein $i \in I$ mit $(a_i) = q_i(a)$. Daher ist $f \circ q_i(a) = b$. □

Definition 13 Ein Ω- Muster B wird von A generiert, wenn eine der Eigenschaften des Satzes auf B zutrifft. □

Satz 2.31. *Zu jedem Muster B gibt es ein größtes Untermuster $S(A, B)$, welches von A generiert ist.*

Es ist $S(A, B) := \bigcup_{f \in [A,B]} f(A)$.
Im weiteren will ich Muster, die von einem Element erzeugt sind genauer untersuchen.

Satz 2.32. 1. *Für alle $A, B \in_\Omega \overset{\frown}{\mathbf{S}}$ ist $S(A, B)$ abgeschlossen in B. Dabei bezeichne ${}_\Omega\overset{\frown}{\mathbf{S}}$ die Kategorie der Ω-Muster.*

2. *Die Zuordnung:*
   - $\overset{\frown}{\mathbf{S}} \ni B \mapsto S(A, B) \in \overset{\frown}{\mathbf{S}}$,
   - $[B, C] \ni h \mapsto S(A, h) \in [S(A, B), S(A, C)]$

[12] Beim Beweis dieser Tatsache ist das Auswahlaxiom notwendig.
[13] Hierbei wird das Auswahlaxiom gebraucht.

ist ein kovarianter Funktor.

Definition 14 Ein Ω-Muster heißt zyklisch, wenn es von einem Element erzeugt ist. Ein von einem Element erzeugtes Ω-Muster $A = [o]$ heißt ein Selbstgenerator, wenn es zu jedem $a \in A$ einen Morphismus $f\colon A \to A$ gibt mit $f(o) = a$. □

Beispiele:

26. $(\mathbb{N}, 1+)$ ist Selbstgenerator.
27. Jeder Kreis ist Selbstgenerator.

Satz 2.33. *Operiert Ω auf A kommutativ und ist A von einem Element o erzeugt, so ist $A = [o]$ ein Selbstgenerator.*

Sei

$$T := \{a | a \in A \text{ es gibt einen Morphismus } f\colon A \to A \text{ mit } f(o) = a\}$$

Es ist $o \in T$. Sei $a \in T$ und $\alpha \in \Omega$. Es ist $\alpha \cdot f$ ein Morphismus. Un es ist $(\alpha \cdot f)(o) = \alpha \cdot f(o) = \alpha \cdot a$. Also ist T abgeschlossen gegenüber Ω. Daher ist $T = \Omega$.

Folgerung 2.34. *Jede zyklische Kette ist ein Selbstgenerator.*

In diesem Fall operiert Ω kommutativ auf der Kette. □

Beispiele:

28. Im nicht kommutativen Fall gilt die Behauptung des Satzes 2.33 keineswegs. Wir betrachten dazu $A = \{0, 1\}$ mit den beiden konstanten Abbildungen $\alpha(x) = 0$ und $\beta(x) = 1$. Dann ist der einzige Morphismus $f\colon A \to A$ die Identität. Daher gibt es keinen Morphismus f mit $f(0) = 1$

Ist $[A] = [o]$ ein Selbstgenerator, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $\Phi(a)\colon A \to A$ mit $\Phi(o) = a$. Wir erklären auf A eine Verknüpfung:

$$a \circ b := \Phi(a)(b) \tag{2.1}$$

Satz 2.35. *Für diese Verknüpfung gilt:*

1. $\Phi(o) = Id$.
2. $o \circ a = a \circ o = a$ *für alle* $a \in A$.
3. *Das Assoziativgesetz:* $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ *für alle* $a, b, c \in A$.

Zu 1. Dies ist klar.
Zu 2. Es ist $o \circ a = \Phi(o)(a) = Id(a) = a = \Phi(a)(o) = a$
Zu 3.: Wir betrachten die beiden Abbildungen:

$$F\colon A \ni c \mapsto (a \circ b) \circ c \in A$$
$$G\colon A \ni c \mapsto a \circ (b \circ c) \in A$$

sind Morphismus, wei man sic überlegt. Da $F(o) = G(a) = a \circ b$ ist folgt die Behauptung.

Folgerung 2.36. $\mathbb{N}$ *zusammen mit der obigen Verknüpfung ist ein Monoid.*

Satz 2.37. *Wirkt* Ω *auf* $[o]$ *kommutativ, so ist* $([o], \circ)$ *ein kommutativer Monoid*

Wirkt ω kommutativ auf $[o]$, so ist für alle $b \in A$ die Abbildung $\alpha \cdot \Phi(b)$ ein Morphismus. Für $\alpha in \Omega$ ist $\Phi(\alpha b)$ sowieso ein Morphismus. Es ist $\alpha \cdot \Phi(b)(o) = \alpha \cdot b$ und $\Phi(\alpha \cdot b)(0) = \alpha \cdot b$. Also ist $\alpha \Phi(b) = \Phi(\alpha \cdot b)$.
Wir betrachten nun wieder zwei Abbildungen zu $a \in A$

$$F : A \ni b \mapsto a \circ b \in A$$
$$G : A \ni b \mapsto b \circ a \in A$$

Die erste Abbildung ist nach Defnition ein Morphismus. Es ist $G(\alpha b) = (\alpha b) \circ a = \Phi(\alpha b)(a) = \alpha \cdot (\Phi(b)(a)) = \alpha G(b)$. Weiter ist $G(o) = o \circ a = a \circ o = F(o) = a$. Daher sind die beiden Morphismen gleich. □

Folgerung 2.38. *Es ist* $\mathbb{N}$ *zusammen mit obiger Verknüpfung ein kommutativer Monois.*

In Zukunft scheiben wir für diese Verküpfung $a + b$.

Zyklische freie Muster

> „Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppenverstandes entsprechenden Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschuung von vorneherein einleuchtend und gewiß erscheinen“ (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite IV)

Satz 2.39. *Ist* $A = [o]$ *ein freies zyklisches* Ω*-Muster, so ist* A *ein Selbstgenerator.*

Sie $a \in A$. Da $\{o\}$ eine Basis von A ist, gibt es zu der Abbildung $o \mapsto a$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon A \to A$ mit $f(a) = a$ □

Satz 2.40. *Ist $A = [o]$ ein Selbstgenerator und B eine weitere Kette mit $B = S(A, B)$, dann gibt es zu jedem $b \in B$ genau einen Morphismus $h\colon A \to B$ mit $h(o) = b$*

Sei $b \in B = S(A, B)$. Es gibt ein $f\colon A \to B$ und ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Zu dem a gibt es ein $g\colon A \to A$ mit $g(o) = a$. Wir erhalten: $fg(o) = b$. Mit $h := fg$ ergibt sich die Behauptung. □

Satz 2.41. *Erzeugt E das Muster A und ist $f\colon A \to B$ ein Morphismus, so erzeugt $f(E)$ das Muster $f(A)$.*

Es ist $E \subset A$. Also ist $[f(E)] \subset f(A)$, da A abgeschlossen. Sei

$$T = \{a | a \in A \text{ mit } f(a) \in [f(E)]\}$$

Es ist $E \subset T$. Ist $\alpha in \Omega$ und $a \in T$, so eribt sich: $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) \in [f(E)]$. Daher ist T abgeschlossen. Also ist $T = A$.

Satz 2.42. *Ist A ein freies zyklisches Ω Muster, so ist jeder Morphismus $f\colon A \to A$ injektiv.*

Sei $A = [o]$ und $f\colon A \to A$ ein Morphismus.

$$T = \{a | f(a) \neq f(b) \text{ für alle } b \in A \text{ mit } a \neq b\}$$

Es ist $o \in T$: Sei $f(o) = f(b)$. Wäre $b \neq o$, so gäbe es ein $\alpha \in \Omega$ und ein $b' \in A$ mit $b = \alpha \cdot b'$. Das hieße $f(o) = f(b) = f(\alpha \cdot b') = \alpha \cdot f(b') \in \Omega \cdot f([o]) = \Omega \cdot [f(o)]$. Das geht nicht wegen Satz 2.2.
Sei $a \in T$. Zu zeigen ist: Es gibt kein $b \in A$ mit $f(b) = f(\alpha \cdot a)$ und $b \neq \alpha \cdot a$.
Angenommen es gäbe ein solches $b \in A$. Also $f(\alpha \cdot a) = f(b)$. $b = o$ ist unmöglich. Denn dann wäre $f(o) = f(\alpha \cdot a)$ und $\alpha \cdot a \neq o$. Also ist $b \in \Omega \cdot [o]$. Also gibt es ein $b' \in [o]$ und ein $\beta \in \Omega$ mit $b = \beta \cdot b'$. Es folgt:

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot a) &= f(b) = f(\beta \cdot b') \\ \alpha \cdot f(a) &= \beta \cdot f(b') \end{aligned}$$

Daher ist $\alpha = \beta$ und $f(a) = f(b')$, weil $[o]$ eine freies Ω-Muster ist. Da $f(a) = f(b')$ und $a \in T$ ist, folgt $a = b'$ und also $b = \alpha \cdot a$. Dies widerspricht der Annahme über b. Also ist $f\colon [o] \to [o]$ injektiv. □

Jedes zyklische Untermuster von A ist also eine genaue Kopie von A. Dies wird uns noch häufiger begegnen.
Es ist für das Verständnis hilfreich, wennn man A als Menge von Strings interpretiert, die mit einer Menge von Buchstaben aus dem leeren String " erzeugt werden. Ist dann f ein Morphismus $f\colon A \to A$, so ist $f('') = w$ ein Wort. Die Zuordnung $A \ni v \mapsto vw \in A$ ist dann ein Morphismus. Dies ist der Morphismus f und er ist sicher injektiv.

Satz 2.43. *Sei $N = [o]$ eine zyklisches freies Muster mit dem erzeugenden Element o. Ist A ein beliebiges Ω- Muster, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $\Phi(A)(a)\colon N \to A$ mit $\Phi(A)(a) = a$. Die Zuordnung*

$$\Phi(A)\colon A \ni a \mapsto \Phi(A)(a) \in [N, A]$$

ist ein funktorieller Isomorphismus.

Sei $h\colon A \to B$ ein Morphismus von Ω- Mustern. Das heißt für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $a \in A$ ist $h(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot h(a)$. Betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Phi(B)"'] & B \arrow[d, "\Phi(B)"] \\ {[N, A]} \arrow[r, "{[N,h]}"'] & {[N, B} \end{tikzcd}$$

Sei $a \in A$, so ist $\Phi(B)(h(a))$ der einzige Morphismus $g\colon N \to B$ mit $g(o) = h(a)$. Es ist $([N, h] \circ \Phi(A))(a) = h \circ \Phi(A)(a)$ ein Morphismus. Und es ist $(h \circ \Phi(A)(a))(o) = h(\Phi(A)(a)(o)) = h(a)$ für alle $a \in A$. Daher ist $([N, h] \circ \Phi(A)) = (\Phi(B)) \circ h$. Das Diagramm ist daher kommutativ. □

Folgerung 2.44. *Sei $f\colon A \to B$ ein Monomorphismus in der Kategorie der Ω- Muster, so ist f eine injektive Abbildung.*

Satz 2.45. *Wirkt Ω kommutativ auf $[o] = A$, und B, und ist B von A erzeugt, so ist die Zuordnung $\Phi(B)\colon B \ni B \mapsto \Phi(b) \in [A, B]$ sogar ein Morphismus.*

Dabei Ist $[A, B]$ in folgendem Sine ein Ω Muster. Es ist $\alpha \cdot f$ der Morphismus $A \ni a \mapsto f(\alpha \cdot a)$. Man rechnet leicht nach, dass dies wirklich unter den Vorausetzungen ein Morphismus ist. Sei $a \in A$ und $\alpha \in \Omega$ Dann ist $\Phi(\alpha \cdot b)(0) = \alpha \cdot b$. Auch $(\alpha \cdot \Phi(b))(0) = \alpha \cdot b$. Also ist $\Phi(\alpha \cdot b) = \alpha\Phi(b)$. Daher folgt de Behhauptung. □

Folgerung 2.46. *Wirkt Ω kommutativ auf $A = [o]$, so ist $A \cong [A, A]$. Insbesondere ist $[A, A]$ zyklisch von der Identität erzeugt. Jedes Element aus $[A, A]$ lässt sich als Produkt von Elementen aus Ω schreiben.*

Sei $f\colon A \to A$ ein Morphismus. Dann ist $f = \Phi(a)$ für ein $a \in A = [o]$. Es ist $a = s \cdot o$ für ein Produkt s aus Elementen von Ω. Daher ist $f = \Phi(s \cdot o) = s \cdot \Phi(o) = s \cdot Id$ □

Satz 2.47. *Wirkt Ω kommutativ auf $[o]$, so sind für einen Morphismus $f\colon A \to A$ äquivalent:*

1. *f ist surjektiv.*
2. *o ist in der Bildmenge von f enthalten.*

3. f ist bijektiv.

1. $\Longrightarrow$2. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = o$.
2. $\Longrightarrow$3. Wegen Folgerung 2.46 gibt es ein Produkt s von Elementen aus Ω mit $f(x) = s \cdot x$ für alle $x \in A$. Außerdem gibt es ein s' mit $s' \cdot o = a$. Daher ist $s \cdot s' \cdot o = o$. Daher ist $s \cdot s' = Id$. Dies ist richtig, da die Identität der einzige Morphismus ist, der o auf o abbldet. Daher ist s invertierbar. Damit ist f bijektiv. □

Ist $[o]$ ein freies Ω Muster, das von o erzeugt ist, so erklärt man auf $A = [o]$ folgendermaßen eine Verknüpfung: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $\Phi(a)\colon A \to A$ mit $\Phi(a)(o) = a$. Wir definieren:

$$a \circ b := \Phi(a)(b) \tag{2.2}$$

Satz 2.48. *Für diese Verknüpfung gilt:*

1. *Für alle $a, b, c \in A$ gilt: Ist $a \circ c = b \circ c$, so ist $a = b$. Es ist A auf der rechten Seite kürzbar.*

2. *Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \circ b = a \circ c$, dann ist $b = c$. Es ist A links kürzbar.*

Zu 4. Ist $a \circ o = a' \circ o$, so ist $a = a'$, wegen Teil 1 des Satzes.
Sei

$$T = \{b | a \circ b = a' \circ b \Longrightarrow a = a' \text{ für alle } a, a'\}$$

Sei $b \in T$ und $\alpha \in \Omega$.
Weiter sei $a \circ (\alpha \cdot b) = a' \circ (\alpha \cdot b)$. Also ist $\Phi(a)(\alpha \cdot b) = \Phi(a')(\alpha \cdot b)$. Da $\Phi(a)$ und $\Phi(a')$ beides Morphismen sind folgt: $\alpha \cdot (\Phi(a)(b)) = \alpha \cdot \Phi(a')(b)$. Also ist $\Phi(a)(b) = \Phi(a')(b)$. Daher ist $a = a'$. Es folgt $T = [o]$.
Zu 5. Dies liegt daran, dass alle Morphismen $[o] \to [o]$ injektiv sind. □

Folgerung 2.49. *Sei $[o]$ ein freies zyklisches Ω Muster. Dann wird $[o]$ durch die Definition 2.2 zu einem regulären Monoid.*

Satz 2.50. *Wirkt Ω kommutativ auf $[o]$, so ist der reguläre Monoid auch kommutativ. In diesem Fall schreiben wir für $a + b := a \circ b$. Insbesondere ist $(\mathbb{N}, 1+)$ ein regulärer kommutativer Monoid. Wir bezeichnen das Neutralelement mit 0.*

Aufgaben:

6. Sei $A = (\mathbb{N}, 1+)$
   a) Jeder Morphismus $f\colon A \to A$ ist injektiv. Zeige dies direkt.

b) Der einzige surjektive Morphismus $A \to A$ ist die Identität. Betrachtet man die Definition von unendlich von Dedekind, so ist A auch noch unendlich, wenn man als Abildungen $A \to A$ nur die Morphismen zulässt. Aber dann ist A epiendlich.

c) Zeige: Jede abgeschlossene Teilmenge von A ist zyklisch.

d) Sei (A, α) eine zyklische Kette und $f\colon (\mathbb{N}, 1+)$ ein Morphismus. Muss f injektiv sein?

7. a) Wieviel Morphismen gin es von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

8. Sei $A = (\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha(n) = n + 1$ und $\beta(n) = n + 2$. (Siehe Beispiel 6)

   a) Zeige: Es gibt keinen Morphismus $f\colon A \to (\mathbb{N}, 1+)$.

   b) Zeige: Jeder Morphismus $f\colon A \to A$ ist injektiv.

   c) Welche Morphismen $A \to A$ sind surjektiv?

   d) Ist jede abgeschlossene Teilmenge von A zyklisch?

9. a) Zeige: Die Kette $0 \longrightarrow 1 \circlearrowleft$ erzeugt jede Kette (A, α) mit $\alpha^2 = \alpha$.

   b) Finde eine Kette, die jede Kette mit $\alpha^n = Id$ erzeugt mit festem $n \in \mathbb{N}$.

   c) Finde eine Kette, die jede Kette mit $\alpha^5 = \alpha^2$ erzeugt.

   d) $n < m$ ist gegeben. Finde eine Kette, die jede Kette mit $\alpha^n = \alpha^m$ erzeugt.

   e) Zeige das Muster aus dem Beispiel 6 erzeugt jedes Muster (A, α, β) mit $\alpha^2 = \beta$.

   f) Finde eine möglichst einfachen Generator aller Muster (A, α, β) mit $\alpha^2 = \beta$ und $\alpha^7 = \alpha^6$.

10. Untersuche den Zusammenhang zwischen Zahnrädern, Uhren und Morphismen.

11. Nehmen wir an, zwei Zahnräder seien gekoppelt derart, das wenn sich das eine um einen Zahn weiter dreht, das andere um einen Zahn weiter dreht. Beispiel: Eins mit 5 Zähnen das andere mit 3 Zähnen. Es wird ausgegangen von dem Zustand $(0, 0)$. $(0, 0) \to (1, 1) \to (2, 2) \to (0, 3) \to (1, 4) \to (2, 0) \to (0, 0)$. Ist die Welt eine Uhr. Dies ist die Auffassun von Laplace.

Ein Beispiel Ein Beispiel soll genauer untersucht werden. Es sei $\Omega = \{0, 1\}$. Es hat Ω zwei Elemente. Weiter sei (A, α, β) ein Ω-Muster auf dem Ω kommutativ wirkt. Außerdem sei $\alpha^3 = \beta^2$.

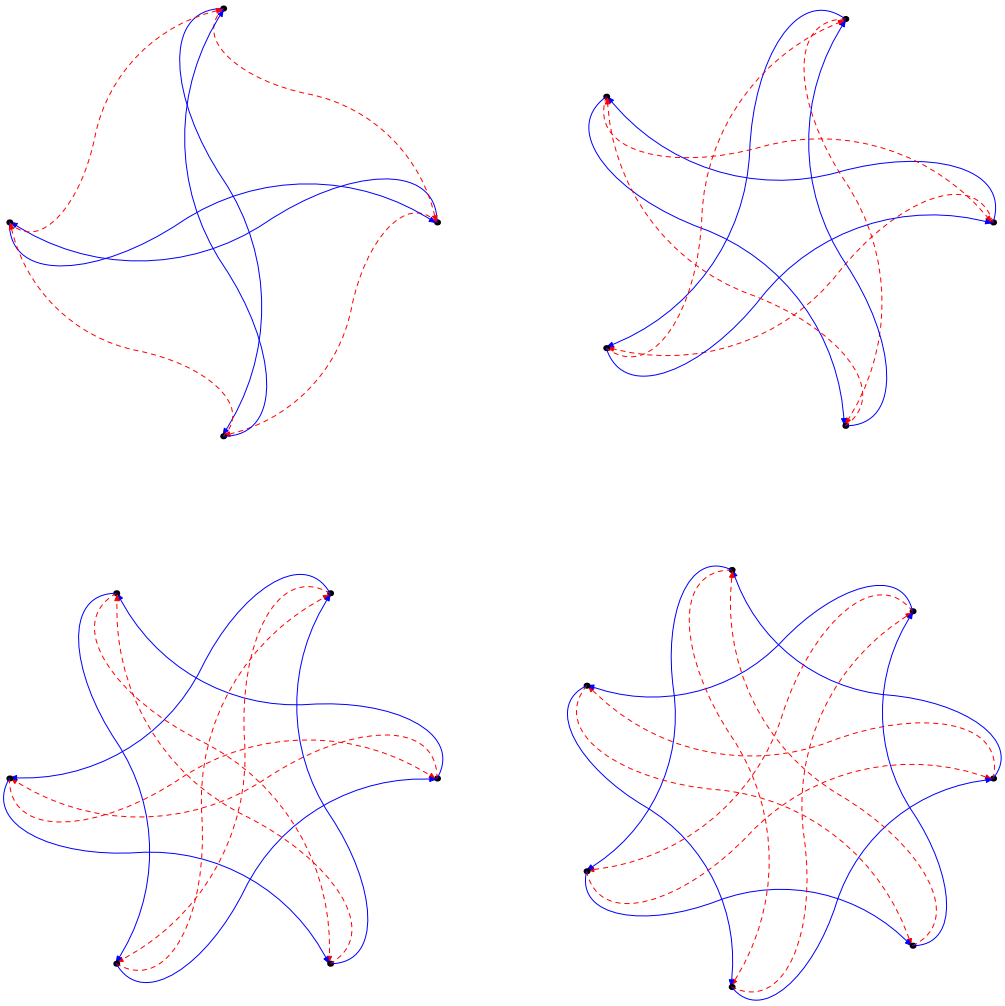


Abb. 2.8: In den vier Zeichnungen entspricht den blauen Pfeilen α und den Roten Pfeilen β. Es ist $\alpha^3 = \beta^2$

Lemma 1 *Sind $\alpha, \beta \colon A \to A$ zwei miteinander kommutierende Abbildungen mit $\alpha^3 = \beta^2$, so gilt: Sind $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ mit $2m + 3n = 2m' + 3n'$, so ist $\alpha^m \beta^n = \alpha^{m'} \beta^{n'}$* □

Es sei $2m + 3n = 2m' + 3n'$. Ist $m = m'$, so ist $n = n'$ und man ist fertig. Andernfalls ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m > m'$. Es folgt $2(m - m') = 3(n' - n)$. Da $2, 3$ teilerfremd sind, ist $m - m' = 3k$ und $n' - n = 2l$ für natürliche Zahlen k, l. Es folgt: $m' = m - 3k$ und $n' = n + 2l$. Daher ist $2m + 3n = 2(m - 3k) + 3(n + 2l) = 2m - 6l + 3n + 6l$ Es folgt $0 = 6 \cdot (l - k)$. Daher ist $l = k$. Damit folgt $m' = m - 3l$ und $n' = n + 2l$. Es ergibt sich: $\alpha^{m'} \beta^{n'} = \alpha^{m-3l} \beta^{n+2l} = \alpha^{m-3l} \cdot \beta^{2l} \cdot \beta^n = \alpha^{m-3l} \cdot \alpha^{3l} \cdot \beta^n = \alpha^m \cdot \beta^n$. □

Fragen:

1. Gibt es eine Menge A mit zwei Selbstabbildungen α, β und $\alpha^3 = \beta^2$, bei denen α und β nicht kommutieren.

Satz 2.51. *Sei (A, α, β) mit $\alpha\beta = \beta\alpha$ und $\alpha^3 = \beta^2$. Weiter sei $[0]$ das von 0 erzeugte Untermuster von $(\mathbb{N}, 2+, 3+)$. Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $f\colon [0] \to A$ mit $f(0) = a$.*

Jedes $x \in [0]$ lässt sich schreiben: $x = 2 \cdot m + 3 \cdot n$. Die Zuordnung $f(x) = \alpha^m \cdot \beta^n \cdot a$ ist wegen Lemma 1 eine Funktion. Sie ist aber auch ein Morphismus. Denn $f(x+2) = f(2 \cdot (m+1) + n) = \alpha^{m+1} \cdot \beta^n \cdot a = \alpha \cdot f(x)$. Analog ist $f(x+3) = f(2m + 3(n+1)) = \alpha^m \cdot \beta^{n+1} \cdot a = \beta \cdot f(x)$. Hier wird auch benutzt, dass α, β kommutieren. Die Eindeutigkeit ist klar. □

Es ist daher $[0]$ ein freies Objekt in der Kategorie (A, α, β), wobei α, β kommutieren und $\alpha^3 = \beta^2$.
Aufgaben:

12. a) Zeige: Alle Muster der Abbildung erfüllen $\alpha^3 = \beta^2$ und sind kommutative Muster.
    b) Alle Muster der Abbildung 2.8 sind einfach. Das heißt von jedem Knoten ist jeder andere Knoten erreichbar.

Verknüpfung und Ordnung In Satz 1.8 haben wir gesehen, dass jedes freie Muster halbgeordnet und fundiert ist. Dabei war erklärt $a < b \iff [b] \subsetneq [a]$.

Satz 2.52. *Sei $\{o\}$ die Basis des freien Ω- Musters A. Jeder Morphismus $f\colon A \to A$ ist streng monoton.*

Es sei $a < b$. Dann ist $[b] \subsetneq [a]$. Es ist $[f(b)] = f([b]) \subset f([a]) = [f(a)]$. Wäre $f(a) = f(b)$, so wäre wegen Satz 2.42 $a = b$. Das widerspricht der Voraussetzung $a < b$. □

Folgerung 2.53. *In dem freien Muster $[o]$ sei $b < c$. Dann ist für alle $a \in [o]$ auch $a \circ b < a \circ c$.*

Es ist $a \circ b = \Phi(a)(b)$. Es ist $\Phi(a)$ ein Morphismus. Daher folgt die Behauptung. □

Verknüpft man mit a von links, so ist diese Funktion daher streng monoton. Auf der anderen Seite gilt diese Behauptung nicht. Beispiel: Betrachte $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha(n) = 2n+1$ und $\beta(n) = 2n+2$. Es ist $0 < 1$. Es ist $0 \circ 2 = 2$ und $1 \circ 2 = \Phi(1)(2) = \beta(\Phi(1)(0)) = \beta(1) = 4$. Aber $4 \notin [2]$. Daher ist $4 \not< 2$ in $(\mathbb{N}, \alpha, \beta)$

Folgerung 2.54. *In $(\mathbb{N}, +)$ gilt: Sind b, c beliebig mit $b < c$, so ist für beliebige $a \in \mathbb{N}$: $a + b < a + c$. Die Ungleichheit ist veträglich mit der Addition.*

2.3 Sechsecke

2.3.1 Bierdeckel

Du hast einen Bierdeckel mit Mittelpunkt oder einen Zirkel mit fester Öffnung. Das heißt Du kannst einen Kreis mit festem Radius zeichnen und den Mittelpunkt des Kreises

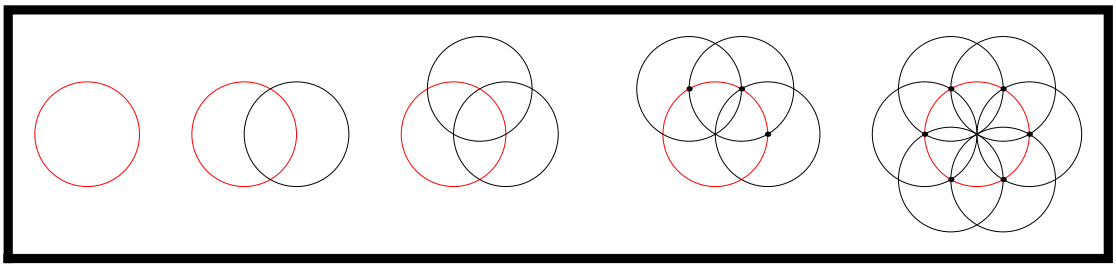


Abb. 2.9: Die Entstehung des regulären Sechsecks

markieren. Welche Zeichnungen sind nur mit dieser Grundausstattung möglich? Wir zeichnen einen Kreis um M mit dem gegebenen Radius r. Auf der Kreislinie wählen wir einen Punkt 0. Um ihn wird wieder ein ein Kreis mit Radius r gezeichnet. Er hat mit dem ursprünglichen Kreis $K(M, r)$ zwei Schnittpunkte. Wir wählen den Schnittpunkt im Gegenuhrzeigersinn und nennen ihn B. Um B zeichnen wir wieder einen Kreis $K(B, r)$ und wählen wieder den Punkt im Gegenuhrzeigersinn. nenn ihn C. Dies wiederholen wir. Erstaunlicherweise ergibt sich ab F kein neuer Schnittpunkt mehr. Der Kreis der Schöpfung schließt sich. Es ergibt sich folgende Figur:

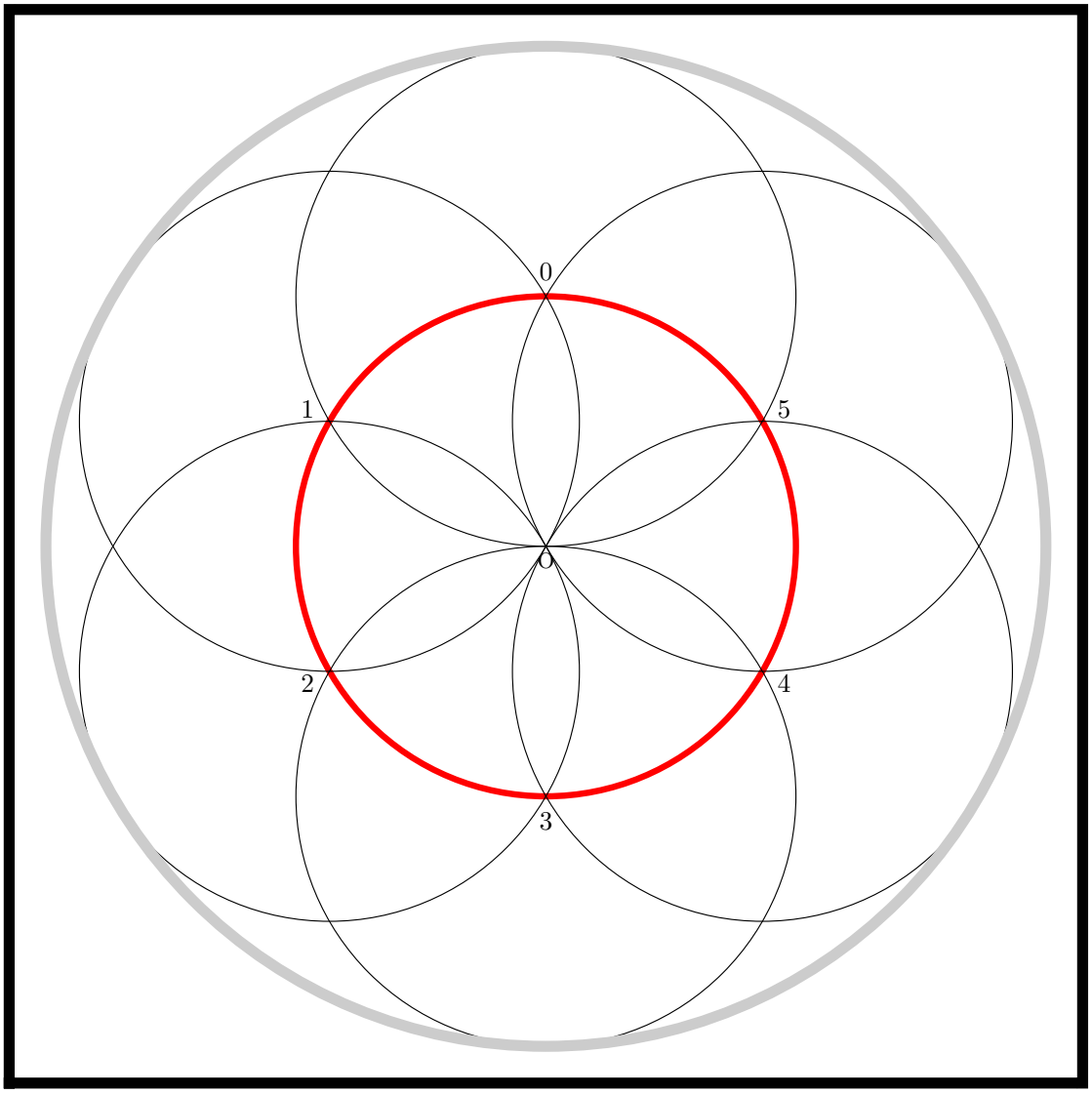


Abb. 2.10: Der Sechseckstern. In der Bibel und im Koran ist dies ein Symbol der Schöpfung in sechs Tagen.

Diese Figur wird auch manchmal Blume des Lebens genannt. Sie hat auch etwas esoterisches. Auf jeden Fall hat sie die nachdenklichen Menschen stets fasziniert. Mit dieser Figur kann wunderbar gespielt werden. Beispielsweise kann der innere Stern farbig gemalt werden.

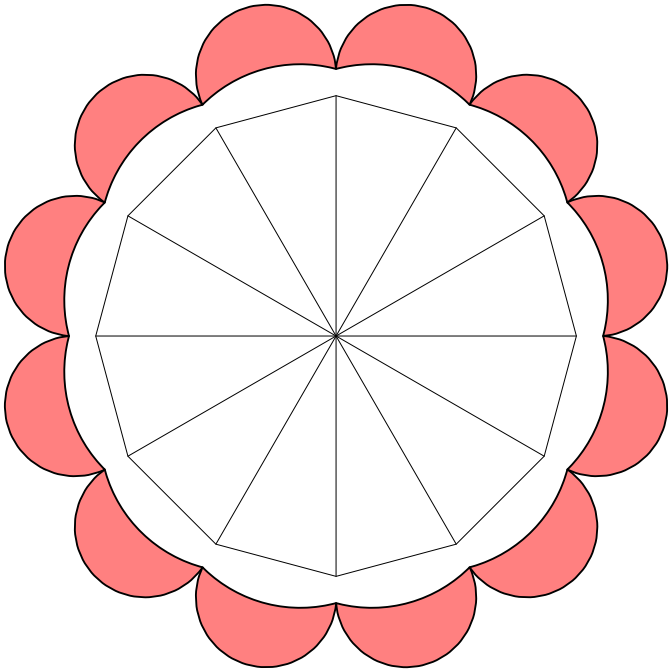


Abb. 2.11: Ein Mühlrad

`https://www.wikibooks.org` Die folgenden Bilder stammen von der Webseite `https://nakgeo.com/shop/old-world-geometry/`
Die Funktion von Zahnrädern ist hier sehr schön veranschaulicht: `https://www.geogebra.org/m/UHCgtRJz`

Literatur

Augustinus, Aurelius. *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*. München: DTV, 1978.

Bourbaki, Nicolas. *Algebra I Chapters 1-3*. Springer, 1989.

Dedekind, Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen*. Vieweg, 1965.

Deiser, Oliver. *Einführung in die Mengenlehre*. 2. Berlin Heidelberg: Springer, 2004.

Ebbinghaus und al. *Zahlen*. Springer, 1992.

Heine, Heinrich. *Heine Werke*. München: Emil Vollmer Verlag, 1970.

Herbert Meschkowski, Winfried Nilson, Hrsg. *Georg Cantor Briefe*. Springer, 1991.

Lawvere, F. William und Stephen H.Schanuel. *Conceptual Mathematics, A first introduction to categories*. Cambridge Univerty Press, 1997.

Roman Sexl, Herbert Schmidt. *Raum-Zeit-Relativität*. Vieweg, 1979.

Rucker, Rudy. *Die Ufer der Unendlichkeit*. Frankfurt am Main: Wolfgang Krüger Verlag, 1989.