Geometrie der siebten Klasse

Andreas Bartholomé [1]
Schirmgasse 275
84028 Landshut

28. November 2003

[1] email:andreas.bartholome@t-online.de

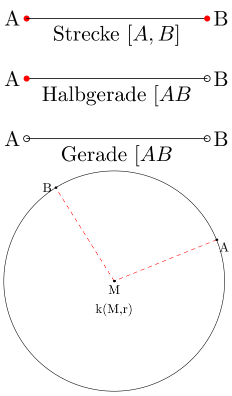
Kapitel 1

Konstruktion von Dreiecken

Salv. ... Zu besserem Verständnis wollen wir Papier und Feder benutzen, die ich für solche Gelegenheiten hier schon bereit sehe, und eine kleine Zeichnung entwerfen. Wir markieren zunächst zwei Punkte A und B; verbinde ich diesselben einmal durch die krummen Linien ACB und ADB, dann durch die Gerade AB, so frage ich Euch, welche der Lienien nach Eurerer Meinung die Entfernung zwischen den Endpunkten A und B bestimmt und weshalb?

Sagr. Nach meiner Meinung die gerade Linie und nicht die krummen, teils weil sie kürzeste ist, teils weil sie die einzige in ihrer Art, während es von den anderen unzählige gibt,... [Gal82, Seite 12]

1.1 Der Grundsatz SSS

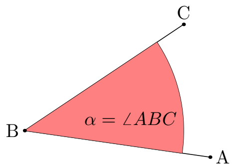


Ob Adam seinen Garten Eden geometrisch anlegte, wissen wir nicht. Pflanzte er seine Apfelbäume in gerader Linie an? Wußte er überhaupt, was eine Gerade ist? Wissen wir es? Wir können einiges dazu sagen. Leuchtest du mit einem Laserpointer von A nach B, so ergibt der Lichtstrahl eine halbe Gerade. Spannen Max und Moritz ein Seil, so bildet das gespannte Seil ungefähr ein Teilstück einer geraden. Max und Moritz müssen sehr kräftig sein. Unser Hilfsmittel zum Zeichnen solcher Geradenstücke ist das Geodreieck. Mit ihm können zwei Punkte des Zeichenblattes der Ebene durch eine Strecke verbunden werden. Außerdem können wir mit dem Geodreieck die Länge der Strecke $[AB]$ messen. Die Länge von $[AB]$ bezeichnen wir mit $\overline{AB}$. Denken wir uns eine Strecke über einen Randpunkt hinaus ins „Unendliche " verlängert, so entsteht vor unserem geistigen Auge eine Halbgerade. Sie hat einen Anfang und kein Ende. Verlängern wir die Strecke über beide Randpunkte hinaus, so stellen wir uns eine Gerade vor. Zu zwei Punkten einer Ebene gibt es genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält. Zu jeder Geraden g der Ebene **E** gibt es mindestens einen Punkt P, welcher nicht auf g liegt. Mit dem Zirkel konstruieren wir Kreise. Alle Punkte der Kreislinie haben vom Mittelpunkt den gleichen Abstand. Wir werden die Kreislinie folgendermaßen abkürzen. $k(M, r) = \{P|\overline{PM} = r\}$. Die Punkte außerhalb des Kreises sind von M weiter entfernt als r. fassen wir die Bezeichnungen nochmal zusammen:

1. Die Strecke $[AB]$.

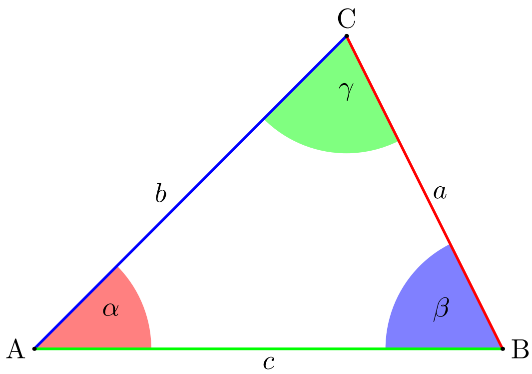
2. Die Halbgerade $[AB$.

3. Die Gerade AB.
4. Die Streckenlänge $\overline{AB}$.
5. $k(M, r) = \{P|\overline{MP} = r\} ==$ Kreislinie um M mit Radius r.



Die Streckenlänge $\overline{AB}$ ist etwas anderes, als die Strecke $[AB]$. Sie ist eine Zahl und keine Punktmenge. Mit dem Geodreieck kannst du Winkel ausmessen und übertragen. Die Winkel werden von uns in Zukunft mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, oder folgendermaßen $\sphericalangle ABC = \alpha$. Dabei ist ein Paar Halbgeraden gemeint: $([BA, [BC)$. Der Punkt B von dem die Halbgeraden ausgehen heißt Scheitel des Winkels. In der Bezeichnung $\sphericalangle ABC$ steht der Scheitel stets in der Mitte.

Im Dreieck führen wir folgende Einheitsbezeichnung ein.



1. Grundaufgabe: Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Dreieck, von dem die Seitenlängen a, b, c gegeben sind. Zum Beispiel sei $a = 6,5$cm , $b = 9$cm und $c = 7$cm.
Der Lösungsgang einer Konstruktion gliedert sich in Zukunft stets in die folgenden Schritte.

1. *Planfigur:* Es wird ein allgemeines Dreieck gezeichnet, in das die gegebenen Stücke eingetragen werden. Das Dreieck hat keineswegs schon die gewünschten Maße. „Allgemein“ bedeutet: Die Planfigur enthält keine Regelmäßigkeiten, von denen in der Aufgabe nicht geredet wird.
2. *Analysis: (Plan)* Wir tun hier so, als ob wir eine Lösung hätten und untersuchen die gegenseitige Lage der Punkte.
   (a) A, B sind Endpunkte der Strecke c.
   (b) $C \in k(A, b) \cap k(b, a)$.
3. *Konstruktion:* Schließlich wird die Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchgeführt.

In unserem Fall siehst du bei der Konstruktion, dass die beiden Kreise $k(A, b)$ und $k(B, a)$ zwei Schnittpunkte C und C' haben. Die Dreiecke unterscheiden sich aber in keinem Bestimmungsstück. Insbesondere sind die entsprechenden Winkel gleich groß.

Definition 1.1.1 *Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ heißen kongruent, wenn $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$ sind. Dreiecke sind also kongruent, wenn die entsprechenden Seiten gleich groß sind. In Zeichen $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Axiom 1.1 (SSS) *Sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent, so ist $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$. In kongruenten Dreiecken sind die entsprechenden Winkel gleich groß.*

1. Grundkonstruktion: Ein gegebener Winkel mit dem Scheitel S soll an eine gegebene Gerade i im Punkt D angetragen werden.
Lösung:(Konstruktionsbeschreibung:)

1. Zeichne $k(S,r)$ mit beliebigem r. Die Schnittpunkte mit den Schenkeln seien B und C.

2. Zeichne $k(D,r)$. Dieser Kreis hat mit i einen Schnittpunkt B'.

3. Zeichne $k(B',\overline{BC})$. Sei $C' \in k(B',\overline{BC}) \cap k(D,r)$. Dann ist $\triangle C'DB' \cong \triangle CSB$. Also ist $\sphericalangle CSB = \sphericalangle C'DB'$.

Aufgaben:

1. Gegeben sind zwei Punkte A, B mit Abstand $7cm$.
   (a) Konstruiere die Punkte, die von A genau 5cm entfernt sind und zugleich von B genau 4cm entfernt sind.
   (b) Welche Punkte sind näher als 5cm an A und zugleich näher als 4cm von B. (Farbige Schraffur. Neue Zeichnung).
   (c) Welche Punkte sind weiter als 5cm von A weg und zugleich näher als 4cm an B. (Farbige Schraffur. Neue Zeichnung).

2. Gegeben sind zwei Punkte A, B mit dem Abstand $\overline{AB} = 4cm$.
   (a) Konstruiere mindestens 10 verschiedene Punkte P mit $\overline{AP} + \overline{PB} = 6$ cm.
   (b) Konstruiere mindestens 10 verschiedene Punkte P mit $\overline{AP} - \overline{PB} = 2$ cm.

3. Konstruiere ein Dreieck aus:
   (a) $a = 3,1$cm, $b = 3,5$cm und $c = 4,3$cm.
   (b) $a = 3,2$cm, $b = 5,8$cm und $c = 3,4$ cm.
   (c) $a = 6$cm, $b = 3,6$cm und $c = 4,8$cm.

   Eine einzige Planfigur und Analysis für alle drei Teilaufgaben genügt.

4. (a) Konstruiere ein Dreieck, von dem gegeben sind: $a = 5$cm, $b = 10$cm und $c = 8$cm.
   (b) Wieder sei $a = 5$cm und $c = 8$cm. Wie lang darf b höchstens sein, damit das Dreieck konstruierbar ist.

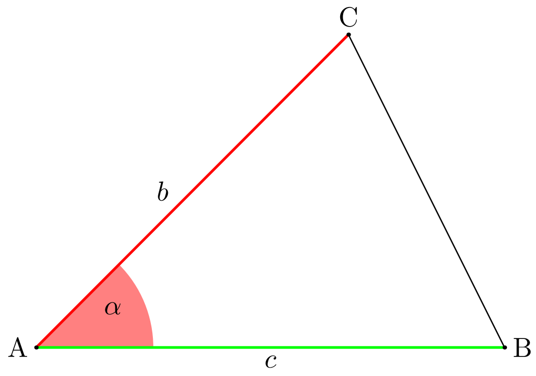
5. Zeichne ein Viereck mit 4 gleichlangen Seiten (5cm) Zeichne über jeder Seite ein Dreieck mit $a = b = 4$cm. Warum sind die Dreiecke kongruent?

6. Was hältst du von der Behauptung? Sind in zwei Vierecken die entsprechenden Seiten gleich groß, so sind die entsprechenden Winkel gleich groß. Ein Schreiner möchte ein Viereck genau ausmessen. Genügt es, wenn er alle 4 Seiten sehr genau misst?

7. Beweise: In einem Viereck, in dem die gegenüberliegenden Seiten gleich groß sind, sind auch die gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

8. Zeichne mit dem Geodreieck die beiden Winkel $\alpha = 60^0$ und $\beta = 17^0$
   (a) Konstruiere durch Winkelübertragung aus den beiden Winkeln die Winkel 2α, 3α, 4α, 5α und 6α.
   (b) Konstruiere durch Winkelübertragung die Winkel $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ und $\alpha - 2\beta$.
   (c) Sind die Winkel 43^0, 26^0, 9^0 und 90^0 durch Winkelübertragung aus α und β konstruierbar?
   (d) Ist der Winkel 8^0 bezw. 1^0 durch Winkelübertragung aus α und β konstruierbar?

1.2 Der Satz SWS



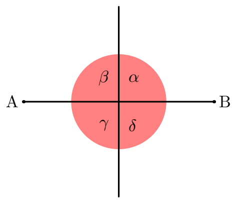
2. Grundaufgabe: Von einem Dreieck sind zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel gegeben. Konstruiere das Dreieck. Führst du die Konstruktion durch, so siehst du, dass die Lösungen im wesentlichen gleich sind. Es ergibt sich:

Satz 1.2.1 (SWS) *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.*

Aufgaben:

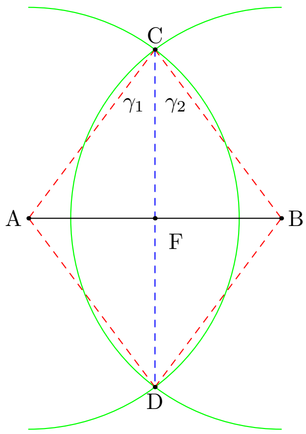
9. Konstruiere ein Dreieck aus:
   (a) $b = 5,2cm$, $c = 4,6cm$ und $\alpha = 54^0$.
   (b) $c = 4,1$cm, $a = 5,4$cm und $\beta = 120^0$.
10. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ($a = b$) mit
    (a) $a = 6,2$cm und $\alpha = 36^0$. (b) $b = 4,3$cm und $\gamma = 68^0$.
11. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ($a = b = c$) mit $c = 5cm$. trage auf den Seiten die Strecken $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 2$cm ab (in gleichem Sinne). Verbinde die Punkte D, E, F. Warum ist das entstehende Dreieck gleichseitig?
12. Kraniche fliegen auf ihrem Wanderflug in Form einer 1. Wie weit sind die beiden letzten Vögel voneinander entfernt, wenn auf der rechten Seite 35 und auf der linken Seite 25 Vögel fliegen. Die Entfernung von Vogel zu Vogel ist $2m$ und der Winkel an der Spitze ist 80^0. Löse die Aufgabe durch maßstäbliche Konstruktion.
13. Zeichne ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten, eine Raute. Bezeichne die Winkel mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
    (a) Zeige: Die Diagonale AC halbiert α und γ. Genauso halbiert die Diagonale BD die Winkel β und δ.
    (b) Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
    (c) Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.
14. Zeige: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

1.3 Mittelsenkrechte



Zwei Geraden g und h schneiden sich in S. Zwei Winkel, die an einer Geraden anliegen heißen Nebenwinkel . Zum Beispiel sind in der Zeichnung α und β zwei Nebenwinkel. Zwei Nebenwinkel ergeben zusammen 180^0. Sind zwei Nebenwinkel gleich groß, so ist jeder 90^0. In diesem Fall sagt man, dass h senkrecht auf g steht. Ein 90^0 Winkel wird auch als ein rechter Winkel bezeichnet. Du kannst einen rechten Winkel folgendermaßen falten. Falte ein Blatt Papier längs einer Geraden g. Das heißt die Gerade g soll der Falz werden. Anschließend wird das Blatt Papier so gefaltet, daß g mit sich selbst zur Deckung kommt. Es entsteht ein neuer Falz h. Die beiden Geraden g und h stehen senkrecht aufeinander. Kann man eine Senkrechte mit Zirkel und Lineal konstruieren?

2. Grundkonstruktion: Gegeben ist eine Strecke $[AB]$. Konstruiere eine Gerade, die senkrecht auf AB steht und durch die Mitte von $[AB]$ geht. Man sagt: Konstruiere die *Mittelsenkrechte von* $[AB]$.



Die Lösung sieht folgendermaßen aus:

1. Zeichne $k(A, r)$ mit $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$.
2. Zeichne $k(B, r)$ mit dem gleichen Radius r. Die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte Mittelsenkrechte.

Begründung: Nach Konstruktion ist $\triangle DAC \cong \triangle DBC$(SSS). Also ist $\gamma_1 = \gamma_2$. Daher ist $\triangle DAF \cong \triangle DBF$ (SWS). Also ist:

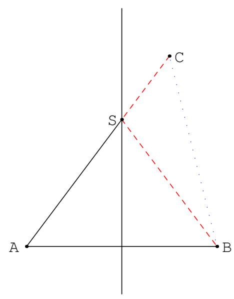
1. $\overline{AF} = \overline{FB}$.
2. $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BFD$. Und da außerdem $\sphericalangle AFD + \sphericalangle BFD = 180^0$ ist, ist $\sphericalangle AFD = 90^0$.

3. Grundkonstruktion: Gegeben ist ein Punkt P auf der Geraden g. Konstruiere eine Gerade durch P, die senkrecht auf g steht. Man sagt: Errichte auf g in P die Senkrechte.

Lösung:

1. Zeichne $k(P, r)$ mit beliebigem r. Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden seien A, B.
2. Errichte auf $[AB]$ die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$.

Denken wir noch einmal über die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke $[AB]$ nach. Entscheidend waren doch zwei Punkte C und D, die jeweils von A und B gleichweit entfernt sind. Die Verbindungsstrecke $[CD]$ ist dann die gesuchte Mittelsenkrechte. Dabei waren D und C völlig beliebig. Das heißt doch: Jeder Punkt, welcher von A und B gleich weit entfernt ist, liegt auf der Mittelsenkrechten. Die Mittelsenkrechte m einer Strecke $[AB]$ teilt die Ebene in zwei Hälften. Eine Hälfte, in der A liegt und eine Hälfte, in der B liegt. Verbindet man einen Punkt aus der Hälfte von B mit A so schneidet diese Vrebindungsstrecke die Mittelsenkrechte.



Satz 1.3.1 *Sei m die Mittelsenkrechte von $[AB]$. Dann gilt:*

1. *Liegt C auf m, so ist C von A und B gleichweit entfernt.*

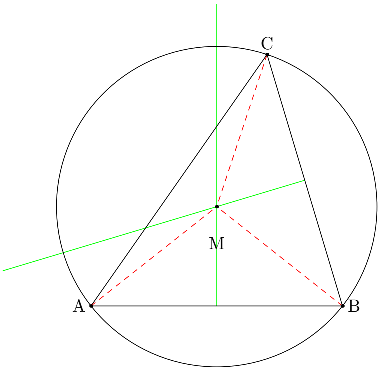


Abbildung 1.1: Umkreis

2. *Liegt C nicht auf m, so ist C näher an dem Punkt, auf dessen Seite C liegt.*

3. *Ist $\overline{AC} = \overline{BC}$, so liegt C auf m.*

Beweis: Zu 1. Führe den Beweis selbstständig durch
Zu 2. Es ist nach der Zeichnung $\overline{CA} = \overline{CS} + \overline{SA} + \overline{SB}$ (nach Teil 1.) $> \overline{CB}$. Dies gilt, da die Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Genauso ist der Beweis zu führen, wenn C auf der Seite von A liegt.
Zu 3. Läge C nicht auf m, so läge C auf der Seite von A oder auf der Seite von B. Dann wäre entweder $\overline{AC} < \overline{BC}$ oder $\overline{AC} > \overline{BC}$. Beides kann nach Voraussetzung nicht sein. □

Satz 1.3.2 *Die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines jeden Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis: Sei M der Schnittpunkt von m_c und m_a. Dann ist $\overline{MA} = \overline{MB}$ und $\overline{MB} = \overline{MC}$. Also ist $\overline{MA} = \overline{MC}$. Damit liegt M auch auf der Mittelsenkrechten m_b. □

Folgerung 1.3.3 *Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks.*

4. Grundkonstruktion: P liegt nicht auf der Geraden g. Konstruiere eine Gerade h, die durch P geht und senkrecht auf g steht. Man sagt: Fälle das Lot von P auf g.
Lösung:

1. Zeichne $k(P, r)$ mit genügend großem r. Die Schnittpunkte mit der Geraden g seien A und B.

2. Konstruiere die Mittelsenkrechte auf der Strecke $[AB]$. Diese geht durch P. Begründe selbstständig, warum die Mittelsenkrechte auf $[AB]$ durch P geht.

5. Grundkonstruktion: Gegeben sind zwei Geraden g und h mit einem Schnittpunkt S. Konstruiere eine Gerade durch S, die den Winkel $\sphericalangle(g, h)$ halbiert. Man sagt konstruiere die *Winkelhalbierende.*

1. Zeichne $k(S, r)$. Der Schnittpunkt mit g sei A und der mit h sei B.

2. Konstruiere auf $[AB]$ die Mittelsenkrechte. Begründe selbständig, warum der Winkel $\sphericalangle(g, h)$ von dieser Mittelsenkrechten halbiert wird.

3. Grundaufgabe: Konstruiere ein Dreieck von dem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Beispiel: $c = 6cm$, $\alpha = 40^0$ und $\beta = 105^0$.
Führst du die Konstruktion durch, so siehst du, dass die Lösung im wesentlichen eindeutig ist. Das ergibt den folgenden Satz:

Satz 1.3.4 (WSW) *Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den dazugehörigen anliegenden Winkeln überein, so sind die Dreiecke kongruent.*

Aufgaben:

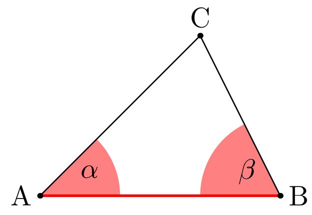


Abbildung 1.2: WSW

15. Gegeben ist eine Strecke von $a = 11$ cm. Konstruiere $\frac{1}{2}a$, $\frac{3}{4}a$ und $\frac{5}{8}a$.
16. Schneiden sich in jedem Viereck die Mittelsenkrechten auch in einem Punkt? Versuche die Vermutung zu beweisen, oder gib ein Gegenbeispiel an.
17. Konstruiere ein Dreieck samt Umkreisen.
    (a) $b = 5$ cm, $c = 6$ cm und $\alpha = 60^0$.
    (b) $b = 3$ cm, $c = 4$ cm und $\gamma = 120^0$.
    (c) $a = 4$ cm, $b = 6cm$ und $\alpha = 90^0$.
    (d) $b = 4$ cm, $\alpha = 100^0$ und $\gamma = 40^0$.
18. Konstruiere ein Dreieck, von dem die folgenden Stücke gegeben sind. Es ist r stets der Umkreisradius.
    (a) $c = 6$ cm, $r = 3.5$ cm und $\alpha = 72^0$.
    (b) $b = 3.8$ cm, $r = 3$ cm und $\gamma = 110^0$.
    (c) $a = 3.5$ cm, $b = 4$ cm und $r = 3$ cm.
    (d) $c = 4$ cm, $r = 2,5$ cm und $\alpha = 90^0$.
19. Von einem Kreis findet man den Mittelpunkt nicht mehr. Konstruiere den Mittelpunkt.
20. (a) Konstruiere ein Dreieck von dem gegeben sind: $b = 12$ cm, $c = 8,5$ cm und $r = 6,5$ cm.
    (b) b und c seien wie in Teil a). Wie lang muss r mindestens sein, damit das Dreieck existiert?
21. Die Strecke, welche im Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenmitte von a mit dem Punkt A verbindet heisst *Seitenhalbierende* s_a. Entsprechend erklärt man s_b und s_c.
    (a) Konstruiere ein Dreieck von dem gegeben sind: $s_a = 10$ cm, $c = 10,5$ cm und $a = 6$ cm.
    (b) Wie lang muss die Seitenhalbierende mindestens sein, damit das Dreieck konstruierbar ist? a und c haben dieselbe Länge wie in Teil a).

Definition 1.3.1 *Ein Dreieck mit mindestens zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenklig. Die beiden gleichen Seiten heißen* Schenkel *und die dritte Seite heißt* Basis. *Die Winkel an der Basis heißen* Basiswinkel.

22. Zeige von einem gleichschenkligen Dreieck:
    (a) Die Basiswinkel sind gleich groß.
    (b) Die Seitenhalbierende s_c der Seite c ist zugleich die Mittelsenkrechte m_c.
    (c) Die Mittelsenkrechte m_c halbiert den Winkel γ.
23. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck von dem gegeben sind:
    (a) $c = 6$cm, $a = 4$ cm
    (b) $a = 5,5$ cm und $\gamma = 45^0$.
    (c) $c = 4,5$ cm und $\alpha = 67,5^0$.
    (d) $c = 6$cm und $m_c = 7$ cm.
    (e) m_c und die Schenkellänge. Gib dir die Maße dazu selber vor.

24. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck und verbinde die Seitenmitten. Gibt es kongruente Teildreiecke? Welches Teildreieck ist wieder gleichschenklig.

25. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck.

    (a) Verbinde die Seitenmitten. Warum ist das entstehende Dreieck wieder gleichseitig?

    (b) Sei M der Umkreismittelpunkt. Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle AMB$? Begründung.

26. Es sind zwei Punkte A, B gegeben.

    (a) Du hast nur einen Zirkel. Konstruiere nur mit ihm weitere Punkte von AB.

    (b) Du hast nur einen Zirkel fester Öffnung (Bierdeckel). Kann man auch mit ihm weitere Punkte von AB konstruieren?

27. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten $a = 6$cm, $b = 7$cm und $c = 8$cm. Fälle von jedem Eckpunkt aus das Lot auf die gegenüberliegende Seite. Was stellst du fest?

28. Konstruiere folgende Winkel mit Zirkel und Lineal.
    (a) $22,5^0$ (b) $67,5^0$ (c) $112,5^0$ (d) $56,25^0$
    (e) 225^0 (f) $157,5^0$.

29. Konstruiere ein Dreieck aus:

    (a) $b = 3,8$cm, $\alpha = 35^0$ und $\gamma = 125^0$.

    (b) $a = 7$cm, $\beta = 36^0$ und $\gamma = 220^0$.

    (c) $a = 5,5$cm, $\gamma = 52^0$ und $\beta = 63^0$.

30. In einem Viereck seien die gegenüberliegenden Seiten gleichlang. Zeige: Die Diagonalen halbieren sich.

31. Ein Viereck, in dem eine Der Diagonalen die beiden gegenüberliegenden Winkel halbiert heißt *Drache*.

    (a) Zeige: In einem Drachen stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

    (b) Ist jedes Viereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ein Drache?

Kapitel 2

Parallele Geraden

2.1 Winkel an Geradenkreuzungen

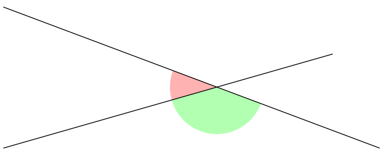


Abbildung 2.1: Geradenkreuzung

Zwei sich schneidende Geraden schließen vier Winkel ein. Je zwei gegenüber liegende Winkel heißen Scheitelwinkel. Je zwei nebeneinander liegende Winkel heißen Nebenwinkel.

Satz 2.1.1 *An einer Geradenkreuzung gilt:*

1. *Nebenwinkel ergänzen sich zu* 180^0.
2. *Scheitelwinkel sind gleich groß.*

Beweis: Zu 1. Dies gilt, da der gestreckte Winkel 180^0 groß ist.
Zu 2. Zeichnet man sich die Situation hin so erkennt man: $\alpha + \beta = \alpha' + \beta$. Daher ist $\alpha = \alpha'$.

□

2.2 Winkel an Doppelkreuzungen

Zwei Geraden heißen parallel , wenn sie ein gemeinsames Lot haben. Es sei eine Doppelkreuzung gegeben (siehe Zeichnung). Die Winkel α und α' heißen Stufenwinkel. Die Winkel δ und α' heißen Nachbarwinkel. Die Winkel γ und α' heißen Z- Winkel oder Wechselwinkel.

Satz 2.2.1 *Die beiden Geraden g und h werden von einer dritten Geraden i geschnitten. Dann gilt:*

1. *Sind Z- Winkel gleich groß, so sind die Geraden parallel.*
2. *Sind Stufenwinkel gleich groß, so sind die Geraden parallel.*
3. *Ergänzen sich die Nachbarwinkel zu* 180^0*, so sind die Geraden parallel.*

Beweis: Sei M der Mittelpunkt von $[A, B]$ und l das Lot von M auf g. Dann sind die Dreiecke $\triangle ACM$ und $\triangle BDM$ kongruent. Es ist $\angle MBD = \angle MAC$ nach Voraussetzung. $\overline{AM} = \overline{MB}$ nach Voraussetzung. $\angle CMA = \angle BMD$ (Scheitelwinkel). Wegen dem Satz WSW sind also

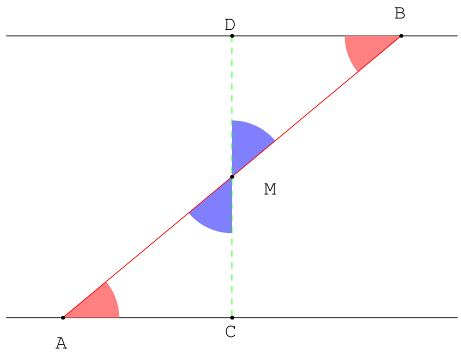


Abbildung 2.2: Doppelkreuzung

die Dreiecke $\triangle ACM$ und $\triangle BDM$ kongruent. Das ergibt $\angle BDM = 90^0$ und nach Definition sind die Geraden g und h parallel.
Zu 2. Seien in der Zeichnung die Stufenwinkel $\alpha = \alpha'$. Es ist $\alpha' = \alpha''$, weil dies Scheitelwinkel sind. Daher ist $\alpha = \alpha''$. Wegen dem bewiesenen Teil 1. des Satzes können wir schließen, dass g und h parallel sind. □

Beweise die Behauptung 3. selbstständig als Übung.
Ist eine Gerade g gegeben und ein Punkt P außerhalb dieser Geraden, so ist es leicht eine Parallele zu dieser Geraden durch den Punkt P zu zeichnen. Wir fällen das Lot von P auf g und errichten in P die Senkrechte auf dem Lot. Dies ist die gesuchte Parallele. Max schlägt eine andere Konstruktion vor.

- Wähle irgend einen Punkt $Q \neq P$, welcher nicht auf g liegt.
- Fälle von Q aus das Lot l auf g.
- Von P aus fälle das Lot h auf l.

Die Gerade h ist eine Parallele durch P zu g. Denn l ist ein gemeinsames Lot. Es gibt keinen vernünftigen Grund Max zu widersprechen. Er hat tatsächlich recht. Führen wir die Konstruktion durch, so sehen wir: Maxens Parallele und unsere liegen aufeinander. Sind sie gleich oder liegt es an unserer mangelnden Zeichengenauigkeit? Euklid und mit ihm die meisten Mathematiker meinten: Sie sind gleich. Über 2000 Jahre lang hat man versucht, dies zu beweisen. Schon Euklid hat vergeblich versucht dies auf die anderen Grundlagen der Geometrie zurückzuführen. Da es ihm nicht gelang nahm er diese einleuchtende, so selbstverständliche Tatsache als weiteren Grundsatz, Fundamentstein zu seinem Lehrgebäude hinzu. Er formulierte als Axiom:

Axiom 2.1 (Parallelenaxiom von Euklid) *Ist P ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt, so gibt es genau eine Parallele durch P zu g.*

Mit diesem Axiom können wir die umgekehrte Frage beantworten: Sind an parallelen Geraden Wechselwinkel und Stufenwinkel gleich groß?

Satz 2.2.2 *Sei g parallel zu h und i schneide g und h. Dann gilt:*

1. *Z- Winkel sind gleich groß.*
2. *Stufenwinkel sind gleich groß.*

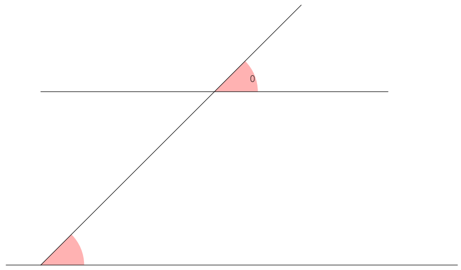


Abbildung 2.3:

3. *Nachbarwinkel ergänzen sich zu* 180^0.

Beweis:
Trage in B an i den Winkel α an. Nenne diese Gerade h'. h' ist parallel zu g nach dem Satz vorher. Da es nur eine Parallele zu g durch B gibt ist $h' = h$. Beweise den Rest selbstständig. $\square$

Folgerung 2.2.3 1. *Sind g und h parallel und ist i eine Senkrechte zu g, dann ist i auch senkrecht auf h.*

2. *Seien g und h parallel. Weiter seien A, B Punkte auf g. Die Lote von A auf h und B auf h sind gleichlang.*

3. *g und h seien zwei Geraden. Gibt es Punkte A und B auf g derart, dass die Lote von A und B auf h gleichlang sind, so ist g parallel zu h.*

Beweis:
Es ist α ein Z- Winkel zu β und da $\alpha = 90^0$ ist, gilt dasselbe für β.
Zu 2.
D und C sind die Fußpunkte der Lote von A beziehungsweise B auf h. Da h eine gemeinsame Senkrechte von AD und BC ist, sind AD und BC parallel. Also gilt: $\angle BAC = \angle DCA$ (Z-Winkel). $\angle DAC = \angle BCA$ (Z- Winkel, da AD parallel zu BC).
Die Strecke $[AC]$ haben die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle CBA$ gemeinsam. Also ist nach dem Satz (WSW) $\triangle ADC \cong \triangle CBA$. Daher ist $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Zu 3.
Wieder ist AD parallel zu BC wegen der gemeinsamen Senkrechten h. Also gilt: $\overline{AD} = \overline{BC}$ wegen der Voraussetzung. $\angle DAC = \angle BCA$ (Z- Winkel). Die Strecke $[AC]$ ist den Dreiecken $\triangle ADC$ und $\triangle CBA$ gemeinsam. Wegen dem Satz (SWS) ist damit das Dreieck $\triangle CBA$ kongruent zum Dreieck $\triangle ADC$.
Also ist $\angle ACD = \angle CAB$ und damit sind g und h parallel. $\square$

Aufgaben

32. Nenne in der Abbildung Paare von
    (a) Stufenwinkeln.
    (b) Z- Winkel (Wechselwinkel).
    (c) Scheitelwinkel.
    (d) Nebenwinkel.

33. Welcher Nebenwinkel ist
    (a) so groß wie sein Nebenwinkel?
    (b) doppelt so groß wie sein Nebenwinkel?
    (c) dreimal so groß wie sein Nebenwinkel?
    (d) fünfmal so groß wie sein Nebenwinkel?
34. Welcher Winkel ist 30^0 größer als sein Nebenwinkel?
35. 45^0 kleiner als sein Nebenwinkel?
36. Zeichne in einem beliebigen Dreieck zu den Winkeln α, β und γ die zugehörigen Nebenwinkel. Sie heißen Außenwinkel des Dreiecks. Wieviel verschiedene Außenwinkel hat ein beliebiges Dreieck?
37. In der Zeichnung 2.3 ist
    $\alpha = \gamma' = 44^0$. Berechne alle anderen Winkel.
38. Gegeben ist ein beliebiger Winkel. Konstruiere die Winkelhalbierende und die Winkelhalbierende des Nebenwinkels. Welchen Winkel schließen die beiden Winkelhalbierenden ein? Beweise deine Vermutung.
39. Gegeben ist ein Zeichendreieck ohne Winkeleinteilung. Wie kannst du zu einer Geraden durch einen Punkt eine Parallele nur mit diesem Dreieck zeichnen?
40. In einem Viereck sind die gegenüberliegenden Seiten gleichlang. Zeige:
    (a) Die gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß.
    (b) Die Diagonalen halbieren sich.
    (c) Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel.
41. In einem Viereck sind die gegenüberliegenden Seiten parallel. Zeige:
    (a) Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel.
    (b) Die gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß.
    (c) Die Diagonalen halbieren sich.
42. Zeige: Schneiden sich im Umkreismittelpunkt eines Dreicks auch zwei Seitenhalbierende, dann ist das Dreieck gleichseitig.

Ein Viereck in dem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind heißt Parallelogramm.

43. Konstruiere ein Parallelogramm aus:
    (a) $\overline{AB} = 6$cm, $\overline{BC} = 5$cm und $\angle ACB = 30^0$.
    (b) $\overline{AB} = 6$cm, $\overline{AC} = 6$cm und $\overline{BD} = 8$cm.
    (c) $\overline{BC} = 3.5$cm $\overline{AC} = \overline{BD} = 9$cm.

Kapitel 3

Eigenschaften des Dreiecks

3.1 Der Winkelsummensatz

Satz 3.1.1 *In jedem Dreieck gilt:*

1. *Die Summe der Innenwinkel* 180^0.
2. *Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.*

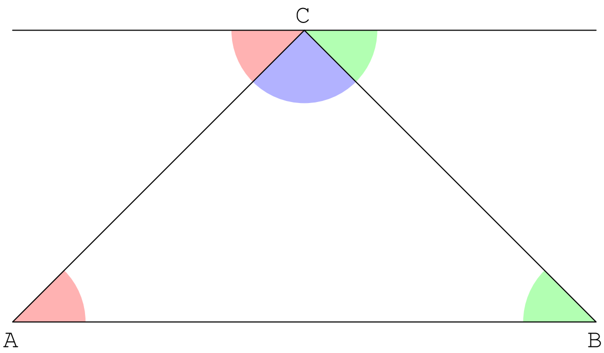


Abbildung 3.1: Der Winkelsummensatz

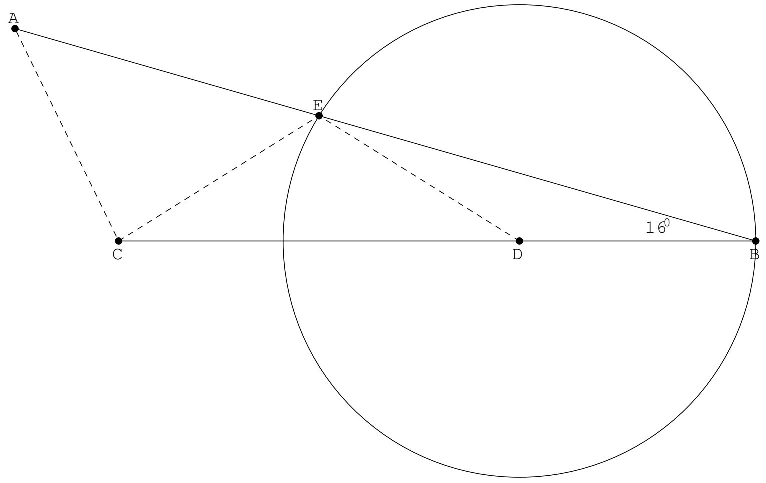
Beweis:
Zu 1. Sei g die Parallele zu AB durch C. Dann sind α und α' Wechselwinkel also gleich groß. Aus dem gleichen Grund ist $\beta = \beta'$. Außerdem ist $\alpha' + \gamma + \beta' = 180^0$. Daher ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Führe den Beweis von 2. selbstständig durch. □

Aufgaben:

44. Fülle die Lücken in der folgenden Tabelle aus:

α	β	γ	α'	β'	γ'	$\alpha'+\beta'+\gamma'$
50^0	70^0					
77^0		55^0				
	47^0	106^0				
113^0		39^0				

45. Vermute einen Satz über die Winkelsumme der Außenwinkel und beweise ihn.
46. (a) Wieviel stumpfe Winkel kann ein Dreieck haben?
    (b) Wieviel Winkel $> 60^0$ kann ein Dreieck haben?
    (c) Wieviel Winkel $< 60^0$ kann ein Dreieck haben?
47. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Basiswinkel a) 60^0, b) 67^0, c) 55^0, d) 39^0. Wie groß ist der Winkel an der Spitze und wie groß sind die Außenwinkel?
48. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze a) 50^0 b) 68^0 c) 75^0 d) 90^0. Berechne den Basiswinkel und alle Außenwinkel.
49. Konstruiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit $a = 5$cm.
50. Zeige: In jedem gleichschenkligen Dreieck ist der Außenwinkel an der Spitze gleich dem doppelten Basiswinkel.
51. (a) Beweise: Im gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel 60^0.
    (b) Konstruiere die folgenden Winkel: 60^0, 15^0, 77.5^0.
52. In einem rechtwinkligen Dreieck ist β um a) 15^0 b) 45^0 c) 24^0 größer als α. Berechne α und β.
53. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist 140^0. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?
54. (a) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen Viereck?
    (b) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen 1000- Eck?
    (c) Wieviel Winkel $> 140^0$ kann ein 5- Eck haben?
    (d) Wieviel Winkel $> 180^0$ kann ein $6-$ Eck haben?
55. Liegen in einem Viereck sämtliche Ecken auf einem Kreis, so spricht man von einem Sehnenviereck. Zeige: In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180^0. Unterscheide beim Beweis folgende zwei Fälle:
    (a) Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Sehnenviereck.
    (b) Der Mittelpunkt des Kreises liegt nicht im Sehnenviereck.
56. Zeige: Die Seitenmitten eines Rechtecks bilden eine Raute. Eine Raute ist ein Viereck, dessen Seiten alle gleich lang sind. Was kann gesagt werden, wenn das Seitenmittenviereck ein Quadrat ist?
57. In einer Raute ist ein Winkel 60^0. Wie groß sind die Winkel des Seitenmittenvierecks?
58. Zeige: Stehen die Schenkel zweier Winkel senkrecht aufeinander, so sind die Winkel gleich groß oder ergänzen sich zu 180^0.
59. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel 36^0.
    (a) Welchen Winkel schließen die Winkelhalbierenden der Basiswinkel ein?
    (b) Welchen Winkel schließen die Winkelhalbierenden des Winkels an der Spitze und eines Basiswinkels ein?
    (c) Die Lote von den Eckpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten bezeichnet man als Höhe. Welchen Winkel schließen die Höhen auf die Schenkel ein?
    (d) Welchen Winkel schließen die Höhe auf die Basis und die Höhe auf einen Schenkel ein?
60. Beweise: Die Halbierende des Außenwinkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist parallel zur Grundseite.
61. Beweise: Die Winkelhalbierenden zweier Stufenwinkel an parallelen Geraden sind parallel.
62. Beweise: Gilt der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, dann sind an parallelen Geraden Wechselwinkel gleich groß.
63. In einem gleichschenkligen Dreieck ist $a = b$. Wie groß ist der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden von α und der Höhe auf die Seite a, wenn $\gamma = 44^0$ ist.
    In der Figur ist $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{ED} = \overline{DB}$. Berechne α.



64.

Abbildung 3.2: Vertrackter Winkel

3.2 Der Kongruenzsatz SsW

Wir entnehmen der Anschauung folgendes: Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden liegt. Dadurch wird die Ebene in drei Mengen unterteilt.

- Die Halbebene auf der Seite von A.
- Die Halbebene auf der A nicht liegt.
- g selber.

Liegt ein Punkt B nicht in der Halbebene von A, so hat die Strecke $[AB]$ mit der Geraden g einen Schnittpunkt. Liegt B in der Halbebene von A, so hat die Strecke $[A, B]$ mit g keinen Schnittpunkt.

Satz 3.2.1 *In jedem Dreieck gilt: $a < b$ genau dann, wenn $\alpha < \beta$. Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.*

Beweis: Sei zunächst $a < b$. Dann liegt C auf der Seite von B. Die Mittelsenkrechte m_c von $[AB]$ hat also einen Schnittpunkt S mit der Geraden CA. Also ist $\angle SAB = \angle SBA$, da das Dreieck $\triangle ABS$ gleichschenklig ist. Nun ist $\angle CAB = \angle SAB < \angle SBA + \angle SBC = \angle CBA$. Dies war zu zeigen.
Es sei $\beta > \alpha$. Wäre $a > b$, so wäre $\alpha > \beta$ nach der vorhergehenden Überlegung. Wäre $a = b$, so wäre $\alpha = \beta$, da in einem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich groß sind. Beides kann nach Voraussetzung nicht sein. $\square$

Folgerung 3.2.2 *Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn die Basiswinkel gleich groß sind.*

Beweis: Ist das Dreieck gleichschenklig, so sind die Basiswinkel gleich groß. Dies haben wir früher schon in einer Aufgabe gezeigt.
Seien nun die Basiswinkel gleich groß. Dann kann weder $a < b$ noch $a > b$ gelten, wegen dem Satz vorher. $\square$

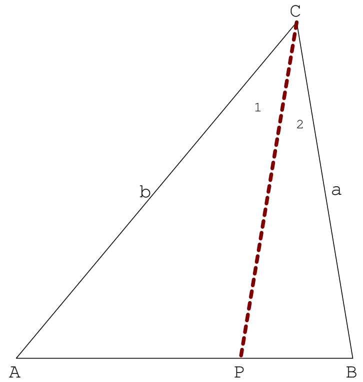


Abbildung 3.3: Innere Linie

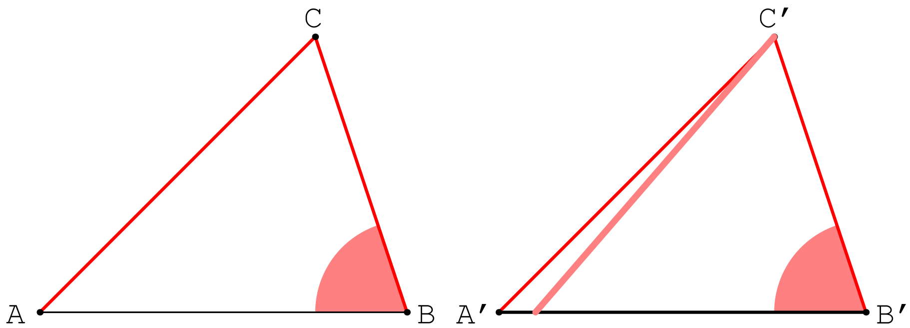


Abbildung 3.4: SsW

Folgerung 3.2.3 *In einem Dreieck sei $b \geq a$ und $P \in [AB]$ kein Randpunkt. Dann ist $\overline{PC} < b$.*

Beweis: Es ist $\delta = \gamma_2 + \beta > \beta > \alpha$. Also ist $\delta > \alpha$. Daher $b > \overline{CP}$ □

4.Grundaufgabe: Konstruiere ein Dreieck aus zwei Seiten und einem anliegenden Winkel. Etwa aus a, b und β. Diesmal sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall $a > b$: Der gegebene Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber. Etwa $a = 7.5$ cm, $b = 4.7$ cm und $\beta = 34^0$. Führst du die Konstruktion durch, so siehst du, das es zwei Lösungen gibt.

2. Fall $a < b$: Der gegebene Winkel liegt der größeren Seit gegenüber. Beispiel: $a = 5$ cm, $b = 8,5$ cm und $\beta = 80^0$. Führst du diesmal die Konstruktion durch, so siehst du, das es nur eine Lösung gibt.

Dies lässt den folgenden Satz vermuten:

Satz 3.2.4 (SsW) *Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen sind kongruent.*

Beweis: Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei DReiecke in denen die geforderten Stücke gleich sind. Von B' tragen wir auf der Halbgeraden $A'B']$ die Strecke c ab und erhalten einen

Punkt P. Nach dem Satz SWS ist $\triangle C'B'P \sim \triangle CBA$. Also ist $\overline{C'P} = \overline{CA} = b$. Wäre P echt zwischen $A'B'$, so wäre nach der vorherigen Folgerung $\overline{C'P} < \overline{C'A'} = b$. Das ist nicht der Fall. Genausowenig ist A' zwischen P und B'. Daraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

65. Konstruiere ein Dreieck aus:

    (a) $a = 5,3$ cm, $c = 3,9$ cm und $\alpha = 40^0$.

    (b) $a = 3,8$ cm, $c = 4,6$ cm und $\gamma = 72^0$.

    (c) $b = 4,7$ cm $c = 4,2$ cm und $\gamma = 40^0$.

    (d) $b = 6$ cm, $c = 4,5$ cm und $\beta = 120^0$.

    Wie groß ist in jedem Fall die Anzahl der Lösungen?

66. (a) Zeige: In jedem rechtwinkligen DReieck liegt der rechte Winkel stets der größten Seite gegenüber. Diese Seite heißt Hypotenuse.

    (b) Der Punkt P liege nicht auf der Geraden g. Die kürzeste Verbindung von P zur Geraden ist das Lot auf die Gerade.

67. Gegeben ist ein DReieck $\triangle ABC$. Das Lot von C auf die gegenüberliegende Seite $[AB]$ heißt Höhe h_c. Entsprechend erklärt man die anderen Höhen. Konstruiere in einem Dreieck eigener Wahl alle drei Höhen, was stellst du fest?

68. Konstruiere ein Dreieck aus:

    (a) $h_c = 5$ cm, $a = 5,3$ cm und $c = 6,6$ cm.

    (b) $h_a = 6,3$ cm, $b = 7cm$ und $c = 6,5$ cm.

    (c) $h_c = 4,8$ cm, $b = 6,5$ cm und $\beta = 70^0$.

    (d) $h_c = 5$ cm, $b = 5,3$ cm und $\gamma = 60^0$.

69. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Zeige:

    (a) Ist $a = b$, so ist $h_a = h_b$.

    (b) Ist $h_a = h_b$, so ist $a = b$.

70. Konstruiere ein Dreieck aus:

    (a) $b = 4,6$ cm, $h_c = 4$ cm und $s_b = 6$ cm. s_b ist die Seitenhalbierende der Seite b.

    (b) $c = 6,5$ cm, $s_c = 5,2$ cm und $h_b = 4,5$ cm.

    (c) $h_c = 4$ cm, $s_c = 5,2$ cm und $c = 6,8$ cm.

    (d) $c = 7$ cm, $s_b = 6,6$ cm und $b = 4,2$ cm.

    (e) $c = 8,8$ cm, $s_c = 2,9$ cm und $\alpha = 28^0$.

71. Zeige:

    (a) Jeder Punkt der Winkelhalbierenden hat von beiden Schenkeln des Winkels gleichen Abstand.

    (b) Hat ein Punkt P im Winkelfeld eines Winkels von beiden Schenkeln geichen Abstand, so liegt er auf der Winkelhalbierenden.

    (c) In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreises durch die drei Fußpunkte der Lote vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden auf die Seiten. Dieser Kreis heißt Inkreis des Dreiecks.

3.3 Thalessatz

Thales von Milet wurde ungefähr 625 vor Christus in Milet Kleinasien geboren und starb ungefähr 547. Er war Naturphilosoph, Mathematiker, Ingenier und Politiker. Als Kaufmann sagte er in Ägybten richtig die Sonnenfinsternis von 585 v. Christus voraus und erwarb sich dadurch großes Ansehen. Er war einer der ersten Menschen, die natürliche Ursachen für gewaltige Naturereignisse suchten. So versuchte er die Erdbeben nicht durch den Zorn der Götter zu deuten, sondern nach seiner Theorie schwamm die Erde auf einem riesiegen Wasermeer. Die Wellenbewegungen deises Meeres verursachten die Beben. Von ihm stammt eine erste Version des folgenden wunderschönen Satzes.

Satz 3.3.1 (Satz des Thales)

- *Ist $[AB]$ ein Kreisdurchmesser und C ein Punkt auf dem Halbkreis über $[AB]$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.*
- *Ist das Dreieck rechtwinklig bei C, so liegt C auf dem Kreis über AB*

Beweis: Sei M der Mittelpunkt von $[AB]$ Dann gilt $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC}$ Daher ist $\alpha = \alpha'$

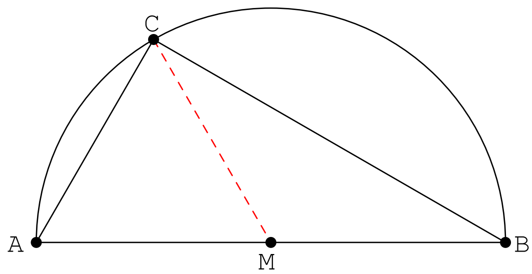


Abbildung 3.5: Thalessatz

und $\beta = \beta'$. Außerdem ist $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180^0$. Also ist $2\alpha' + 2\beta' = 180^0$. Daher ist $\alpha' + \beta' = 90^0$.
Zu 2.

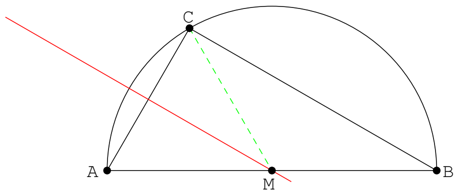


Abbildung 3.6: Umkehrung des Thalessatze

Sei m_b die Mittelsenkrechte der Seite $[AC]$ M ist der Schnittpunkt von m_b mit $[AB]$. Dann ist $\alpha = \alpha'$, da das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig ist. Also ist $\alpha' + \beta' = 90^0$ und es ist $\alpha + \beta = 90^0$. Also ist $\beta = \beta'$. Also ist $\overline{MC} = \overline{MB}$ und damit ist $\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MB}$. Also liegen die drei Punkte A, B, C auf einem Kreis um M mit Radius $\overline{MC}$.

$\square$

Definition 3.3.1 *Die Lote von den Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten heißen Höhen des Dreiecks. h_c ist das Lot von C auf $[AB]$. h_b ist das Lot von B auf $[AC]$ und so weiter.*

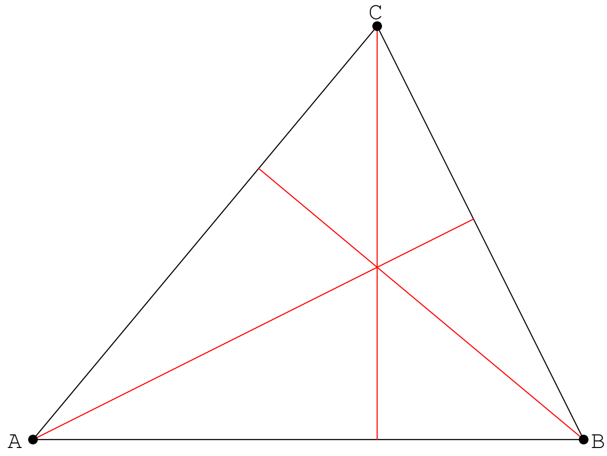


Abbildung 3.7: Die Höhen

Definition 3.3.2 *Sei P ein Punkt der Geraden g. Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so heißt die Zahl $\overline{PF}$ Abstand von P zu g.*

Bemerkung 3.3.2 *Auf jeder Seite der Geraden g gibt es eine Parallele im Abstand d. Die Punkte auf dieser Parallelen sind genau die Punkte, die von g den Abstand d haben.*

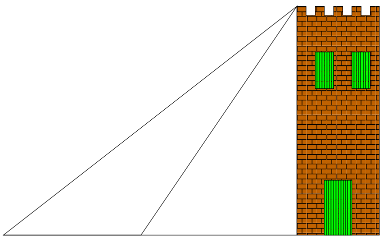


Abbildung 3.8: Ein Turm

Aufgaben:

72. Konstruiere ein Dreieck von dem gegeben sind:
    (a) $c = 9cm$, $h_c = 3.5cm$ und $\gamma = 90^0$.
    (b) $b = 6cm$, $h_a = 5.5cm$ und $\alpha = 62^0$.
    (c) $\angle(h_a, c) = 50^0$, $b = 5.3cm$ und $h_a = 3.2cm$.
    (d) $b = 6.5cm$, $h_c = 6.2cm$ und $h_a = 3.4cm$.
    (e) Umkreisradius $r = 4cm$, $c = 7cm$ und $h_a = 6.4cm$.
    (f) Umkreisradius $r = 4cm$, $c = 6cm$ und $h_b = 4.2cm$
73. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Zeige:
    (a) Ist $a = b$, so ist $h_a = h_b$.
    (b) Ist $h_a = h_b$, so ist $a = b$.
74. Die Eckpunkte eines Rechteckes liegen stets auf einem Kreis. Zeige diese Behauptung. Wahrscheinlich in dieser Form hat Thales seinen Satz formuliert.
75. Welche Höhe hat der Turm, wenn $\overline{AB} = 54m$, $\alpha = 30^0$ und $\beta = 40^0$ ist. Ermittele die Höhe durch Konstruktion.
76. Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind gegeben. Zeige: Ist $\alpha = \alpha$, $h_c = h_{c'}$ und $c = c'$, so ist $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
77. Ein Vieleck heißt konvex, wenn mit zwei Punkten aus dem Innern des Vielecks auch die ganze Verbindungsstrecke im Vieleck liegt. Gegeb ist ein konvexes Vieleck. Man bestimme einen Punkt, so dass die Summe seiner Abstände zu den Ecken des Vielecks minimal ist.

78. Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Durchmesser $[AB]$. Der Radius $[DC]$ steht senkrecht auf $[AB]$. M der Mittelpunkt von $[AB]$. Durch M zieht man eine Parallele zu $[AB]$. Diese schneidet den Kreis in E Berechne den Winkel $\alpha = \angle BAE$ und $\beta = \angle ABE$.

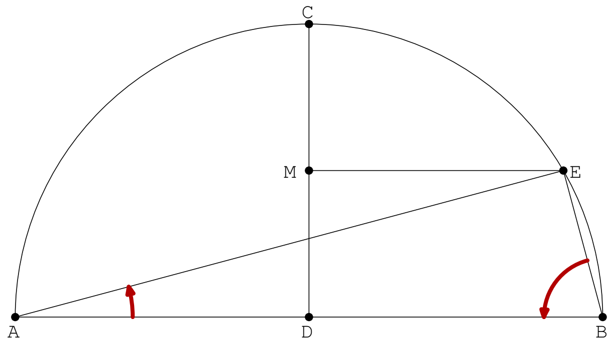


Abbildung 3.9: Winkel

3.4 Transversalen im Dreieck

Wie wir wissen schneiden sich die Mittelsenkrechten eines jeden Dreiecks im Umkreismittelpunkt. Genauso schneiden sich die Winkelhalbierenden im Inkreismittelpunk. Für die Höhen gilt ein ähnlicher Satz.

Satz 3.4.1 *In jedem Dreick schneiden sich die Höhen in einem Punkt.*

Beweis: Wir ziehen durch jeden Eckpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite. Es entsteht ein neues Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$

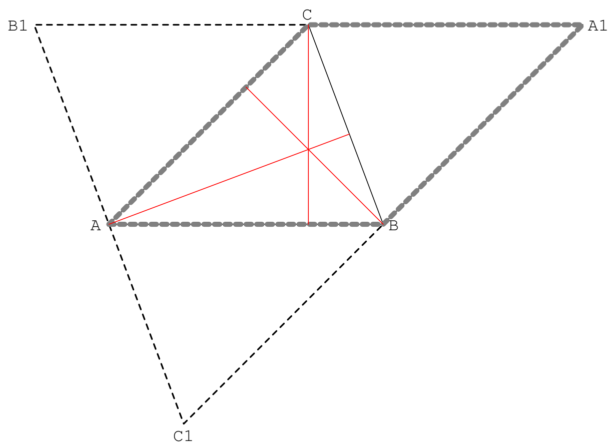


Abbildung 3.10: Höhenschnittpunkt

Es ist $\overline{B_1C} = \overline{AB}$, da $ABCB_1$ ein Parallelogramm ist. Genauso ist $\overline{AB} = \overline{CA_1}$, da ABA_1C ein Parallelogramm ist. Also ist C der Mittelpunkt von $[B_1A_1]$. Genauso ist B der Mittelpunkt von $[C_1A_1]$ und A der Mittelpunkt von $[B_1C_1]$. Die Mittelsenkrechten dieses neuen

DReiecks $\triangle A_1B_1C_1$ schneiden sich in einem Punkt. Die Mittelsenkrechten sind die Höhen in dem ursprünglichen Dreieck $\triangle ABC$. Also schneiden sich die Höhen in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt. $\square$

Verbindet man etwa die Seitenmitten von $[BC]$ und $[AC]$, so stellt man fest, dass diese Gerade parallel zu AB ist.

Satz 3.4.2 *Sei ein Dreieck ABC gegeben. Die Parallele durch die Seitenmitte E von $[AC]$ zu der Seite AB geht durch die Seitenmitte von $[BC]$. Die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte ist halbso lang wie $[AB]$.*

Beweis: Zu zeigen ist: D ist die Seitenmitte von $[BC]$. Sei h die Parallele zu $[CB]$ ducrh E.

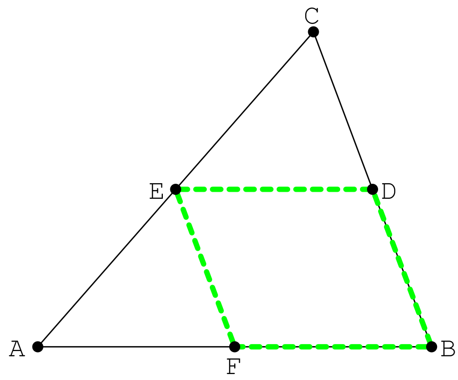


Abbildung 3.11: Mittelparallele

Dann gilt:

1. Das Dreieck AFE ist kongruent zu dem Dreieck EDC. Daher ist $[EF]$ genauso lang wie $[CD]$.

2. Das Viereck $FBDE$ ist ein Parallelogramm. Also ist die Strecke $[EF]$ genauso lang, wie die Strecke $[DE]$.

Daher ist $[CD]$ genauso lang wie $[DB]$. Das bedeutet: D ist Seitenmitte vonm $[CD]$. Genauso folgt, dass F Seitenmitte von $[AB]$ ist. Und daher ist die Strecke $[ED]$ $0.5 \cdot c$ lang. $\square$

Folgerung 3.4.3 *Verbindet man die Seitennmitten zweier Seiten, so ist diese Gerade parallel zur dritten Dreiecksseite.*

Überlege den Beweis dieses Satzes selbstständig.

Satz 3.4.4 *Die Seitenhalbierenden eines jeden DReiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt heißt Schwerpunkt des Dreiecks. Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks so gilt: $\overline{AS} = \frac{2}{3}s_a$, $\overline{BS} = \frac{2}{3}s_b$ und $\overline{CS} = \frac{2}{3}s_c$*

Beweis: In der Figur ist P die Seitenmitte von $[AS]$ und Q die Seitenmitte von $[BS]$. Entsprechend ist Mb die Seitenmitte von b und Ma die Seitenmitte von a. Also ist wegen der Folgerung 3.4.3 das Viereck $PQMaMb$ ein Viereck mit zwei gleichlangen gegenüberliegenden Seiten. Daher ist es ein Parallelogramm und die Dieagonalen halbieren sich. Also ist $[PS]$ genauso lang wie $[SMa]$. Da P weiterhin die Seitenmitte von $[AS]$ ist. Also ist $[AS]$ $2/3 \cdot s_a$ lang. Ist S' der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_c, so folgt genauso,

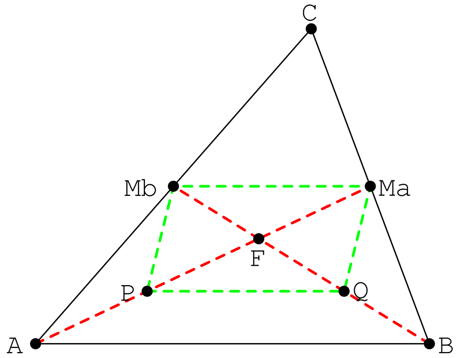


Abbildung 3.12: Schwerpunkt

dass $[AS']$ $2/3 \cdot s_a$ lang ist. Also ist $S' = S$. □

Aufgaben: Hinweis: Bei den folgenden Konstruktionsaufgaben ist es erlaubt 2/3 einer Strecke auszumessen.

79. Konstruiere ein Dreieck von dem gegeben sind:
    (a) $s_b = 6.6$cm, $s_c = 4.8$cm udn $a = 6.9$cm.
    (b) $s_b = 6$cm, $s_c = 3.3$cm und $b = 5.8$cm.
    (c) $h_c = 4.2$cm $s_c = 4.5$cm und $h_c = 4.2$cm
    (d) $s_a = 6.6$cm, $s_b = 4.5$cm und $h_c = 4.2$cm.
80. Konstruiere ein Dreieck aus:
    (a) $h_c = 4.2$cm $\alpha = 75^0$ und $\beta = 35^0$
    (b) Inkreisradius $r = 1.6$ cm $\alpha = 40^0$ und $\beta = 76^0$
    (c) Umkreisradius $r = 3.5$cm $h_c = 4.1$cm und $c = 6.4$cm.
    (d) $b = 7.2$cm $s_b = 4.2$cm und $h_a = 6.4$cm
    (e) $c = 6.2$ cm, $h_a = 3.6$cm und $h_b = 5.7$cm.
81. Beweise, dass in jedem Dreieck gilt:
    (a) Ist $a = b$, so ist $s_a = s_b$.
    (b) Ist $s_a = s_b$ so ist $a = b$.
82. Konstruiere ein gtelichschenkliges Dreieck aus der Seitenhalbierenden s_a und der Basis c.
83. Konstruiere ein Dreieck aus einer Seite (7cm), einer Höhe (4.5cm) und einer Seitenhalbierenden (5cm). Unterscheidung von 5 Fällen.
84. Gegeben sind drei sich schneidende Geraden und auf einer derselben ein Punkt A. Zeichne ein Dreieck, das A zur Ecke hat, bei dem B und C auf den beiden andern Geraden liegen und in dem P
    (a) dder Höhenschnittpunkt
    (b) Umkreismittelpunkt
    (c) der Schwerpunkt ist.
85. Konstruiere ein Dreieck von dem gegeben sind:
    (a) Die drei Seitenmitten
    (b) Zwei Ecken A und B und der Höhenschnittpunkt H.

(c) Zwei Ecken A und B und der Schwerpunkt S.

(d) Zwei Ecken A und B und der Inkreismittepunkt M.

(e) Die Ecke A, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U.

86. Im Dreieck ABC sei D die Seitenmitte von $[BC]$. Ziehe durch D die Parallele zu AC und AB. Welche der entsehenden Teildreiecke sind kongruent und warum.

87. (a) Zeige: Die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.

    (b) Gegeben sei ein Parallelogramm mit den Eckpunkten $ABCD$. Die Eckpunkte liegen auf den Seiten eines Vierecks $RFGH$ und zwar derart, dass A Seitenmitte von $[HF]$, B Seitenmitte von $[EF]$ und C Seitenmitte von $[FG]$ ist. Zeige D ist Seitenmitte von $[GH]$.

    (c) Ist ein Viereck eindeutig aus seinen Seitenmitten konstruierbar?

    (d) Konstruiere ein Fünfeck aus seinen Seitenmitten.

    (e) Zeige allgemein: Jedes Vieleck ungerader Eckenzahl ist aus seinen Seitenmitten konstruierbar.

88. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Verlängert man die Seite b über A hinaus um b, so erhält man den Punkt A'. Verlängert man die Seite a über B hinaus um a, so erhält man B'. Zeige: $A'B'$ ist parallel zu AB

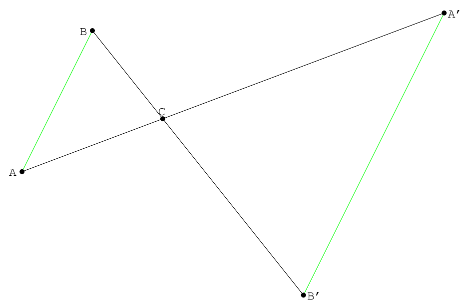
89. 

Abbildung 3.13: Parallele

In der Skizze ist $[CA']$ zweimal so lang wie $[CA]$ und $[CB']$ zweimal so lang wie $[CB]$. Zeige $A'B'$ ist parallel zu AB.

90. Im DReieck sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. U der Umkreismittelpunkt und O liege auf US, so dass $[OS]$ doppelt so lang wie $[US]$ ist. Zeige: O liegt auf der Höhe auf die Seite $[AB]$. Beweise: Umkreismittelpunkt, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und der Höhemschnittpunkt liegen auf einer Geraden. Dieser schöne Satz stammt von Leonard Euler georen am 15.04.1707 in Basel. Er starb am 18.9.1783 in Petersburg.

91. Konstruiere ein Dreieck von dem gegeben sind:

    (a) $a + b = 10.4$cm, $c = 8$cm und $\alpha = 38^0$

    (b) $a + c = 13.2$cm, $b = 6$cm und $h_c = 2.7$cm.

    (c) $a + b = 11$cm, $c = 7.2$cm und $\gamma = 72^0$

92. Schlage um den Umkreismittelpunkt M eines gleichseitigen Dreiecks einen Kreis mit beliebigem Radius. Beweise, dass von den 6 Schnittpunkten des Kreises mit den Seiten je 3 ein gleichseitiges DReieck bilden.

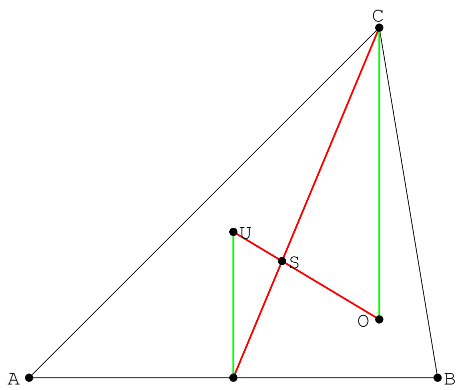
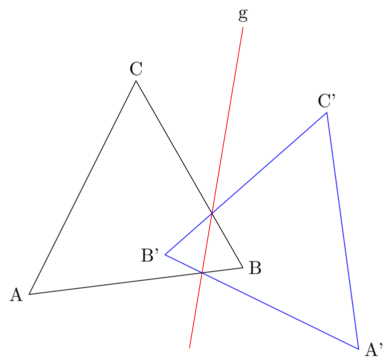


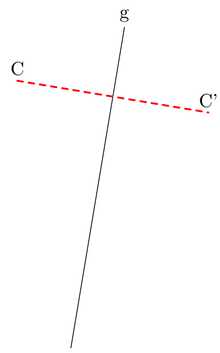
Abbildung 3.14: Eeuler Gerade

Kapitel 4

Kongruenzabbildungen

4.1 Achsenspieglung





Zeichne auf ein Blatt Papier ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Falte das Blatt längs einer Geraden g. Halte das Blatt Papier gegen das Licht, um mit dem Zirkel an den Stellen, wo die Eckpunkte des Dreiecks durchscheinen Löcher in das Blatt zu bohren. Auf der jeweils anderen Seite der Geraden entstehen Löcher A', B', C'. Das Dreieck $\triangle A'B'C'$ entsteht dadurch, dass man das ursprüngliche Dreieck im Raum um die Gerade g um 180^0 dreht. In allen Bestimmungsstücken ist es gleich dem ursprünglichen Dreieck $\triangle ABC$. Die Punkte liegen jeweils auf der anderen Seite von g. Es fragt sich, ob die Punkte ohne Falten, nur mit Zirkel und Lineal sich konstruieren lassen. Betrachtet man den Zusammenhang von Gegenstandspunkt A, Geraden g und Bildpunkt A', so fällt sofort auf: g ist die Mittelsenkrechte von $[A, A']$. Dies legt folgend Konstruktion und Definition nahe:

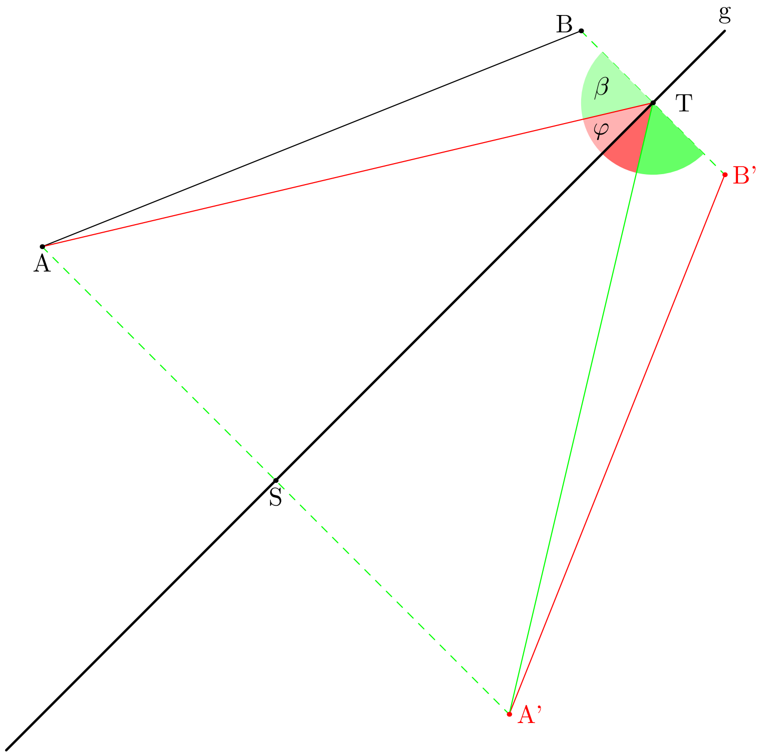
Spieglung an g Sei g eine Gerade. Jedem Punkt P der Ebenen wird auf folgende Weise genau ein Punkt P' zugeordnet.

1. Liegt P auf g so ist $P' = P$.

2. Liegt P nicht auf g, so liegt P auf dem Lot von P auf g. Sei S der Schnittpunkt des Lotes von P auf g mit g. Dann hat P' von S den gleichen Abstand wie P liegt aber auf der anderen Seite.

P' heißt der Bildpunkt von P bei der Spiegelung an g. Wir bezeichnen ihn auch mit $S_g(P) = P'$. (Spiegelpunkt von P bei Spiegelung an g). Die Gerade g heißt auch Spiegelachse oder Symmetrieachse.

Satz 4.1.1 *Sei g eine Gerade und A, B zwei Punkte. Ist S_g die Spiegelung an g, so gilt $\overline{AB} = \overline{S_g(A)S_g(B)}$. Das heißt die Gegenstandsstrecke ist genau so lang wie die Bildstrecke.*



Beweis: Nach Konstruktion ist $\overline{AS} = \overline{A'S}$ und $\angle AST = \angle A'ST = 90^0$. Also ist wegen (SWS) $\overline{AT} = \overline{A'T}$: Daher ist $\varphi = \varphi'$. Außerdem ist nach Konstruktion $\overline{BT} = \overline{BT'}$. Mit dem Satz (SWS) folgt, dass $\triangle ATB \cong \triangle A'TB'$ ist. Daher ist $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. □

Folgerung 4.1.2 *Gegeben sei eine Achse g*

1. *Bei der Achsenspiegelung ist das Bild einer Strecke $[AB]$ die Strecke $[S_g(A)S_g(B)]$.*
2. *Das Bild einer Geraden h ist eine Gerade.*
3. *Gegenstands– und Bildwinkel sind gleich groß.*

Beweis: Zu a: Liege C auf $[AB]$. Das heißt $\overline{AC} + \overline{CA} = \overline{AB}$. Wegen Satz 4.1.1 folgt: $\overline{S_g(A)S_g(B)} = \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{S_g(A)S_g(C)} + \overline{S_g(C)S_g(B)}$. Daher ist $\overline{S_g()S_g(B)} = \overline{S_g(A)S_g(C)} + \overline{S_g(C)S_g(B)}$. Daher ist $S_g(C) \in [S_g(A)S_g(B)]$. Ist X ein Punkt von der Strecke $[S_g(A)S_g(B)]$, so ist $S_g(X) \in [AB]$ und dher $X = S_g(S_g(X)) \in [S_g(A)S_g(B)]$. Jeder Punkt der Strecke $S_g(A)S_g(B)]$ kommt daher tatsächlich als Bildpunkt vor.
Zu b: Genauso.
Zu c: Überlege dies dir selbständig. □

Aufgaben:

93. Spiegle ein beliebiges Dreieck an einer Geraden g.

    (a) g schneidet das Dreieck nicht.

(b) g ist eine Dreiecksseite.

(c) g schneidet das Dreieck.

94. Max schlägt folgende „Halbspiegelung“ vor. Gegeben ist die Gerade g. Jedem Punkt P der Ebene wird genau ein Bildpunkt der Ebene $P' = S_g(P)$ zugeordnet. Liegt P auf g, so sei $S_g(P) := P$. Liegt P nicht auf g, so fällt man das Lot von P auf die Gerade g. Es habe den Fußpunkt F. $S_g(P)$ liegt auf der Seite von g, welche P nicht enthält, so dass $[S_g(P)F]$ genauso lang ist wie $[PF]$.

   (a) Zeichne das Bild eines beliebigen Dreiecks bei dieser Halbspiegelung.

   (b) Ist bei der Halbspiegelung die Bildstrecke genau so lang wie die Gegenstandsstrecke?

   (c) Ist der Bildwinkel bei diese Halbspiegelung genausogroß wei der Gegenstandswinkel?

95. Konstruiere das Bild einer Gerade. Wieviel Bildpunkte muss man konstruieren? Begründung!

96. (a) Konstruiere das Bild eines Kreises bei verschiedener Lage der Achse zum Kreis.

   (b) Zeige: Bei jeder Achsenspiegelung ist das Bild eines Kreise wieder ein Kreis.

97. Zeige:

   (a) Ein gleichschenkliges Dreieck ist achsensymmetrisch. Was ist die Symmetrieachse?

   (b) Ein gleichseitiges DReieck hat drei Symmetrieachsen.

   (c) Zwie sich schneidende Geraden bilden eine achsesymmetrische Figur. Was sind die Symmetrieachsen?

   (d) Zwei parallele Geraden bilden eine achsensymmetrische Figur. Was sind die Symmetrieachsen?

   (e) Konstruiere die Symmetriechsen zweier Geraden, deren Schnittpunkt nicht auf dem Zeichenblatt liegt.

98. Gegeben sind zwei symmetrische Punkte und ihre Achse.

   (a) Konstruiere nur mit dem Lineal den Bildpunkt eines beliebigen Punktes Q.

   (b) Konstruiere das Bild einer Geraden nur mit dem Lineal. Begründe deine Konstruktion.

99. Zeige: Sind in zwei rechtwinkligen Dreiecken die Hypothenusen und die Höhen gleich lang, so sind die Dreiecke kongruent.

Definition 4.1.1 *Ist ein Viereck achsensymmetrisch an einer Diagonalen, so heißt das Viereck Drachenviereck oder Drache.*

100. Konstruiere einen Drachen, von dem gegeben sind:

   (a) $[AB]$ ist 3cm, $[BC]$ 4cm und $[BD]$ ist 5cm lang.

   (b) $[AB]$ ist 3.5cm, $[AC]$ 7cm und $[BD]$ ist 5.6cm lang.

   (c) $[AC]$ ist 6.8cm BD 5.2cm und Winkel $DAB = 100^0$.

   (d) $[AC]$ ist 8cm lang. Winkel $DAB = 84^0$ und Winkel $ABC = 110^0$.

101. Berechne die fehlenden Winkel eines Drachens $ABCD$, wenn gegeben sind:

   (a) Winkel $DAB = 86^0$.

   (b) Winkel $ABC = 110^0$.

   (c) Winkel $DAB = 98^0$.

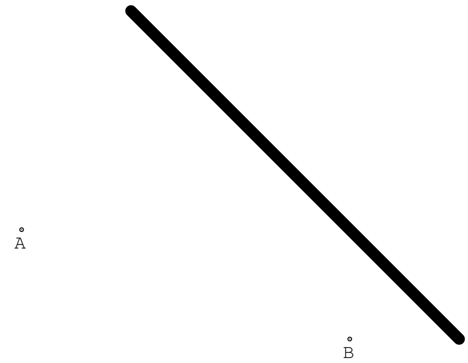
   (d) Winkel $BCD = 64^0$.

102. Zeige: Ist ein Drache ein Prallelogramm so ist er schon eine Raute. Eine Raute ist ein Viereck in dem alle vier Seiten gleich lang sind.

103. Zeige: Hat ein Kreis um M mit einer Geraden g genau einen Schnittpunkt F, so steht MF senkrecht auf g. In diesem Fall heisst die Gerade g Tangente an den Kreis.

104. Gegeben ist ein Kreis um M mit Radius r. Konstruiere von einem Punkt außerhalb des Kreises Tangenten an den Kreis.

105. Max soll in der Skizze von A nach B laufen und unterwegs in einem Punkt C die Wand berühren. Konstruiere den Punkt der Wand, so dass der Weg von Max möglichst kurz ist.



106. Gegeben ist ein spitzer Winkel mit den Schenkeln g und h. Außerdem ist ein Punkt C im Winkelfeld gegeben. Konstruiere einen Punkt A auf g und einen Punkt B auf h, so dass das Dreieck ABC möglichst kleinen Umfang hat.

107. Im Innern eines Winkel $\angle(g, h)$ sind zwei verschiedene Punkte. Konstruiere einen Punkt C auf D und einen Punkt Q auf h, so dass das Viereck $ABCD$ minimalen Umfang hat. Wann existiert ein solches Viereck?

108. (schwer! Das Problem von Fagano:[QS86, Seite 21]). Einem spitzwinkligen DReieck soll ein Dreieck mit minimalem Umfang einbeschrieben werden. Zeige: Diese DReieck ist das Höhenfusspunktdreieck.

109. Das Rechteck $ABCD$ stellt einen Billardtisch mit den Banden $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ und $[DA]$ dar. Die Punkte P und Q sind Billardkugeln. Die Kugel P soll so gestoßen werden, dass sie nach zweimaliger Reflexion an den Banden die Kugel Q trifft. Konstruiere die Bahn der Kugel.

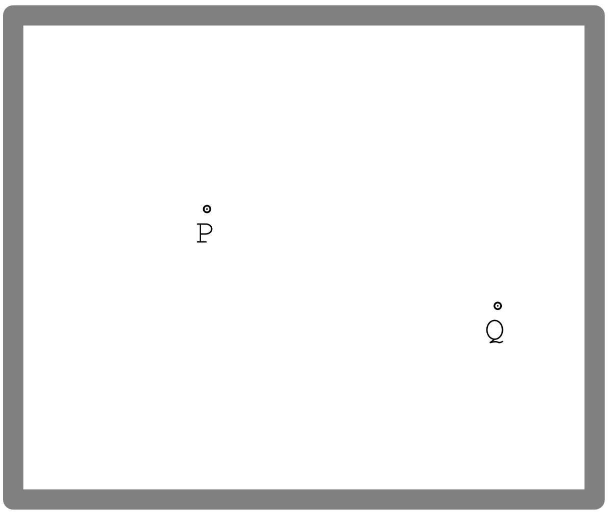


Abbildung 4.1: Billard

4.2 Punktspiegelung

Wir wollen jetzt an zwei Achsen hintereinander spiegeln. Ist die erste Achse g und die zweite Achse h, so schreibt man $S_h \circ S_g$. Die Achsen g und h mögen aufeinander senkrecht stehen.

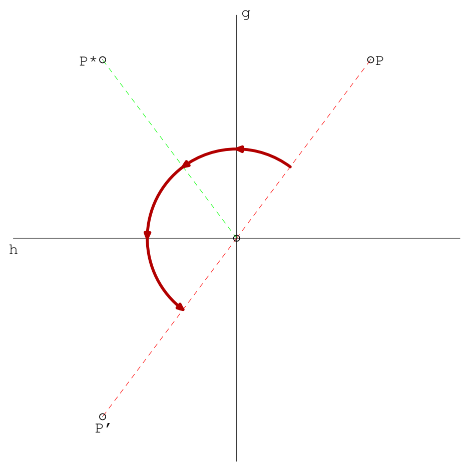


Abbildung 4.2: Punktspiegelung

Satz 4.2.1 *Zwei Geraden g und h, die senkrecht aufeinander stehen, schneiden sich in M. Es gehe P bei der Doppelspiegelung an zunächst g und dann h in P' über. Dann gilt:*

1. $\overline{PM} = \overline{P'M}$.
2. $\sphericalangle PMP' = 180^0$.

Beweis: Es ist □

Index

Literaturverzeichnis

[Gal82] Galileo Galilei. *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme Das Ptolemäische und das Kopernikanische.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1982.

[QS86] Eberhard Quaisser and Hans-Jürgen Sprengel. *Extrema.* Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1986.