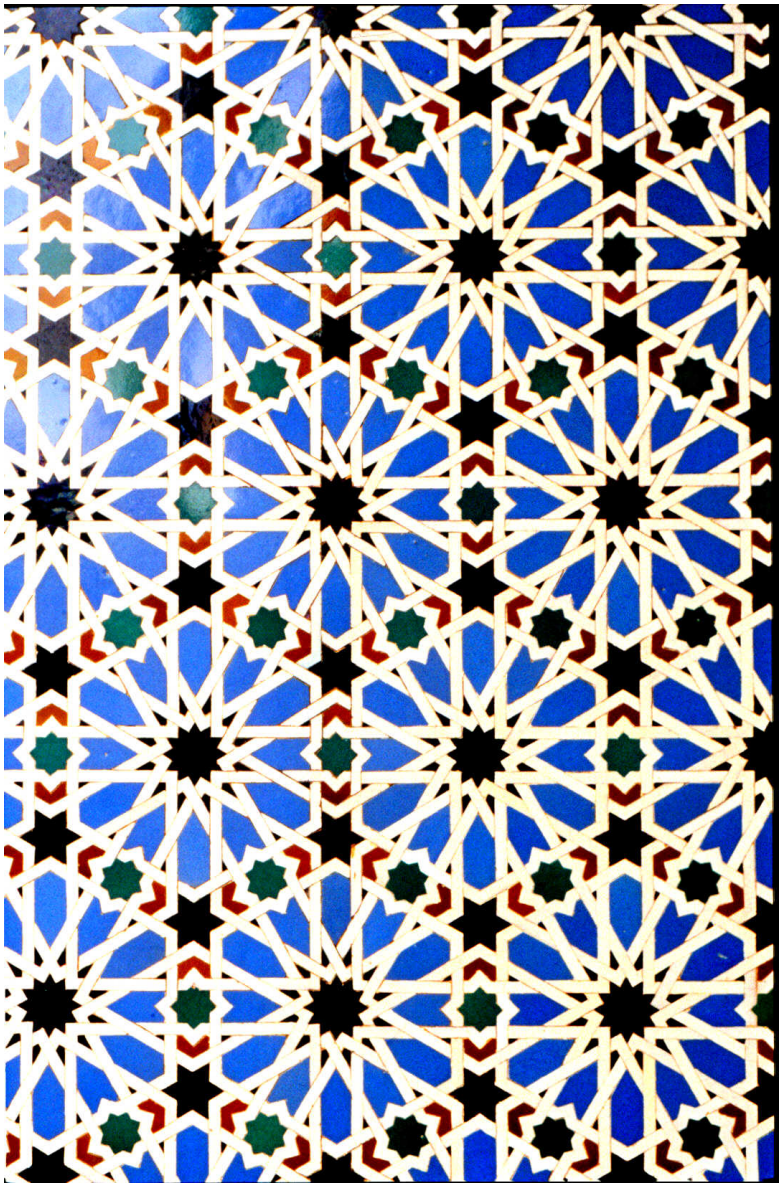
Innen — Außen — Grenzen

Andreas Bartholomé
84028 Landshut
Schirmgasse 275



Zuletzt bearbeitet am 15. März 2017

1 Mengenlehre

.

- „Nimmer noch gab es den Mann und nimmer wird es ihn geben, der die Wahrheit erkannt von den Göttern und allem auf Erden. Denn auch wenn er einmal das Rechte vollkommen getroffen, wüsste er selbst es doch nicht. Denn Wähnen nur ist uns beschieden“ Xenophanes nach Capelle, *Die Vorsokratiker*, Seite 125.
- „Die Götter haben den Sterblichen nicht von Anfang alles offenbart, sondern erst nach und nach finden diese suchend das Bessere“
- „Nullus enim desiderio et studio in aliquid tendit nisi sit praecognitum “ – Niemand nämlich richtet sich in seinem Verlangen und Streben auf etwas, das ihm nicht vorweg bekannt ist Aquin, *Summe gegen die Heiden*, 5.Kapitel Seite 17.

Mathematik treiben ist nachdenken. Wie das Wort sagt, heißt dies nachher denken. Es ist schon eine geistige Welt vorhanden über die erneut nachgedacht wird. Da ist keine leere Tafel, auf die wir unsere neue Lehre schreiben. Eine neue Lehre, die alles widerspruchsfrei erklärt. Wir haben immer schon Vorurteile, die wir zunächst ohne zu denken übernehmen. Das ist nichts schlechtes. Ja es macht Nachdenken erst möglich. Denn wir können nicht alle unsere überlieferten Urteile in Frage stellen ohne den Boden zu verlieren. Diese vorläufigen Urteile heißen im Nachhinein stets naiv. Aber sie sind notwendig. Nur darf man nicht dabei stehen bleiben. An manchen Stellen diese Büchleins werden wir zunächst den naiven Standpunkt einnehmen und erst später eine feinere Version der Weltsicht erarbeiten. So zunächst mit der Mengenlehre. Sie ist eigentlich eine strenge Theorie, die auf einer Menge genauer Axiome gründet. Aber vieles können wir einsehen ohne die Axiome genau zu kennen. Ja diese Axiome werden nur verstanden, wenn die Theorie schon zu einem gewissen Grad erarbeitet wurde. Diesen Zustand müssen wir abwarten. Der Begriff einer „Menge von Objekten“ leuchtet ein. Mit dieser Vorstellung im Rucksack und der nötigen Sorgfalt lässt sich schon eine Strecke wandern. Beleuchten wir dann den Begriff der Menge im Lichte der Erfahrung, die wir bis dahin gesammelt haben, so werden wir die schließlich die Axiome in völlig natürlicher Weise entdecken. Gewöhnlich wird diese anfängliche Art Mengen zu betrachten „Naive Mengenlehre“ genannt. So wollen auch wir diese anfänglichen Überlegungen

nennen. Sind wir eine Weile im Mengendom gewandert erahnen wir seine Räume, ist uns einiges schon vorweg bekannt, so werden wir auch die Fundamente betrachten und vom Grunde auf die geistige Kathedrale zu verstehen suchen. .

1.1 Klassen

1.1.1 Was ist eine Klasse

Wir leben in einer großen Welt. Oder lebt die unendliche Welt in uns? Vieles gibt es zu sehen, zu hören, zu schmecken, zu ertasten, zu sinnen und nachzusinnen. Unser Kopf ist klein. Um ein wenig die Vielfalt zu ordnen legen wir die Dinge in Schachteln. Nicht in physikalische Schachteln, sondern in begriffliche. Wir nennen sie Klassen. Besondere Klassen heißen Mengen. Der Begründer der Mengenlehre Georg Cantor sagt dazu:

> „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden zu einem Ganzen.“

Dies ist keine Definition. Cantor erklärt kein unbekanntes Wort durch bekannte Worte. Sondern in der Erklärung kommen wieder unbekannte Dinge vor. So wird von „Zusammenfassung“ geredet. Was heißt das? Wer fasst zusammen? Dürfen wir beliebig zusammenfassen? Wann sind Dinge wohlunterschieden? Zwei Menschen sind wohlunterschieden. Auch noch eineiige Zwillinge würde man als wohlunterschieden bezeichnen. Sind genetisch gleiche Zellen wohlunterschieden? Sind zwei Elektronen wohlunterschieden? Was gehört alles zu unserer Anschauung, zu unserem Denken? Was ist ein „Ganzes“? Ist die Menschheit, ein Staat, oder ein Ameisenhaufen ein „Ganzes“?

Abb. 1.1: Ameisenhaufen

Durch die Definition oder besser Erläuterung werden viele Fragen gestellt, aber wenige beantwortet. Dies ist eine Stärke der Erläuterung. Sie weckt im Leser eine Fülle von Bildern. Sie lässt ihn Beziehungen ahnen und knüpfen. Sie regt zum Nachdenken zum „Wähnen“ an.
Richard Dedekind spricht in seiner Schrift ‘Was sind und was sollen die Zahlen“ nicht von Mengen, sondern von Systemen. Auch er kann nicht „definieren“ was ein System ist. Er erläutert zunächst was ein „Ding“ ist Oder sagen wir vorsichtig: Er erweckt im Leser eine grobe Vorstellung, was er sich als Ding vorzustellen hat.

15. März 2017

> In folgendem verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens ... Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen* 'Ein Ding ist vollständig bestimmt, durch alles was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann.

Auch hier fragt sich der nachdenkliche Leser. Wer kann alles über ein Ding aussagen. Bei welchen Dingen kann man sich sicher sein, dass sie vollständig bestimmt sind. Ist eine Ameise ein Ding. Was kann alles über Ameisen ausgesagt werden? Bücher sind damit gefüllt worden und sicher ist: Das Papier wird nicht ausreichen um alles auszusagen, was über Ameisenhaufen gesagt werden kann. Wir kommen ins Uferlose.

> Es kommt sehr häufig vor, dass verschiedene Dinge a,b,c... aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden und man sagt dann, dass sie ein System bilden. Man nennt die Dinge a,b,c,... die Elemente des Systems S. Sie sind enthalten in S

Hierzu macht er die interessante Fußnote:

> Auf welche Weise dies Bestimmtheit zustande kommt, und ob wir einen Weg kennen, um hierüber zu entscheiden, ist für alles folgende gänzlich gleichgültig; die zu entwickelnden allgemeinen Gesetze hängen davon gar nicht ab, sie gelten unter allen Umständen. Ich erwähne dies ausdrücklich, weil Herr Kronecker vor kurzem (in Band 99 des Journals für Mathematik, S 334 336) der freien Begriffsbildung in der Mathematik gewisse Beschränkungen hat auferlegen wollen, die ich als nicht berechtigt anerkenne.... (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite 2)

Etwas später formuliert Felix Hausdorff knapper: (Brieskorn, *Felix Hausdorff zum Gedächtnis*, Seite 72)

> „Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, das heißt zu einem neuen Ding."

Aber ich fragte schon: Darf man beliebig zusammenfassen? Kann man jede mögliche Ansammlung von Dingen wieder als neue Entität auffassen? Gauß hätte dies noch abgelehnt. Verbote sind aber ärgerlich. Hier halten wir es mit Richard Dedekind in der Auseinandersetzung mit Kronecker. Wir wollen nur die Verbote annehmen, die uns notwendig erscheinen. Alles andere ist Freiheitsberaubung.
Noch einen anderen Gesichtspunkt gilt es zu beachten. Kann man die etwas nebelhaften Umschreibungen von dem, was Mengen sind nicht als eine Aufforderung zm Nachdenken auffassen. So etwa in der folgenden Art. Lieber Verehrer

der Mathematik. Du möchtest die Welt verstehen. Fasse Dinge die inteessieren zusammen. Ordne sie in Regalsysteme ein. Denke über diese Zusammenfassungen nach. Manche Ordnungssysteme sind sinnvoll andere stiften nur noch mehr Verwirrung. Denke auch über die Beziehungen zwischen den Regalsystemen nach.
Durch Beispiele lernt es sich am leichtesten. Bei den Beispielen setzen wir die Kenntnis der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen vorraus. Außerdem werden wir oft geometrische Beispiele verwenden. Die Beispiele sollen aber beim bauen des Lehrgebäudes nicht in den Fundamenten vermauert werden. Sondern die Fundamente sollen so begründet werden, dass sie die Beispiele, die schon bekannte mathematische Welt und weiteres tragen.
Ist eine Menge A gegeben, so hat ein Ding des Universums die Eigenschaft in der Menge zu sein oder nicht. Wir schreiben dafür

$$a \in A$$

Dies ist eine Eigenschaft, die dem Paar (a, A) zukommt. Am besten wird man mit dieser Sprech- und Schreibweise durch Beispiele vertraut.
$1 \in \{1, 2\}$, $5 \notin \{2, 3\}$, $5 \in \{x | x \text{ ist natürliche Zahl }\}$.
In den ersten beiden Beispielen sind die Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente gegeben. Normalerweise ist dies unmöglich, einfach weil der Platz auf dem Papier nicht reicht. Die viel wichtigere Mengendefinition ist folgende: Wir betrachten eine Fülle von Dingen in unserem Universum und eine bestimmte Eigenschaft. Beispielsweise die Eigenschaft eines Dinges ein Mensch zu sein. Dann können wir die Menge der Menschen betrachten. Die Menge der Menschen ist $\{x | x \text{ ist ein Mensch }\}$

1. $\{x | x \text{ ist Tulpe }\}$
2. $\{x | x \text{ ist natürliche Zahl und durch 2 teilbar }\}$
3. $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 25\}$. Dies ist die Kreislinie mit Radius 5 um den Nullpunkt.

Ich will ein paar Abkürzungen einführen:

Definition 1. A, B seien Klassen. A heißt Teilklasse von B genau dann, wenn für alle $a \in A$ auch $a \in B$ ist. Es wird geschrieben $A \subset B$.

Die Teilmengenbeziehung hat die folgende Eigenschaft:

Bemerkung 1 1. $A \subset A$.

15. März 2017

2. $A \subset B$ und $B \subset C$, dann ist $A \subset C$ □

Definition 2. Zwei Klassen A, B heißen gleich genau dann, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ ist.

Damit diese Definitionen nicht inhaltsleer sind, muss mindestens eine Klasse oder Menge vorhanden sein. (Warum gibt es etwas und nicht vielmehr nichts? Heidegger) Wir fordern also als Glaubenssatz:

Es gibt eine Menge, die kein Element enthält. Die leere Menge. Wir bezeichnen sie mit $\emptyset$

Es gibt also eine leere Schachtel.
Bei den Aufgaben setze ich zunächst in naiver Weise voraus, dass die Leserin weiß was die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist. Auch sollte er schon die vollständige Induktion beherrschen. Erst später werden wir sie exakt begründen.
Aufgaben:

1. a) Schreibe alle Teilmengen von $\{n, i, l, s\}$ auf.
   b) Wieviel Teilmengen hat $\{c, a, n, t, o, r\}$
   c) Wieviel Teilmengen hat $\{0, 1, \ldots, 100\}$?
   d) Wieviel Teilmengen mit 2 Elementen hat $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.
   e) Wieviel Teilmengen mit drei Elementen hat $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.
2. a) Die leere Menge ist eindeutig bestimmt.
   b) Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.

1.1.2 Bemerkungen, Lesefrüchte

- Eigene Bemerkung: Es gibt mindestens zwei Arten des Verstehens:
  - Vom Grunde her: Reden wir vornehm, so sagen wir: Das kausale Verstehen. Erklären wir einen Sachverhalt von den Fundamenten her- fangen bei Adam und Eva an-, so erklären wir kausal. Jeder Lehrer wird die Erfahrung gemacht haben, dass solche Erklärungen oft entsetzlich langweilig und sehr unbefriedigend sind. Es muss erst tagelang die Grundlage der Grundlagen erklärt werden. Fundamente bestehen meist aus grauem Beton. Sie zu betrachten ist öde und hart. Ständig erscheint die Frage: Wozu? Wozu kann man das brauchen? Stets vertröstet der Lehrer auf später. Ist es später geworden hat der Schüler längst die Grundlagen vergessen.

- Die zweite Möglichkeit der Erklärung oder besser Antwort auf die Frage warum ist: Vom Ende her. Der Befragte gibt eine teleologische Antwort. Warum fastest du? Damit ich mir Verdienste im Himmelreich erwerbe. Oder: Warum nimmst Du ein Glas in die Hand? Weil ich Wein trinken möchte. Meist ist die Antwort befriedigender. Aber es gibt Situationen in der die erste Antwort wesentlich zur Klärung beiträgt.
- Darf man beliebig zusammenfassen? Ich zitiere nach Störing (Siehe Störig, *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*, Seite 241)

  > In der Einleitung zu der im frühen Mittelalter allgemein gebräuchlichen Ausgabe der Kategorienlehre des Aristoteles — von dem Schüler des Plotin Porphyrius, in der lateinischen Übersetzung durch Boethius— heißt es es „ Was nun die Genera und species (Gattungen und Arten) betrifft, so werde ich über die Frage ob sie substituieren (existieren) oder ob sie bloß und allein im Intellekt existieren, ferner falls sie existieren, ob sie körperlich oder unkörperlich sind und ob sie getrennt von den Sinnendingen oder nur in den Sinnendingen und an diesen bestehend sind, es vermeiden, mich zu äußern, denn eine Aufgabe wie diese ist sehr hoch und bedarf einer eingehenden Untersuchung“

  Ob Dinge einfach zusammengefasst werden können zu neuen Dingen wurde und wird heftig diskutiert. Einerseits kann die Welt nur geordnet werden, wenn wir in Schachteln einteilen. Es gibt Nahrhaftes und Giftiges. Im Kopf teilen wir die Welt in Klassen ein. Aber liegt die wirkliche Welt in den von uns gebastelten Schachteln? Existieren die Klassen? Im Mittelalter gab es Denker, die diesen Klassen mehr Existenz (Was immer das ist) zusprachen als den Individuen, aus denen die Klassen bestehen. Zu diesen Philosophen gehörten vor allem:

  * Johannes Scotus Erigena
  * Anselm von Canterbury
  * Wilhelm von Champaux

  Entschiedener Gegner dieser Auffassung war Roscellanus von Compiègne ($\sim$ 1050–1120). Er sagte dass die Wirklichkeit aus lauter Einzeldingen bestehe. Die Allgemeinbegriffe sind von Menschen erdachte Namen, Bezeichnungen, in denen wir einander ähnliche Einzeldinge nach ihren gemeinsamen Merkmalen zusammenfassen. Es gibt nicht „Weiße“ als Allgemeines, das ist ganz sinnlos, es gibt nur

konkrete weiße Gegenstände. Es gibt nicht „Menschheit“, sondern nur Menschen.

Aber sehen wir nicht das Universum im Lichte unserer Zusammenfassungen unserer Mengen. Gäbe es begriffliche Atome, die unzweifelhaft unteilbar sind, könnte man diesem Nominalismus etwas abgewinnen. Aber sehen wir nicht die „Atome“ im Lichte unserer Theorien, unserer Zusammenfassungen, unserer Mengen. Ändern sich unsere Zusammenfassungen, so auch die Atome. Über diese Fragen streiten die Gelehrten seit hunderten von Jahren. Die Kirche, die Unfehlbarkeit des Papstes wurde bemüht um Verbotstafeln aufzustellen. So musste Roscellinus auf der Synode von Soissons (1090-93) seine Thesen über die Dreifaltigkeit widerrufen. Er fasste die Dreifaltigkeit auch nur als menschliche Zusammenfassung auf. Einzig wirklich seien die Individuen in der Gottheit. Dies bedeutete in der Konsequenz ein Glaube an viele Götter.

– Noch Gauß weigerte sich die Menge der natürlichen oder reellen Zahlen als eine Gesamtheit aufzufassen, der man Existenz zusprechen könnte. Er lehnte das aktual Unendliche ab. So schreibt Gauß in einem Brief an Schumacher vom 12. Juli 1831

> So protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welche in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine facon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnis so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.

– Dem setzt Cantor seinen Satz: „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit“ entgegen. Kertéz, *Georg Cantor 1845- 1918 Schöpfer der mengenlehre*, Seite 38

1.1.3 Operationen mit Mengen

Definition 3. Seien A, B Klassen.

1. $A \cup B := \{x | x \in A \text{ und } \in B\}$ heißt Vereinigung der beiden Mengen. Dabei ist „oder“ im Sinne von „oder auch “ gemeint.

2. $A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$ heißt Durchschnitt der beiden Mengen.

3. $A \setminus B := \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$ heißt Komplement der Menge B in der Menge A.

Satz 1.1. *Es seien A, B, C Mengen. Dann gilt:*

1. *a) $A \cap B = B \cap A$ und b) $A \cup B = B \cup A$.*
2. *a) $A \cap A = A$ und b) $A \cup A = A$.*
3. *a) $A \cup \emptyset = A$ und b) $A \cap \emptyset = \emptyset$.*
4. *a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und b) $(A \cup B) \cup C = A \cup B(\cup C)$.*
5. *a) $A \subset A \cup B$ und b) $A \cap B \subset A$.*

Ich beweise nur 4a). Alles andere ist genauso einfach und eine gute Fingerübung. Wir müssen zeigen: $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Sei $x \in A \cap (B \cap C)$ Dann ist $x \in A$ und $x \in B \cap C$. Das bedeutet $x \in A$ und $x \in B$ und $x \in C$. Dies ergibt $x \in A \cap B$ und $x \in C$. Das bedeutet $x \in (A \cap B) \cap C$. Also ist $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Genauso ergibt sich die andere Teilmengenbeziehung. Wir sagen dazu auch die andere Inklusion. □

Satz 1.2 (Distributivgesetze). 1. *$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*

2. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.*

Definition 4. Zwei Mengen mit leerem Durchschnitt heißen disjunkt. Ist $A \subset \Omega$ so sei $\overline{A} = \{x | x \in \Omega \text{ und } x \notin A = \Omega \setminus A$, die Komplementmenge von A in Ω

Es gelten die Regeln von Morgan:

Satz 1.3 (Regeln von Morgan). *Seien $A, B \subset \Omega$. Dann gilt:*

1. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.*
2. *$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Zu 1: Sei $x \in \overline{A \cup B}$. Dann ist $x \notin (A \cup B)$, also $x \notin A$ und $x \notin B$. Also ist $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Daher ist $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Sei nun $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Daher ist $x \notin A$ und $x \notin B$. Das bedeutet $x \notin A \cup B$ oder $x \in \overline{A \cup B}$. Also ist $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

Aufgaben:

3. Beweis die zweite morgansche Regel.
4. A, B seien Mengen. Zeige:
   a) $A \cap B$ ist die größte Menge, die in A und in B enthalten ist.
   b) $A \cup B$ ist die kleinste Menge, die A und B enthält.

1.1.4 Paarmenge und Potenzmenge

Eine der ersten geistigen Tätigkeiten ist Zuordnen. Wir legen die rechte Hand auf die Linke, sehen so, dass die Finger der rechten Hand, den Fingern der linken Hand entsprechen. Mein Enkel Lasse zeigt auf einen Bagger und spricht das Wort „Bagga“ aus. Dadurch macht er mit seinem Zeigefinger auf einen Gegenstand aufmerksam, der ihn interessiert und zugleich stellt er die Frage: Nennt man das Ding, auf das ich zeige, „Bagga“? Er fragt also ob das die gebräuchliche Zuordnung von Lautkombination zu einem Ding der Außenwelt ist.
Wir ordnen den Müttern ihre Kinder zu und umgekehrt den Kindern ihre Mütter. Auch wenn ein Ding in einer Menge ist, $a \in M$, so kann dies als Zuornung aufgefasst werden. Wir ordnen dem Element a eine zugehörige Menge zu. Auch das umgekehrte geht. Eine solche Zuordnung ist mit mit einer Handlung des Zeigens verbunden. Man zeigt mit dem Zeigefinger oder einem Pfeil. So zeigt die Mutter der Menschheit Eva auf ihre Söhne:

$$\begin{tikzcd} & \text{Eva} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \text{Kain} & \text{Abel} & \text{Set} \end{tikzcd}$$

Wenn wir Zeiger in der Mengensprache ausdrücken wollen, müssen wir mit den sprachlichen Mitteln der Mengenlehre sagen, was ein Pfeil ist. Dazu gehört auf jeden Fall der Anfang und die Spitze des Pfeiles $\bullet a \to \bullet b$ Der Anfang des Pfeiles ist in unserem Bild „a“ und die Spitze des Pfeiles - das Ding, auf das der Pfeil zeigt - ist „b“. Es ist also notwendig die Menge $\{a, b\}$ ↺↻ bilden können.

(Paarmengenaxiom) *Zu je zwei Dingen [1] a und b gibt es eine Menge, die genau a und b enthält.*

Sind a, b Mengen, so ist $\{a, b\}$ eine Menge. Zwei Fächer können in einem weiteren Fach liegen.
Da es bei Mengen nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, ist $\{a, b\}$ noch keine geignete Darstellung eines Pfeiles. Der Ausgangspunkt des Pfeiles muss noch festgelegt werden. So betrachtet man beispielsweise die euklidische Ebene als Menge von Zahlenpaaren. Dabei kommt es auf die Reihenfolge an. Es genügt also nicht die Paarmenge zu betrachten $\{x, y\}$.
Der Pole Kazimierz Kuratowski (1896 bis 1980) erklärte trickreich folgendermaßen:

[1] Wer lieber nur von Mengen redet, ersetze „Dinge“ durch „Mengen“

Definition 5. Sind x, y Mengen so ist $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ das Paar mit erster Komponente x und zweiter Komponente y.

Aus dieser Darstellung können wir eindeutig Ende und Spitze des Pfeiles ablesen.

Satz 1.4. *Ist $(x, y) = (u, v)$, so ist $x = u$ und $y = v$.*

Sei $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Also ist $\{x\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\}$

1. $\{x\} = \{u\}$ also $x = u$. Dann ist $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, v\}\}$. Es kann nun $\{x, y\} = \{x\}$ oder $\{x, y\} = \{x, v\}$ sein.
   a) $\{x, y\} = \{x\}$. Also ist $x = y$ und damit $v = x$. Also $v = y$.
   b) $\{x, y\} = \{x, v\}$. In diesem Fall folgt auch $y = v$.
2. $\{x\} = \{u, v\}$. Es folgt $x = u = v$. Also ist $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}\}$. Also ist $\{x, y\} = \{x\}$. Daher muss $y = x = v$ gelten. □

Aufgaben:

5. Schreibt man etwa zur Abkürzung $0 = \emptyset$ und $1 = \{\emptyset\}$ so kann man das Paar bestehend aus x und y auch so erklären: $(x, y) := \{\{x, 0\}, \{y, 1\}\}$. Zeige. Auch diese Definition erfüllt die entscheidende Eigenschaft für Paare: $(x, y) = (u, v)$ dann ist $x = u$ und $y = v$. Diese Art der Paarbildung stammt von Hausdorff.

Für die weitere Begriffsbildung ist das folgenden Mengenbildungsaxiom noch von entscheidender Bedeutung:

(Potenzmengenaxiom) *Zu jeder Menge A gibt es die Menge aller Teilmengen von A.* $\mathfrak{P}(A) = \{B | B \subset A\}$

1.1.5 Rechnen in Lisp mit Mengen

Zumindest in Emacs Lisp stehen keine Funktionen zur Verfügung um mit Mengen zu rechnen. Wir müssen sie also selbst programmieren. Wir können nur Listen von Elementen verwenden. Bei Ihnen kommt es auf die Reihenfolge an. Auch können die gleichen Elemente an verschiedenen Plätzen vorkommen und die so entstehenden Listen unterscheiden sich. So ist `(1,2,3,1)` durchaus was anderes als `(2,3,1)`. Um eine Liste als Menge zu interpretieren müssen also doppelte Elemente entfernt werden. Dies geschieht mit der folgenden Funktion.

```
(defun menge(a)
  "Die Funktion beseitigt aus der Liste
  alle doppelten Elemente"
 (let ((b nil))
  (while a (if (not (member (car a) b))
             (setq b (cons (car a) b))
           )
        (setq a (cdr a))
 )
 b)
)
```

Ein Aufruf der Funktion sieht so aus:

```
(menge (list 1 2 3 1 'a))

(a 3 2 1)
```

Ich möchte hier ein paar Erklärungen anbringen:

- Es wird zunächst die leere Liste `b` angelegt.
- Aus der Liste `a` betrachten wir das erste Listenelement und schauen nach, ob es schon in der Liste `b` vorkommt.
  - Ist dies nicht der Fall wird es an die Liste `b` vorne dran gehängt, und die Liste `a` wird um das erste Element verkürzt.
  - Andernfalls wird die Liste `a` um das erste Listenelement verkürzt.
- Dies wird solange gemacht bis die Liste `a` leer ist. Die Liste `b` wird als Funktionsergebnis zurückgegeben.

```
(defun union(a b)
  "Die Funktion bildet die Vereinigung zweier Mengen"
  (while a
         (if (not (member (car a) b))
             (setq b (cons (car a) b)))
         (setq a (cdr a)))
  b)
```

1.2 Beziehungen

> „Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist“Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite V

Wir können verschiedene Dinge aufeinander beziehen. Abel war Bruder von Kain genauso Petrus Bruder von Andreas. Max war Freund von Moritz. Mit allen Beziehungen ist eine Paarbildung verbunden. Mit den begrifflichen Hilfsmitteln, die uns bisher zur Verfügung stehen können wir nur mit Hilfe von Mengen erklären, was genau eine Beziehung ist.

Bemerkung 2 Sind $a \in A$ und $b \in B$, so ist das Paar $(a, b) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$ □

Jetzt können wir die Menge aller Paare bilden.

Definition 1 Sind A, B Mengen, so ist $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$ □

1.2.1 Korrespondenzen

Sind A, B Mengen, so heißt jede Teilmenge von $f \subset A \times B$ *Korrespondenz* von A nach B oder auch „aus A in B“. Man kann dies so deuten. Von manchen Elementen aus A weisen Pfeile auf Elemente aus B.

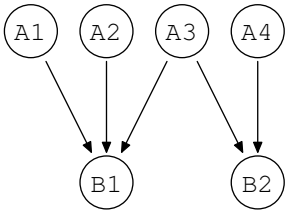


Abb. 1.2: Korrespondenz

Definition 2 Ist $f \subset A \times B$ eine Korrespondenz, so heißt A Quelle der Korrespondenz. B heißt Ziel. $D(f) := \{a | \exists b \in B : (a, b) \in f$ heißt Definitionsbereich. $B(f) = \{b | \exists a \in A : (a, b) \in f\}$ heißt Bildmenge.

Der Definitionsbereich ist die Menge Elemente aus A, von denen Pfeile ausgehen. Aus dem Definitionsbereich zielen die Pfeile in die Bildmenge. Kein Pfeil weist ins Leere. Ein Beispiel für eine Korrespondenz ist: Sei V = Menge der Väter, S = Menge der Söhne, so ist $v = \{(a,b)|b \text{ ist Sohn von } a\}$ eine Korrespondenz. Eine besondere Korrespondez ist die Identität. $1_A := \{(a,a)|a \in A\}$. Hängt man Pfeile aneinander erhält man eine weitere Korrespondenz. Ich will es genauer sagen.

Definition 3 Seien $f \subset A \times B$ und $g \subset B \times C$ Korrespondenzen von $A \to B$ beziehungsweise $B \to C$.

$$g \circ f := \{(a,c)|a \in A, c \in C \wedge \text{ es gibt } b \in B : (a,b) \in f \wedge (b,c) \in g\}$$

heißt Verkettung der Korrespondenzen. □

Betrachten wir obiges Beispiel, so ist $v \circ v = \{(a,c)|a \text{ ist Opa von } c\}$.

Satz 1.5. *Sind $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Korrespondenzen, so gilt:*

1. $f \circ 1_A = f$ *und* $1_B \circ f = f$.
2. $h \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f$.

Seien $f \subset A \times B$ $g \subset B \times C$ und $h \subset C \times D$ Korrespondenzen. Weiter sei $(a,d) \in h \circ (g \circ f)$. Es gibt also ein $c \in C$ mit $(a,c) \in g \circ f$ und $(c,d) \in h$. Es gibt daher ein $b \in B$ mit $(a,b) \in f$ und $(b,c) \in g$. Daher gibt es ein $b \in B$ und ein $c \in C$ mit $(a,b) \in f$ $(b,c) \in g$ und $(c,d) \in h$. Daher gibt es $b \in B$ mit $(a,b) \in f$ und $(b,d) \in h \circ g$. Also ist $(a,d) \in (h \circ g) \circ f$. Also ist $h \circ (g \circ f) \subset (h \circ g) \circ f$. Da die Schlüsse in beiden Richtungen richtig sind, folgt auch die umgekehrte Inklusion. Die Verkettung ist daher asssoziativ. Ist $1_A = \{(a,a)|a \in A\}$ so erkennt man, dass I_A neutral bezüglich dieser Verkettung ist. □

Dreht man die Pfeile einer Korrespondenz um, so erhält man die transponierte Korrespondenz.

Definition 4 Zu jeder Korrespondenz $f \subset A \times B$ gehört die transponierte Korrespondenz $T(f) = \{(b,a)|(a,b) \in f\} \subset B \times A$. □

Satz 1.6. *Es gilt:*

1. $T(1_A) = 1_A$.
2. $T(T(f)) = f$.

3. *$f \subset A \times B$ und $g \subset B \times C$, dann ist $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$*

Satz 1.7. *Für eine Korrespondenz $f \subset A \times B$ sind äquivalent:*

1. *Zu jedem $b \in B$ gibt es höchstens ein $a \in A$ mit $(a, b) \in f$. Bei jedem $b \in B$ endet also höchstens ein Pfeil.*

2. *$T(f) \circ f \subset 1_A$.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $(a, a') \in T(f) \circ f$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ und $(b, a') \in T(f)$. Also sind (a', b) und $(a, b) \in f$. Also ist $a = a'$. Das heißt $T(f) \circ f \subset 1_A$.
2. $\Longrightarrow$1. Sei (a, b) und $(a', b) \in f$. Dann ist $(b, a') \in T(f)$. Also ist $(a, a') \in T(f) \circ f \subset 1_A$. Daher ist $a = a'$. □

Definition 5 $f \subset A \times B$ heißt injektiv, wenn eine der Aussagen des Satz 1.7 auf die Korrespondenz zutrifft. □

Satz 1.8. *Für eine Korrespondenz $f \subset A \times B$ sind äquivalent:*

1. *Zu jedem $b \in B$ gibt es mindestens ein $a \in A$ mit $(a, b) \in f$. Jedes $b \in B$ wird also getroffen.*

2. *$1_B \subset f \circ T(f)$*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $(b, b) \in 1_B$. Zu b gibt es ein a mit $(a, b) \in f$. Daher ist $(b, a) \in T(f)$. Also ist $(b, b) \in f \circ T(f)$. Das heißt $1_B \subset f \circ T(f)$.
2. $\Longrightarrow$1. Sei $b \in B$. Es ist $(b, b) \in f \circ T(f)$. Daher gibt es ein $a \in A$ mit $(b, a) \in T(f)$ und $(a, b) \in f$. Bei b endet also ein Pfeil aus A. □

Definition 6 Eine Korrespondenz $f \subset A \times B$ heißt surjektiv, wenn sie die Eigenschaften des Satzes 1.8 erfüllt. Sie heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist. □

Folgerung 1.9. 1. *Die Verkettung injektiver Korrespondenzen ist injektiv.*

2. *Die Verkettung surjektiver Korrespondenzen ist surjektiv.*

3. *Die Verkettung bijektiver Korrespondenzen ist bijektiv.*

Zu 1.: Sei $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei injektive Korrespondenzen. Und $(a, c), (a', c) \in g \circ f$. Dann gibt es $b.b' \in B$ mit $(b, c) \in g$ und $(b', c) \in g$ mit $(a, b) \in f$ und $(a', b') \in f$. Da g injektiv ist, ist $b = b'$ und daher ist $a = a'$. Also ist $g \circ f$ injektiv. Genauso zeigt man den zweiten Teil des Satzes. Der dritte Teil ergibt sich dann. □

15. März 2017

1.2.2 Funktionen

Satz 1.10. *$f \subset A \times B$ eine Korrespondenz. Äquivalent sind:*

1. *$T(f)$ ist bijektiv.*
2. *Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $(a, b_1), (a, b_2) \in f$. Dann ist $(b_2, a) \in T(f)$. Also $(b_2, b_1) \in f \circ T(f) \subset 1_B$. Also ist $b_2 = b_1$.
2. $\Longrightarrow$1. Klar. □

Definition 7 Eine Korrespondenz $f \subset A \times B$ heißt Funktion, wenn $T(f)$ bijektiv ist. Ist $(a, b) \in f$, so schreiben wir $f(a) = b$. Es wird geschrieben $f : A \to B$.

Ist $f : A \to B$ eine Funktion, so geht von jedem Element aus A genau ein Pfeil aus. Funktionen sind die wichtigsten Korrespondenzen. Zwei Funktionen $f, g : A \to B$ sind gleich, wenn für alle $a \in A$ gilt $f(a) = g(a)$. Beispiele von Funktionen kennt jeder. Zu jeder Menge A ist die Identität von A eine Funktion von A nach A. Die Verlettung von Funktionen ist eine Funktion. Ist $U \subset A$, so bezeichnet $\iota \colon U \ni x \mapsto x \in A$ die Inklusionsfunktion.
Die Klasse der Mengen zusammen mit den zugehörigen Abbildungen bilden eine Kategorie. Ich bezeichne die Menge der Abbildungen von A nach B mit $Abb(A, B)$

Satz 1.11. *Für eine Funktion $A \xrightarrow{f} B$ sind äquivalent:*

1. *f ist injektiv.*
2. *$T(f) \circ f = 1_A$. Dabei ist $T(f)$ die transponierte Korrespondenz. Dies braucht keine Funktion zu sein.*
3. *Für jede Menge C ist die Abbildung*
$$Abb(C, f) : Abb(C, A) \ni g \quad \mapsto \quad fg \in Abb(C, B) \tag{1.1}$$
injektiv
4. *Es gibt eine Funktion $B \xrightarrow{g} A$ mit $gf = 1_A$.*
5. *Für jede Menge C ist die Abbildung*
$$Abb(f, C) : Abb(B, C) \ni g \quad \mapsto \quad fg \in Abb(A, C) \tag{1.2}$$
surjektiv.

1. $\Longrightarrow$2. Da f eine injektive Korrespondenz ist, ist wegen Satz 1.7 $T(f) \circ f \subset 1_A$. Es ist f eine Funktion. Also ist $T(f) : B \to A$ eine surjektive Korrespondenz. Dies bedeutet: $T(f) \circ T(T(f)) = T(f) \circ f \supset 1_A$. Das heißt $T(f) \circ f = 1_A$.
2. $\Longrightarrow$3. Seien $g, h : C \to A$ zwei Abbildungen mit $fg = fh$. Dann ist $T(f) \circ (fg) = T(f) \circ (fh)$. Also ist $g = h$.
3.$\Longrightarrow$1. Sei $f(x) = f(y)$. Ich erkläre die folgenden Abbildungen $g, h : \{1\} \to A$. $g(1) = x$ und $h(1) = y$. Dann ist $fg = fh$ und also nach Voraussetzung $g = h$. Das hinwiederum bedeutet $x = y$.
1. $\Longrightarrow$4. Ich wähle ein festes Element aus A etwa a_0. Ich erkläre folgendermaßen eine Abbildung: $g : B \to A$. Es sei $g = T(f) \cup \{(b, a_0) | b \notin f(A)\}$. Dann ist g eine Funktion und $g \circ f = 1_A$.
4. $\Longrightarrow$5. Sei C irgend eine Menge und $\alpha : A \to C$. Dann ist $\alpha = \alpha(gf) = (\alpha g)f$. Also ist $Abb(f, C)$ surjektiv.
5. $\Longrightarrow$4. Insbesondere ist $Abb(f, A) : Abb(B, A) \to Abb(A, A)$ surjektiv. Es gibt daher ein $g : B \to A$ mit $Abb(f, A)(g) = gf = 1_A$. 4. $\Longrightarrow$1. Wie 3 $\Longrightarrow$1. □

Der entsprechende Satz für surjektive Funktionen liegt etwas tiefer. Wir brauchen das sogenannte Auswahlaxiom. Aber bevor wir es formulieren beschäftigen wir uns mit Zerlegungen von Mengen in elementfremde Mengen und Koprodukten.

1.2.3 Zerlegung von Mengen

Ist der Durchschnitt zweier Mengen $A \cap B = \emptyset$ leer, so heißt die Vereinigung der beiden Mengen $A \cup B$ disjunkte Vereinigung . Ich bezeichne sie mit $A \sqcup B$. Wir können diese Eigenschaft der Menge $A \sqcup B$ auch durch Funktionen kennzeichnen. Dazu bezeichne ich $q_A \colon A \ni a \mapsto a \in A \sqcup B$ und $q_B \colon B \ni b \mapsto A \sqcup B$ die beiden Injektionen in die disjunkte Vereinigung. Wir haben dann folgenden Satz.

Satz 1.12. *Sei die Menge $A \cup B$ gegeben. Es sind äquivalent:*

1. *Die Vereinigung ist disjunkt.*
2. *Zu jeder Menge C und jedem Paar $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$, gibt es genau ein $A \sqcup B \xrightarrow{h} C$ mit $hq_A = f$ und $hq_B = g$.*
3. *Sei $C = \{0, 1\}$. Zu den beiden konstanten Abbildungen $k_0 \colon A \ni a \mapsto 0 \in C$ und $k_1 \colon B \ni b \mapsto 1 \in C$ gibt es genau eine Abbildung $A \sqcup B \xrightarrow{h} C$ mit $hq_A = k_0$ und $hq_B = k_1$.*

$1 \Longrightarrow 2$. Seien $A \xrightarrow{f} C$ und $B \xrightarrow{g} C$ zwei Abbildungen mit gleichem Ziel. Ich erkläre:

$$h\colon A \sqcup B \ni x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in A \\ g(x) \text{ falls } x \in B \end{cases} \tag{1.3}$$

Dies ist wohldefiniert, denn die Schnittmenge ist leer. Es ist $hq_A = f$ und $hq_B = g$. Die Eindeutigkeit ist auch klar.
$2. \Longrightarrow 3$. Man muss die Eigenschaft aus 2 nur auf $C = \{0, 1\}$ und die entsprechenden k_0, k_1 anwenden.
$3. \Longrightarrow 1$. Es gibt ein $h\colon A \sqcup B$ mit $hq_A = k_0$ und $hq_B = k_1$. Dann ist $h^{-1}(\{0\}) = A$ und $h^{-1}(\{1\}) = B$. Da $\{0\} \cup \{1\} = \emptyset$ ist, ist auch $A \cup B = \emptyset$ □

Kennzeichnung der Vereinigung durch Funktionen: Dieses Resultat kann in einem gewissen Sinn auf die normale Vereinigung ausgedehnt werden. Nur kommt jetzt eine Zusatzbedingung hinzu.
Seien A und B zwei nicht unbedingt elementfremde Mengen. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "\iota_B"] \arrow[d, "\iota_A"] & B \arrow[d, "q_B"] \arrow[ddr, "g"] & \\
A \arrow[r, "q_A"'] \arrow[drr, "f"'] & A \cup B \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Dabei sind $\iota_A, \iota_B, q_A, q_B$ die jeweiligen Inklusionen.

Satz 1.13. *Unter diesen Vorraussetzungen gilt: Sind $f\colon A \to C$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen mit $f \circ \iota_A = g \circ \iota_B$, so gibt es genau ein h mit $h \circ q_A = f$ und $h \circ q_B = g$*

Ich erkläre:

$$h(x)\colon = \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in A \\ g(x) \text{ falls } x \in B \end{cases}$$

Dadurch ist h wohldefiniert. Denn ist $x \in A \cap B$, so ist ja $x = q_A(\iota_A(x)) = q_B(\iota_B(x))$. Natürlich ist h auch eindeutig bestimmt. □

1.2.4 Partitionen, Äquivalenzrelation

Hat eine Menge mehr als zwei Elemenet, so kann sie auch in eine größere Anzahl von Teilmengen zerlegt werden. So ist:
$M_2\colon \{0,1,2\} = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} = \{0\} \cup \{1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,2\} \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1,2\}$.
Das sind 4 Partitionen der Menge M_2, wenn man M_2 selber nicht mitrechnet. Die genaue Definition einer Partition ist noch nachzutragen.

Definition 6. Es sei X eine nicht leere Menge. Eine Familie (X_i) von nicht leeren Teilmengen von X heißt Partition von X, wenn folgendes gilt:

1. Für $i \neq j$ ist $X_i \cap X_j = \emptyset$.
2. $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = X$.

In diesem Fall schreibe ich $\bigsqcup\limits_{i \in I} X_i$

Fragen:

1. Eine nicht ganz leichte Frage ist: Wieviel Partitionen hat eine Menge mit n Elementen?

Aufgaben:

6. Wieviel Partitionen zu einer Menge mit 4 Elementen gibt es?
7. Wieviel Partitionen einer Menge mit 5 Elementen in 3 nichtleere Teilmengen gibt es?

Ist $(X_i | i \in I)$ eine Familie von Mengen, dann gibt es die konstanten Abbildunen $X_i \xrightarrow{k_i} I$, mit $k_i(x) = i$ für alle $x \in X_i$ und die Injektionen $X_i \xrightarrow{q_i} \bigcup\limits_{i \in I} X_i$. Analog zum Satz 1.12 haben wir:

Satz 1.14. *Sei $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, wobei die $X_i \neq \emptyset$ sind. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *$(X_i | i \in I)$ ist eine Partition von X.*
2. *Zu jeder Familie von Abbildungen $X_i \xrightarrow{f_i} C$ gibt es genau eine Abbildung $X \xrightarrow{f} C$ mit $f \circ q_i = f_i$ für alle $i \in I$.*
3. *Zu den konstanten Abbildungen $X_i \xrightarrow{k_i} I$ gibt es genau ein $h\colon X \to I$ mit $k_i = h \circ q_i$*

15. März 2017

1. $\Longrightarrow$2.: Sei $X_i \xrightarrow{f_i} C$ eine Familie von Abbildungen. Ich erkläre: $f\colon X \to C$ durch $f(x) = f_i(x)$ falls $x \in x_i$ ist. Dies ist sicher eine Abbildung, da jedes x in genau einem X_i enthalten ist. Außerdem ist $f \circ q_i = f_i$.
Sei f' eine weitere solche Abbildung und $x \in X$. Dann gibt es genau ein i, so dass $x \in X_i$ ist. Wir erhalten: $f'(x) = f'(q_i(x)) = f_i(x) = fq_i(x) = f(x)$. Daher ist $f = f'$.
2.$\Longrightarrow$3.: Wir wenden die Aussage von Teil 2 auf die konstanten Abbildungen $X_i \xrightarrow{k_i} I$
3. $\Longrightarrow$1.: Zu den konstanten Abbildungen $X_i \xrightarrow{k_i} I$ gibt es genau ein $X \xrightarrow{h} I$ mit $h \circ q_i = k_i$. Es ist $X_i = h^{-1}(\{i\})$. Da $\{i\} \cap \{j\} = \emptyset$ ist für $i \neq j$. □

Partition zu sein überträgt sich nach „rückwärts“.

Satz 1.15. *Ist $A \xrightarrow{f} B$ eine surjektive Abbildung und $(Y_i | i \in I)$ eine Partition von Y, so ist $(f^{-1}(Y_i) | i \in I)$ eine Partition von X.*

Es ist $Y = \bigsqcup\limits_{i \in I} Y_i$. Da $f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} Y_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$ ist, ist X auf jeden Fall Vereinigung der $X_i := f^{-1}(Y_i)$. Da f surjektiv ist, ist keines der X_i die leere Menge. Bleibt nur zu zeigen, dass $X_i \cap X_j = \emptyset$ ist für $i \neq j$. Gäbe es ein $x \in X_i \cap X_j$, so wäre $f(x) \in Y_i \cap Y_j = \emptyset$. □

Definition 7. Eine Partition $X = \bigsqcup\limits_{i \in I} X_i$ heißt Verfeinerung der Partition $X = \bigsqcup\limits_{k \in K} X_k$, wenn es zu jedem $i \in I$ ein $k \in K$ gibt mit $X_i \subset X_k$.

Jede Partitition gibt Anlass zu einer Relation.

Definition 8. Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt Äquivalenzrelation. Man schreibt meist $a \sim b$, wenn man ausdrücken will, dass zwischen a und b die Relation besteht. Zu jedem $a \in A$ gehört die Menge $[a] := \{b | a \sim b\}$. Sie heißt die von a erzeugte Äquivalenzklasse.

Satz 1.16. *Für eine Relation $\sim$ auf A sind äquivalent:*

1. *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*
2. *Es gilt:*
   a) *Für alle $a, b \in A$ gilt:$[a] = [b] \iff a \sim b$.*
   b) *A ist disjunkte Vereinigung der verschiedenen Äquivalenzklassen von A.*

1. $\Longrightarrow$2.: Da $\sim$ eine transitive Relation ist folgt aus $a \sim b$ $[b] \subset [a]$. Da $\sim$ auch symmetrisch ist folgt auch $[a] \subset [b]$. Also ergibt sich die Gleichheit.
Sei $[a] \neq [b]$. Angenommen es gäbe ein $c \in [a] \cap [b]$. Dann wäre $c \sim a$ und $c \sim b$. Also wäre $a \sim b$ und damit $[a] = [b]$. Daher ist der Durchschnitt verschiedener Äquivalenzklassen leer. Ist $a \in A$, so ist $a \in [a]$. Das heißt A ist die Vereinigung der verschieden Äquivalenzklassen. $\square$

Definition 8 Sei $(X_i | i \in I)$ eine Familie von Mengen.

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i = \{(i, x) | i \in I \wedge x \in X_i\}$$

heißt disjunkte Vereinigung von $(A_i | i \in I)$. Dazu hat man die Familie von injektiven Abbildungen

$$q_i : X_i \ni x \mapsto (i, a) \in \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

Satz 1.17. *$\bigsqcup_{i \in I} X_i$ hat die folgende Eigenschaft: Ist $f_i : X_i \to X$ eine Familie von Abbildungen, dann gibt es genau eine Abbildung $f^+ \colon \bigsqcup_{i \in I} X_i \to X$ mit $f \circ q_i = f_i$ für alle $i \in I$.*

Sei $f_i : X_i \to X$ eine Familie von Abbildungen. Wir erklären:

$$f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \ni (i, x) \mapsto f_i(x) \in X.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und $f \circ q_i(x) = f((i, x)) = f_i(x)$. Also ist $f \circ q_i = f_i$. Ist $g : \bigsqcup_{i \in I} X_i \to X$ auch eine solche Abbildung, so erhält man für beliebiges $(i, x) \in \bigsqcup_{i \in I} X_i$: $g((i, x)) = q \circ q_i(x) = f_i(x)$. Daher ist $f = g$. $\square$

Die disjunkte Vereinigung einer Familie von Mengen hat die Eigenschaft eines kategoriellen Koproduktes. Wir wollen diese verdeutlichen.

Definition 9. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i | i \in I)$ eine Familie von Objekten. Ein Objekt X zusammen mit einer Familie $q_i : X_i \to X$ heißt Koprodukt der $(X_i | i \in I)$ genau dann, wenn es zu jeder Familie von Morphismen $f_i := X_i \to Y$ genau einen Morphismus gibt mit $f \circ q_i = f$ für alle $i \in I$.

Satz 1.18. *In jeder Kategorie sind je zwei Koprodukte der gleichen Objektfamilie isomorph.*

15. März 2017

Seien $(X|(q_i))$ und $(Z|(\eta_i))$ zwei Koprodukte der Familie $(X_i|i \in I)$. Dann gibt es zu der Familie $q_i : X_i \to X$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : Z \to X$ mit $f\eta_i = q_i$. Andererseits ist auch $(X, (q_i))$ ein Koprodukt. Also gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $g : X \to Z$ mit $g \circ q_i = \eta_i$. Wir erhalten $fgq_i = q_i$ für alle $i \in I$. Zu der Familie $q_i : X_i \to X$ ist Id_X der einzige Morphismus h mit $hq_i = q_i$. Daher ist $f \circ g = Id_X$.
Weiter ist $gq_i = \eta_i$ und $q_i = f\eta_i$. Es folgt $gf\eta_i = \eta_i$. Daher ist $gf = Id_Z$ Also sind f, g zueinander inverse Morphismen. X, Y sind daher isomorph. □

In diesem Sinne ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ zusammen mit den Injektionen (q_i) ein Koprodukt in der Kategorie der Mengen.

1.2.5 Fasersumme

1.2.6 Auswahlaxiom

Definition 9 $\bigsqcup_{i \in I}$ sei eine Partition von X.Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt Repräsentantensystem der X_i, wenn $M \cap X_i$ aus genau einem Element besteht für alle $i \in I$. □

Die Anschauung lehrt, dass es möglich sein sollte aus den Teilmengen X_i jeweils ein Element auszuwählen. Oft genug tun wir das im Leben. So können wir aus jeder Altersgruppe eine Person auswählen oder jeder Klasse einen Klassensprecher zuordnen.
Ich formuliere gleich einige zu Auswahlaxiom äquivalenten Sätze.

Satz 1.19 (Auswahlaxiom). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Zu jeder Menge I und jeder Menge Y und jeder Funktion $F\colon I \to \mathfrak{P}(Y)\backslash\emptyset$ gibt es eine Funktion $f\colon Y$ mit $f(i) \in F(i)$. Es ist f eine Auswahlfunktion.*

2. *Zu jeder surjektiven Funktion $g\colon A \to B$ und jedem $\beta\colon P \to B$ gibt es ein $\beta^*\colon P \to B$ mit $g \circ \beta^* = \beta$. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "\beta"'] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

3. *Zu jeder surjektiven Funktion $g\colon A \to B$ gibt es ein $f\colon B \to B$ mit $g \circ f = 1_B$.*

4. *Ist $(X_i|i \in I)$ eine Partition einer Menge X, so gibt es ein Repräsentantensystem.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $g\colon A \to B$ eine surjektive Funktion und $\beta\colon P \to B$. Da g surjektiv ist, ist $F : P \ni p \mapsto g^{-1}(\beta(p)) \in \mathfrak{P}(A) \setminus \emptyset$ wohldefiniert. Nach Teil 1. gibt es eine Auswahlfunktion $\beta^*\colon P \to A$ mit $\beta^*(p) \in g^{-1}(\beta(p))$ für alle $p \in P$. Daher ist $(g \circ \beta^*)(p) = \beta(p)$.
2. $\Longrightarrow$3. Sei $g\colon A \to B$ eine surjektive Funktion. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Zu 1_B gibt es ein $f\colon B \to A$ mit $g \circ f = 1_B$.
3. $\Longrightarrow$4. Sei $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ eine Partition von X. Jedes Element $x \in X$ ist in genau einer Menge X_i enthalten. Daher ist die Zuordnung

$$\pi\colon X \ni x \mapsto X_i \in \{X_i|i \in I\} =: Z$$

eine surjektive Funktion.
Also gibt es ein $g\colon Z \to X$ mit $\pi \circ g = 1_Z$. Es ist $\pi^{-1}(X_i) = X_i$ und $g(X_i) \in g^{-1}(X_i) = X_i$. Also ist $g(X_i) \in X_i$. Die Menge $\{g(X_i|i \in I)\}$ ist das gewünschte Repräsentantensystem.

4. $\Longrightarrow$1. Sei $F :: I \to \mathfrak{P}(Y)\backslash\emptyset$ eine Funktion. Wir betrachten die elementfremde Vereinigung der $F(i)$. Es sei $F^*(i)\colon = \{(i|y)|y \in F(i)\}$. Weiter sei $Z\colon = \bigsqcup_{ßinI} F^*(i)$. Die Familie der $F^*(i)$ bilden eine Partition von Z. Also gibt es ein Repräsentantensystem $M \subset Z$. Für alle $i \in I$ besteht $M \cap F^*(i)$ aus genau einem Element $(i|y)$ mit $y \in F(i)$. Also ist $\{(i|y)|i \in I\}$ die gesuchte Funktion. Nun können wir den entsprechenden Satz wie bei injektiven Funktionen (siehe Satz 1.11)auch für surjektive Funktionen beweisen.

Satz 1.20. *Für eine Funktion $f : A \to B$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$f : A \to B$ ist surjektiv.*
2. *$f \circ T(f) = 1_B$.*
3. *Für alle Mengen C ist $Abb(f, C) : Abb(B, C) \ni g \mapsto gf \in Abb(A, C)$ injektiv.*
4. *Es gibt eine Funktion $g : B \to A$, so dass $fg = 1_B$.*
5. *Für alle Mengen C ist $Abb(C, f)$ surjektiv.*

1. $\Longrightarrow$2. Da f surjektiv ist, ist $1_B \subset f \circ T(f)$. Da f eine Funktion ist, ist $T(f)$ injektiv. Das besagt $f \circ T(f) = T((T(f))) \circ T(f) \subset 1_B$. Also ist $f \circ T(f) = 1_B$.
2.$\Longrightarrow$3. Seien $g, h : B \to C$ Abbildungen mit $Abb(f, C)(g) = Abb(f, C)(h)$. Also $gf = hf$. Dann $g(f \circ T(f)) = h(f \circ T(f))$. Also ist $g = h$.
3. $\Longrightarrow$1. Sei $C = \{0, 1\}$. Ich erkläre zwei Funktionen

$$g(b) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } b \in f(A) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $h(b) = 1$ für alle $b \in B$. Dann ist $fg = fh$. Also ist $g = h$ und daher ist $f(A) = B$. Dies bedeutet f ist surjektiv.
1. $\Longrightarrow$4. Da f surjektiv ist, gibt wegen Satz **??** ein $g : B \to A$ mit $fg = 1_B$
4. $\Longrightarrow$5. $Abb(C, f) : Abb(C, A) \ni h \mapsto fh \in Abb(C, B)$. Ist $\beta : C \to B$, so ist $\beta = 1_B \circ \beta = (fg) \circ \beta = f(g\beta) = Abb(C, f)(g\beta)$. Also ist $Abb(C, f)$ surjektiv.
5. $\Longrightarrow$4. Insbesondere ist $Abb(B, A) \to Abb(B, B)$ surjektiv. Also gibt es ein $g : B \to A$ mit $Abb(B, f)(g) = fg = 1_B$.
4. $\Longrightarrow$1. Sei $b \in B$. Dann ist $fg(b) = b = f(g(b))$. Also ist $b \in Bi(f)$. □

1.2.7 Produkt von Mengen

Definition 10. Sei $(X_i | i \in I)$ eine Familie von Mengen.

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f | f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i, f(i) \in X_i\}, \pi_i : = \prod_{i \in I} X_i \ni f \mapsto f(i) \in X_i \quad (1.4)$$

Bemerkung 3 Das Auswahlaxiom1.19 besagt, dass für jede Familie nicht leerer Mengen $(X_i | i \in I)$ das Produkt $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ ist. Die Umkehrung gilt auch. □

Satz 1.21. $\prod_{i \in I} X_i$ *hat zusammen mit der Familie* (π_i) *die folgende Eigenschaft. Ist* $(g_i | i \in I)$ *eine beliebige Familie von Abbildungen* $g_i : X \to X_i$*, so gibt es genau eine Abbildung* $g : X \to \prod_{i \in I} X_i$ *mit* $\pi_i g = g_i$ *für alle* $i \in I$

Zunächst sei $g : X \ni x \mapsto g(x) \in \prod_{i \in I} X_i$. Dabei ist $g(x)(i) := g_i(x)$. Dann ist:$(\pi_i \circ g)(x) = \pi_i(g(x)) = g_i(x)$. Daher ist $\pi_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$.
Sei $g' : X \to \prod_{i \in I} X_i$ eine weitere solche Abbildung. Dann ist
$g'(x) : I \ni i \mapsto g'(x)(i) \in \bigcup_{i \in I} X_i$ ein Element aus $\prod_{i \in I} X_i$. Wir erhalten: $g'(x)(i) = \pi_i(g'(x)) = g_i(x) = (\pi_i \circ g)(x) = g(x)(i)$ für alle $i \in I$. Daher ist $g = g'$. □

Der Satz 1.21 besagt, dass in der Kategorie der Mengen $\mathbf{Me}\,(\prod_{i\in I} X_i, \pi_i)$ ein Produt der Mengen ist. Dazu erklären wir allgemein, was ein Produkt von Objekten in einer Kategorie ist.

Definition 11. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i|i \in I)$ eine Familie von Objekten. Ein Objekt P zusammen mit einer Familie $\pi_i \in [P, X_i]$ heißt Produkt, wenn es zu jeder Familie $g_i : X \to X_i$ genau einen Morphismus $g : X \to \prod_{i\in I} X_i$ gibt mit $\pi_i \circ g = g_i$.

Satz 1.22. *Sind (P, π_i) und (Q, β_i) zwei Produkte der Familie $(X_i|i \in I)$, so sind sie isomorph.*

(P, π_i) und (Q, β_i) sind Produkte von $(X_i|i \in I)$. Da (Q, β_i) ein Produkt ist, gibt es zu der Familie $\pi_i : P \to X_i$ genau einen Morphismus □

Fragen:

2. Ich sollte den Begriff eines Generators für B nach der Einführung von $\mathbb{N}$ besprechen.

Spezialfälle

1. Geordnete Paare: Sind A, B zwei Mengen, so haben wir die Menge der geordneten Paare. $X \times Y := \{(x, y)|x \in X \wedge y \in Y\}$ Nennen wir

$$\pi_1 : X \times Y \ni (x, y) \mapsto x \in X$$
$$\pi_2 : X \times Y \ni (x, y) \mapsto y \in X$$

   so ist $X \times Y$ zusammen mit den Abbildungen π_1, π_2 ein Produkt dieser zwei Mengen.

2. Sind die X_i alle gleich oder isomorph, so schreibt man $\prod_{i\in I} X_i = X^I$. Insbesondere Ist $I = X$, so schreibt man X^X

Satz 1.23 (Cantor). *Keine Menge M kann man surjektiv abbilden auf ihre Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$*

Angenommen wir hätten eine Menge M und eine surjektive Funktion $f : M \to \mathfrak{P}(M)$. Ich betrachte die Menge

$$S = \{m|m \notin f(m)\}$$

Es ist $S \subset M$ also $S \in \mathfrak{P}(M)$. Daher gibt es ein $m \in M$ mit $f(m) = S$.

15. März 2017

1.Fall $m \in f(m) = S$. Dies widerspricht der Definition von S.

2.Fall $m \notin f(m)$. Dann ist $m \in S = f(m)$. Dies ist wieder ein Widerspruch. Also gibt es keine surjektive Funktion $f : M \to \mathfrak{P}(M)$.

Der Beweis ist hochraffiniert. □

Aufgaben:

8. Sei das folgende kommutative Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

   a) In der Kategorie der Mengen gilt: Ist α surjektiv β, g injektiv, so ist f injektiv.
   b) Allgemein gilt in jeder Kategorie: Ist α eine Retraktion und β ein Schnitt und g ein Monomorphismus, so ist f ein Monomorphismus.

Lösungen:

6. Beweis zu b): Es ist α eine Retraktion. Also gibt es $\hat{\alpha} : X \to A$ mit $\alpha \circ \hat{\alpha} = 1_X$. β ist ein Schnitt. Daher gibt es ein $\hat{\beta}$ mit $b\hat{e}ta \circ \beta = 1_B$. Sei g ein Monomorphismus und $h_1, h_2 : Z \to X$ mit $fh_1 = fh_2$. Das Diagramm ist kommutativ. Also ist $f\alpha = \beta g$. Damit ist $f = f \circ 1_X = f \circ \alpha \circ \hat{\alpha} = \beta g \hat{\alpha}$. Also ist $\beta g \hat{\alpha} h_1 = \beta g \hat{\alpha} h_2$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit $\hat{\beta}$, und beachtet g ist ein Monomorphismus, so erhält man: $\hat{\alpha} h_1 = \hat{\alpha} h_2$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit α, so erhält man: $h_1 = h_2$.

Korrespondenzen und Abbildungen Jede Korrespondenz ist in einer naheliegenden Weise mit einer Abbildung verknüpft. Und zwar folgendermaßen: Ist $r \subset A \times B$ eine Korrespondenz von A nach B, so erhält man daraus eine Abbildung:

$$\mathfrak{P}(r) : \mathfrak{P}(A) \ni U \quad \mapsto \quad r \circ U := \{b | b \in B \bigvee (u \in U) : (u, b) \in r\} \quad (1.5)$$

Diese Zuordnung ist ein Funktor. Um es genauer sagen zu können eine Definition:

Definition 10 Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ Kategorien. Ein Funktor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ heißt treu, wenn für alle $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ die Abbildung $Mor(A, B) \ni f \mapsto F(f) \in Mor(F(A), F(B))$ injektiv ist.

Satz 1.24. *Ordnet man jeder Menge die Potenzmenge zu und jeder Korrespondenz $r \subset A \times B$ die in 1.5 definierte Abbildung $\mathfrak{P}(r)$ zu, so erhält man einen kovarianten treuen Funktor.*

Zunächst zur Funktoreigenschaft: Dafür ist folgendes zu zeigen: Sind $r \subset A \times B$ und $s \subset B \times C$ Korrespondenzen, so ist $(\mathfrak{P}(s) \circ \mathfrak{P}(r))(U) = \mathfrak{P}(s \circ r)(U)$ für alle $U \subset A$. Oder anders formuliert: $(s \circ r)(U) = s \circ (r \circ U)$ für alle $U \subset A$. Sei dazu $c \in (s \circ r)(U)$. Es gibt also ein $u \in U$ mit $(u, c) \in s \circ r$. Das heißt es gibt ein $b \in B$ mit $u, b \in r$ und $(b, c) \in s$. Also ist $b \in r \circ U$ und $c \in s \circ (r \circ U)$. Damit ist eine Inklusion gezeigt.
Sei umgekehrt $c \in s \circ (r \circ U)$. Es gibt damit ein $b \in r \circ U$ mit $(b, c) \in s$. Also gibt es ein $u \in U$ mit $(u, b) \in r$. Also ist $(u, c) \in s \circ r$ und $c \in (s \circ r)(U)$. Sicherlich ist $\mathfrak{P}(Id)$ die Identität auf der Potenzmenge. Daher ist diese Zuordnung ein Funktor. Es bleibt zu zeigen, dass der Funktor treu ist. Seien dazu $r, s \subset A \times B$ zwei verschiedene Korrespondenzen. Dann gibt es beispielsweise ein $(a, b) \in r$ aber $(a, b) \notin s$. Das heißt $b \in r \circ \{a\}$ aber $b \notin s \circ \{a\}$. Es ist also $\mathfrak{P}(r) \neq \mathfrak{P}s$.$\square$

Für uns wichtig ist der folgende funktorielle Isomorphismus.

Satz 1.25. *Man hat folgenden funktoriellen Isomorphismus:*
$\Psi(A) : Abb(A, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathfrak{P}(A)$
Dabei ist $\mathfrak{P}$ der kontravariante Potenzmengenfunktor.

Ich schreibe anstelle von $\mathbb{Z}_2 = K$. Sei M eine Menge und $f \in Abb(M, K)$. Ich definiere $\Psi(f) = \{m | m \in M \wedge f(m) = 1\} \in \mathfrak{P}(M)$. Ich behaupte nun Ψ ist funktoriell. Sei dazu $\alpha : A \to B$ ein Abbildung zwischen Mengen. Ich betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Abb(B, K) \arrow[r, "{[\alpha, K]}"] \arrow[d, "\Psi(B)"'] & Abb(A, K) \arrow[d, "\Psi(A)"] \\
\mathfrak{P}(B) \arrow[r, "\mathfrak{P}(\alpha)"'] & \mathfrak{P}(A)
\end{tikzcd}$$

Ist $f : B \to K$, so hat man:

$$\begin{aligned}
(\Psi(A) \circ [\alpha, K])(f) &= \Psi(A)(f\alpha) = \{a | f(\alpha(a)) = 1\} \\
(\mathfrak{P}(\alpha) \circ \Psi(B)(f) &= \mathfrak{P}(\alpha)\{b | f(b) = 1\} \\
&= \alpha^{-1}\{b | f(b) = 1\} = \{a | f\alpha(a) = 1\}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. Die Abbildung Ψ ist tatsächlich isomorph. Denn seien $f, g : M \to K$ mit $\Psi(f) = \Psi g$. Dann gilt

$$U := \{a | a \in M \wedge f(a) = 1\} = \{a | a \in M \wedge g(a) = 1\}$$

Ist $a \notin U$, so muss $f(a) = g(a) = 0$ gelten. Also ist $f = g$. Zu zeigen bleibt: Die Abbildung ist surjektiv: Sei dazu $U \in \mathfrak{P}(M)$ eine Untermenge von M. Wir betrachten die charakteristische Funktion von $U \subset M$.

$$f(a) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin U \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\Psi(f) = U$. Also ist die Abbildung surjektiv. □

Dieser funktorielle Isomorphismus erlaubt es das Rechnen in der Potenzmenge zurückzufüren auf das Rechnen in $Abb(A, K)$. Das sind aber nichts andere als Bitvektoren. Wir werden dies intensiv ausbnützen.
Ist eine Abbildung in zwei Argumenten gegeben, so kann man ein Element festhalten und erhält eine Abbildung in einem Argument. Genauer: Ist $\varphi : AA \times B \to C$ eine Abbildung mit Mengen A, B, C, so definiert bei festem $a \in A$

$$\varphi(a, -) : B \ni b \mapsto \varphi(a, b) \in C \tag{1.6}$$

eine eindeutig bestimmte Abbildung. Wir haben also die Abbildung:

$$\Phi : [A \times B, C] \ni \phi \mapsto (A \ni a \mapsto \varphi(a, -) \in [B, C]) \in [A, [B, C]] \tag{1.7}$$

Ist umgekehrt $\alpha : A \to [B, C]$, so ist für alle $a \in A$ $\alpha(a)$ eine eindeutig bestimmte Abbildung aus $[B, C]$ Zu jedem $b \in B$ ist daher $\alpha(a)(b)$ eindeutig bestimmt. Wir haben daher die Abbildung:

$$\Psi : [A, [B, C]] \ni \alpha \mapsto (A \times B \ni (a, b) \mapsto \alpha(a)(b) \in C) \in [A \times B, C] \tag{1.8}$$

Satz 1.26. *Die Abbildungen Φ und Ψ sind invers zueinander. Die Abbildung $\Psi(A, B, C)$ ist ein funktorieller Isomorphismus.*

Sei $\varphi : A \times B \to C$. Es ist $\alpha = \Phi(\varphi) : A \ni a \mapsto (B \ni b \mapsto \varphi(a, b) \in C)$. Dann ist also $\alpha(a) : B \ni B \mapsto \varphi(a, b) \in C$. Also ist $\alpha(a)(b) = \varphi(a, b)$. Daher ist $\Psi(\alpha)(a, b) = \alpha(a)(b) = \varphi(a, b)$. Daher ist $\Psi(\Phi(\varphi)) = \varphi$. Es ist also $\Psi\Phi = Id$ ausf $[A \times B, C]$.
Nun Berechne ich $\Phi \circ \Psi$. Sei dazu $\alpha : A \to [B, C]$ gegeben. Ich nenne $\varphi = \Psi(\alpha)$. Es ist $\varphi(a, b) = \alpha(a)(b)$. Da $\Phi(\varphi)(a) = \varphi(a, -)$ folgt für alle $b \in B$: $\Phi(\varphi)(a)(b) = \varphi(a, b) = \alpha(a)(b)$. Also ist $\Phi(\varphi)(a) = \alpha(a)$ für alle $a \in A$. Daher ist $\Phi(\varphi) = \alpha$. Also ist $\Phi(\psi(\alpha)) = \alpha$. Das heißt Ψ und Φ sind invers zueinander.
Nun zeige ich, dass Φ funktoriell im zweiten Argument ist. Sei daher $f : M \to N$ eine Abbildung. Ich bezeichne mit $F(M) = [A \times M, C]$ und $T(M) = [A, [M, C]]$ Zu zeigen ist, dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\Phi(A,M,C)} & T(M) \\ \uparrow F(f)) & & \uparrow T(f) \\ F(N) & \xrightarrow{\Phi(A,N,C)} & T(N) \end{array}$$

Sei zum Start der Diagrammjagd $\varphi \in [A \times N, C]$. Gehen wir im Diagramm im Gegenuhrzeigersinn erhalten wir die Abbildung:

$$A \xrightarrow{\Phi(A,N,C)(\varphi)} [N, C] \xrightarrow{[f,C]} [M, C]$$

Wenden wir die auf ein $a \in A$ an, erhalten wir:

$$\begin{aligned} [f, C] \circ (\Phi(A, N, C)(\varphi))(a) &= [f, C](\varphi(a, -)) \\ &= \varphi(a, -) \circ f \end{aligned}$$

Wenden wir diese letzte Abbildung auf ein $m \in M$ an erhalten wir $\varphi(a, f(m))$. Gehen wir im Diagramm anders herum erhalten wir die Abbildung: $\Phi(A, M, C)(\varphi \circ (1_A) \times f))$. Wenden wir diese Abbildung auf ein $a \in A$ an, so erhalten wir: $\varphi(a, f(-))$. Es ist wieder $\Phi(A, M, C)(\varphi \circ (1_A \times f))(a)(m) = \varphi(a, f(m)))$. Daher ist das Diagramm kommutativ. □

1.2.8 Rechnen in Lisp mit Korrespondenzen

Um Korrespondenzen definieren zu können brauchen wir Paare und die Paarmenge. Dies geht in `emacs-lisp` beispielsweise folgendermaßen. Der folgende Befehl verbindet die beiden Symbole `a` und `b` zu einem Paar

```
(cons 'a 'b) ===> (a . b)
```

Speichern wir dieses Paar noch dauerhaft in der Variablen `paar`, so geschieht dies mit:

```
(setq paar (cons 'a 'b)) ===>(a . b)
```

Möchte man auf die erste Komponente zugreifen, so geschieht dies mit

```
(car paar)
```

Die zweite Komponente erhält man durch

```
  (cdr paar) ===> b
```

Wir wollen nun die Verkettung solcher Korrespondenzen möglichst wirksam berechnen. Wir müssen uns also Gedanken machen, wie wir sie im Computer darstellen. Ist $f \subset A \times B$ eine Korrespondenz. Ist $a \in A$, so notieren wir in einer vertikalen Spalte mit $|B|$ Zeilen, ob bei dem b ein Pfeil endet oder nicht. Diese so definierten Spalten schreiben wir in eine Matrix nebeneinander Machen wir es an einem Beispiel klar. Gegeben ist die Relation aus 1.2.1.
Das ergibt die folgende Nachbarschaftsmatrix. Man nennt es Adjazenzmatrix.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Man kann das auch so deuten. In der a-ten Spalte und b-ten Zeile steht genau dann eine 1 wenn von a nach b ein Pfeil zeigt. Anders ausgedrückt. Von a aus ist b in einem Zug erreichbar. Hat die Menge A $|A|$ Elemente und hat B $|B|$ Elemente, so ist dies eine Matrix mit $|A|$ Spalten und $|B|$ Zeilen. Wir können nun die Technik der Matrizenmultiplikation verwenden um die Verkettung von Relationen auszurechnen. Dazu betrachten wir auf $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ die Verknüpfung max und min. Die Verknüpfungstafeln sehen also so aus:

min	0	1		max	0	1
0	0	0		0	0	1
1	0	1		1	1	1

Die beiden Verknüpfungen sind distributiv übereinander. Zur Programmierung in `emacs`. Dazu stellen wir zunächst eine Funktion bereit, die uns manches vereinfacht.

```
(defun map(funktion &rest listen)
  (if listen
  (let ((result nil))
      (while (not (memq 'nil listen))
      (setq result
        (cons (apply funktion (mapcar 'car listen)) result)
      )
      (setq listen (mapcar 'cdr listen))
      )
    (nreverse result))
 nil)
)
Beispiel:

(map '+ (list 1 2) (list 3 4) (list 4 5)) ==> (8 11)
```

An dem Beispiel erkennt man wie diese Funktion funktioniert. Sie wendet nacheinander die übergebene Funktion auf sämtliche Listenspitzen an und gibt eine Ergebnisliste aus. Wer lieber in `scheme` arbeitet hat diese Funktion von Haus aus zur Verfügung.

```
(defun oder(mengea mengeb)
  (map 'max mengea mengeb))
```

Die Funktion bildet die Vereinigung zweier Mengen. In der Ergebnisliste steht an jeder Stelle an der an eine der Argumentlisten eine 1 stand eine 1. Ein Beispielaufruf sieht so aus:

```
  (oder (list 0 0 0 0 1 0) (list 1 0 0 1 0 1))
  ==> (1 0 0 1 1 1)
```

Entsprechend den Durchschnitt

```
(defun und(mengea mengeb)
 (map 'min mengea mengeb)
)
```

Ein Beispielaufruf:

```
  (und (list 0 0 0 1 1 0) (list 1 0 0 1 0 1))
  ==> (0 0 0 1 0 0)
```

Auch die Komplementmenge ist leicht gebildet:

```
(defun complement(mengea)
  (mapcar (lambda(x) (mod (1+ x) 2)) mengea))
```

Beispielaufruf:

```
(complement (list 1 0 1 1))
==>(0 1 0 0)
```

Die nächste Funktion macht folgendes: Sie bildet den Schnitt zweier Mengen. Ist der Schnitt leer ergibt sie den Wert `0`. Andernfalls ergibt sie den Wert `1`.

```
(defun skalarprodukt(a b)
  (apply 'max  (und a b) )
)
```

Weil diese Funktion eine starke Ähnlichkeit mit dem Skalarprodukt hat nenne ich sie auch so.

15. März 2017

```
(defun ktespalte(ma k)
  (mapcar (lambda(x) (elt x k)) ma))
```

Ist eine Matrix gegeben so liefert diese Funktion die kte Spalte der Matrix.

```
(defun matrix*vektor(matrix vektor)
"Die Matrix wird auf den Spaltenvektor angewendet"
(mapcar (lambda(x)(skalarprodukt x vektor)) matrix))

(defun vektor*matrix(vektor matrix)
  (let ((k (length (elt matrix 0)) )
           ( zeile nil))
    (while (> k 0)
       (setq k (- k 1)
       zeile (cons (skalarprodukt
                       vektor (ktespalte matrix k)
                   )
                   zeile)
       )
     )
zeile)
)

(defun matrix*matrix(ma na)
 "Das Ergebnis der Funktion ist das Produkt der
  Matrizen ma und na."
(mapcar (lambda(x) (vektor*matrix x na)) ma))
```

Zum Schluss ein Beispielaufruf:

```
(setq mat (list (list 1 0 0)
                (list 1 1 1)
                (list 0 1 1)))
(matrix*matrix mat mat)
((1 0 0)
 (1 1 1)
 (1 1 1))
```

Anmerkungen

15. März 2017

[7]In diesem Sinne ist auch jeder unzerlegbare injektive Modul endlich.
[8]Beim Beweis dieser Tatsache ist das Auswahlaxiom notwendig.
[9]Es wäre vernünftiger epiendlich zu sagen.
[10]Hier braucht man das Auswahlaxiom
[11]Es ist zu überlegen, ob die Kommutativtät der Addition in A tatsächlich gebraucht wird.
[12]Wir haben also tatsächlich das Auswahlaxiom hier gebraucht
[13]Was ist Vollkommenheit?
[14]Hier ist eine Feinheit verborgen. Es können sich diesleben Muster durchaus wiederholen ohne dass tatsächlich das Muster periodisch ist. Man denke an Quasikristalle. Da gibt es sogar eindimensionale Quasikristalle. Wir haben also nicht nur die Alternative. Kristall– immer verschieden.
[15]Ist er für unsere Sünden gestorben?
[16]Es gilt wahrscheinlich auch die Umkehrung

15. März 2017

2 Ketten

2.1 Begriff, Beispiele und Erzeugung

Ist A eine Menge und $A \xrightarrow{\alpha} A$ eine Funktion, so heißt das Paar (A, α) eine *einstellige Algebra*. Ein solches Paar nennt Richard Dedekind eine *Kette*. Ich finde eigentlich den Begriff von Dedekind schöner. Er weckt die richtige Anschauung. Deswegen verwende ich meist den Begriff Kette. Eine Kette ist ein gerichteter Graph, bei dem von jeder Ecke genau ein Pfeil ausgeht. Manchmal heißt so etwas auch diskretes dynamisches System. [1]

Beispiele: Um die Beispiele kürzer formulieren zu können setze ich die Existenz der natürlichen Zahlen, ja sogar von $\mathbb{R}$ voraus. In die systematische Untersuchung geht dies nicht ein. Dies ist auch die Methode, wie man sich einen ersten Eindruck von der Bedeutung eines neuen Begriffs macht. Man schaut die bekannte Welt an und überlegt, wie man ihr Verständnis mit Hilfe des neuen Begriffs, dem neuen Werkzeug, ordnen kann. Erst danach ordnet man auch die schon geordneten Sachen in das neue Regalsystem ein.

1. Ketten kann man malen. Wer die weiter genannten Beispiele zeichnen will, kann sie auch als Pfeildiagramme zeichnen. Er kann schwarze oder auch rote Punkte auf Papier setzen und sie mit Pfeilen verbinden. Er achte darauf: Von jedem Punkt muss genau ein Pfeil ausgehen. Er macht sich dadurch unabhängig von der Existenz von $\mathbb{N}$ und erst recht von $\mathbb{R}$. Ein paar Ketten habe ich gezeichnet.

[1] Dedekind definiert den Begriff Kette eine Kleinigkeit anders.(Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Erklärung 37.) Er geht aus von einer Menge S und einer Abbildung $\varphi : S \to S$. Eine Teilmenge K von S nennt er Kette, wenn $\varphi(K) \subset K$ ist. Wenn also K abgeschlossen gegenüber φ ist.

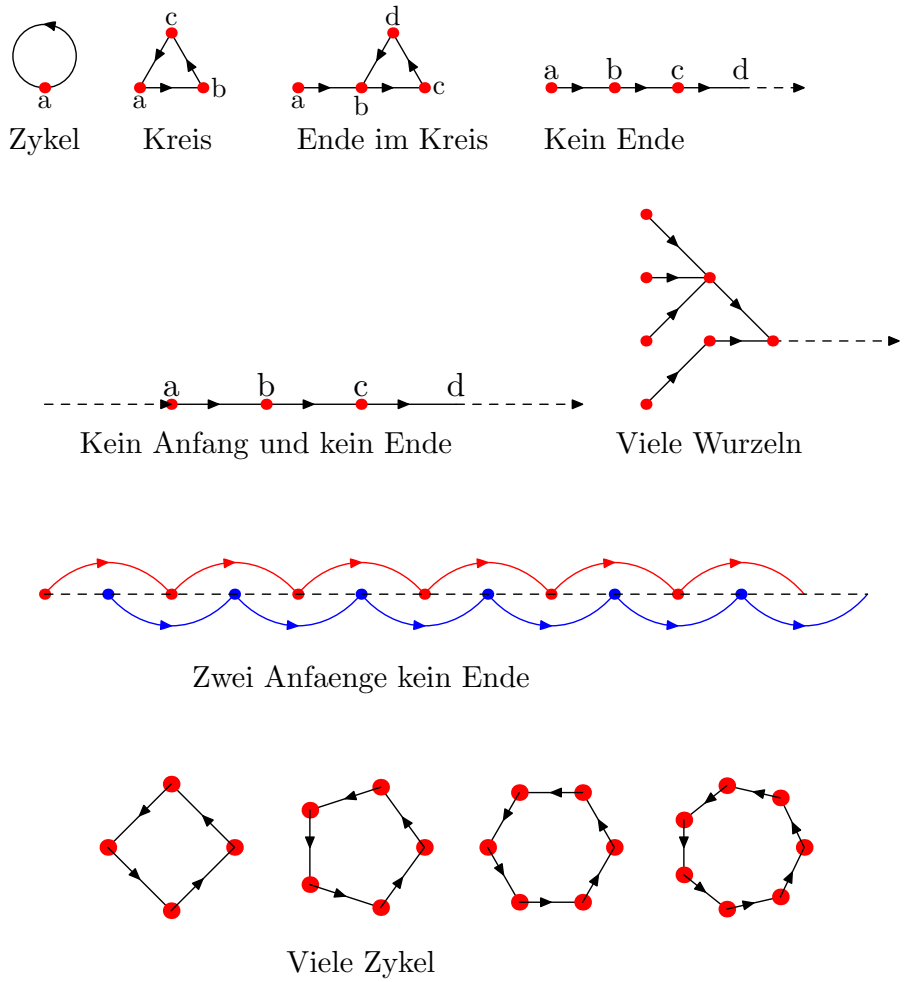


Abb. 2.1: gerichtete Graphen

2. Wir betrachten $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Die Abbildung $1+$ ergibt einen Zyklus der Länge 4. Nämlich $0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0$.

   Betrachtet man die Abbildung $2+$ und startet mit 0, so erhält man den Zyklus $0 \mapsto 2 \mapsto 0$. Startet man mit 1 erhält man den Zyklus $1 \mapsto 3 \mapsto 1$. Also zwei Zyklen, die kein Element gemeinsam haben. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist elementfremde Vereinigung zweier Zyklen.

3. Wieder $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: Wir betrachten die Funktion $f(x) = (x^2+1) \bmod 4$. Startet man mit 0 ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Startet man mit 3 so ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

4. Die Abbildung $2*$ ergibt:
   a) Mit Startpunkt 0: $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left] \end{tikzcd}$
   b) Mit Startpunkt 1 ergibt sich: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
   c) Mit Startpunkt 2 ergibt sich: $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
   d) Mit Startpunkt 3 ergibt sich: $\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$

5. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
   a) $2+$: $0 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 0$.
   b) $3+$: $0 \to 3 \to 1 \to 4 \to 2 \to 0$. Dies ist genau der umgekehrte Pfad wie bei $2+$. Warum?
   c) i. $2*$. $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left] \end{tikzcd}$
      ii. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$. Bei Start 3 oder 4 genauso. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist bezüglich $2*$ die elementfremde Vereinigung von $[0]$ und $[2]$

6. Der Urzeithirte wird vielleicht seine Schafe folgendermaßen gezählt haben. Für jedes Schaf legt er ein Hölzchen in den Sand. Er macht sich also eine Strichliste `||||||`.... Seine Funktion α ist ganz einfach: Einen Strich dranhängen. Unser Ziffernsystem haben die Inder erfunden. Der Inder Āryabhata hat zum ersten Mal Regeln zum Rechnen im Positionssystem angegeben. Darauf beruht die folgende raffinierte Methode des Zählens.

   `0, 1, 10,11, 100,...`

   Dies ist die Folge der natürlichen Zahlen im Dualsystem. Ein geistiger Nachfahren des Inders hat sie erfunden. Āryabhata hat unser Zahlensystem erfunden. Siehe hierzu das Buch „Lexikon bedeutender Mathematiker“ Gottwald, *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Seite 29

7. Fibonacci Zahlen: Wir betrachten die folgende Funktion

$$f : \mathbb{N}^2 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^2$$

Startet man mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich folgende Bahn:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} \dots$$

8. Etwas Seltsames: Man starte mit einer durch 3 teilbaren Zahl etwa 3. Man bilde die Summe der Kubikzahlen mit den Ziffern als Basis. Also in unserem Fall $3^3 = 27$. Wiederhole: $2^3+7^3 = 351$. Weiter $3^3+5^3+1^3 = 153$. Und hier endet die Geschichte. Das klappt scheinbar immer. Zum Beispiel, wenn man mit 12 oder 21 startet. Ich weiß nicht warum! 153 ist auch die 17te Dreieckszahl. Petrus fischte aus dem See Genesaret 153 Fische.

   Starten wir mit 1272

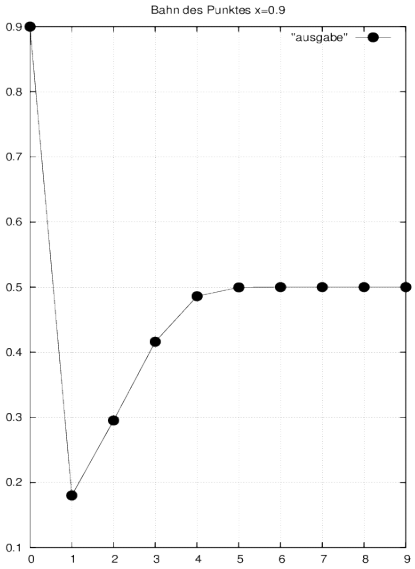
$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 7^3 + 2^3 &= 360 \\ 3^3 + 6^3 + 0^3 &= 243 \\ 2^3 + 4^3 + 3^3 &= 99 \\ 9^3 + 9^3 &= 1458 \\ 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 &= 702 \\ 7^3 + 0^3 + 2^3 &= 351 \\ 3^3 + 5^3 + 1^3 &= 153 \end{aligned}$$

   Wir sind wieder bei den Fischen des heiligen Petrus gelandet. Wirklich ein Rätsel oder eine schöne Aufgabe, wenn man zwei freie Nachmittage hat.

9. Berühmt sind die quadratischen Iterationen, die unter anderem die sogenannten Feigenbaumdiagramme ergeben. Betrachten wir die logistische Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto r \cdot (1 - x) \cdot x \tag{2.1}$$

   Setzt man etwa $r = 2$, so erhält man die linke Bahn von Abbildung 9 mit dem Startwert $x = 0.9$. Setzt man etwa $r = 3$, so erhält man die rechte Bahn von Abbildung 9 mit dem Startwert $x = 0.9$.



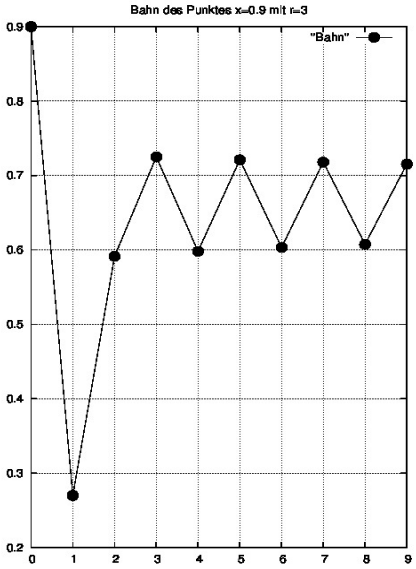


Abb. 2.2: Bahn eines Punktes unter der logistischen Funktion

Fragen:

3. Hat beispielsweise die Funktion f^2 einen Fixpunkt? Sicher ist 0.5 ein solcher. Aber hat die Funktion f Punkte der Periode 2?

Aufgaben:

9. Wir ordnen jeder Zahl $n = \sum a_i 10^i$ folgendermaßen eine natürliche Zahl zu: $f(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Wo endet das Verfahren, wenn von einer Zahl ausgeht, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt?

10. Wir ordnen jeder natürlichen Zahl $n = \sum a_i 10^i$ folgendermaßen eine natürliche Zahl zugeordnet: $f(n) = \sum (a_i)^2$. Dabei sind a_i die Ziffern der natürlichen Zahl. Bilde die Kette $n \to f(n) \to f(f(n)) \to \ldots$. Gibt es Anfangswerte n, so dass die Kette mit diesem Anfangswert n nicht in 1 endet? Berechne die Kette mit Startwert 153. (Hab ich nicht beantwortet!)

11. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so gibt es eine Funktion $\alpha : A \to A$, so dass $a \sim b \iff \alpha(a) = \alpha(b)$ gilt.

Definition 12. Eine Teilmenge $U \subset M$ ist gegenüber der Abbildung $f : M \to M$ abgeschlossen, wenn $f(U) \subset U$ gilt. Sie ist f–koabgeschlossen, wenn $f^{-1}(U) \subset U$ ist.

Bemerkung 4 (Regeln) 1. Ist $U \subset M$ f-abgeschlossen, so ist $f^{-1}(U)$ gegenüber f abgeschlossen.

2. Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

3. Ist U eine Teilmenge der Kette A, so gibt es eine kleinste abgeschlossen Teilmenge, welche U enthält und abgeschlossen ist.

4. Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

[2] □

Zu 1:. Sei $y \in f^{-1}(U)$. Dann ist $f(y) \in U$. Da U gegenüber f abgeschlossen ist, ist $f(f(y)) \in U$. Daher ist $f(y) \in f^{-1}(U)$.
Zu 2. Sei $(U_i | i \in I)$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen und $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Dann ist $f(x) \in U_i$ für alle $i \in I$. Das heißt $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$
Zu 3. Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen, die U enthalten, ist die kleinste abgschlossene Teilmenge, die U enthält.
Zu 4. Sei $(A_i | i \in I)$ eine Familie von gegenüber f abgeschlossenen Teilmengen. Weiter sei $a \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $a \in A_i$. Also ist $f(a) \in A_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. □

Definition 13. Wir bezeichnen mit $[U]$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die U enthält.

$$U \xrightarrow{f} f(U) \xrightarrow{f} f(f(U)) \overset{f}{\dashrightarrow}$$

Besteht U nur aus einem Element, so heißt $[u]$ die von u erzeugte Bahn oder orbit. Die leere Menge und die Menge M ist gegenüber jeder Abbildung der Menge in sich abgeschlossen.
Wir sehen warum Dedekind dies eine Kette nennt. Man kann mit Hilfe f eine Kette bilden ohne $[U]$ zu verlassen.

Bemerkung. *Will man eine Aussage für alle Elemente von $[U]$ zeigen, so muss man die Aussage für alle Elemente aus U zeigen und, dass der Gültigkeitsbereich der Aussage gegenüber α abgeschlossen ist.*[3]

Definition 14. Sei (A, α) eine Kette und $U \subset A$ eine Teilmenge von A mit $[U] = A$. Dann heißt U Erzeugendensystem von A. Man sagt U erzeugt A.

Satz 2.1 (Regeln 1). *Es sei (A, α) eine Kette. Und $U \subset A$. Es gilt:*

[2] Die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von A bilden eine Topologie.
[3] Dies nennt Dedekind in Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Satz 59 in den Satz von der vollständigen Induktion. Es werden hier keinerlei besondere Eigenschaften von $\mathbb{N}$ gebraucht, sondern nur die Abgeschlossenheit gegenüber α.

1. $[U] = U \cup \alpha([U])$.
2. $\alpha([U]) = [\alpha(U)]$.
3. *Für alle $x, y \in [a]$ gilt: $x \in [y]$ oder $y \in [x]$. x ist in der Bahn von y, oder y ist in der Bahn von x. Achtung! Es ist nicht „entweder oder“ gemeint, sondern das normale mathematische „oder“. Es kann auch beides der Fall sein.*
4. *Für alle $x, y \in [a]$ so gilt: $[x] \bigcap [y] \neq \emptyset$.*
5. *Es ist $[U] = \bigcup\limits_{u \in U} [u]$.*

Zu 1: Es ist $\alpha(U) \subset [U]$. Daher ist $[\alpha(U)] \subset [U]$. Außerdem ist $U \subset U \cup [\alpha(U)]$. Es ist $U \cup [\alpha(U)]$ abgeschlossen gegenüber α. Da $[U]$ die kleinste $\alpha-$abgeschlossene Menge ist, die U enthält ist $[U] = U \cup [\alpha(U)]$.
Zu 2: $\alpha([U])$ ist eine gegenüber α abgeschlossene Menge. Außerdem ist $\alpha(U) \subset \alpha([U])$. Daher ist $[\alpha(U)] \subset \alpha([U])$.
Sei $y = \alpha(x) \in \alpha([U])$ mit $x \in [U] = U \cup [\alpha(U)]$. Ist $x \in U$, so ist $y = \alpha(x) \in \alpha(U)$. Also ist $y \in [\alpha(U)]$. Ist $x \in [\alpha(U)]$, so ist auch $y = \alpha(x) \in [\alpha(U)]$, da $[\alpha(U)]$ abgeschlossen gegenüber α ist. Also ist $y \in [\alpha(U)]$.
Zu 3. Sei b beliebig in $[a]$. Sei

$$T = \{x | x \in [a] \text{ mit: } x \in [b] \text{ oder } b \in [x]\}$$

Es ist $a \in T$, denn $b \in [a]$.
Sei $x \in T$.
1. Fall: $x \in [b]$ dann ist $\alpha(x) \in [b]$ und daher $\alpha(x) \in T$.
2. Fall: $b \in [x]$. Ist $b = x$, so ist $\alpha(x) \in [\alpha(b)] \subset [b]$ und man ist wieder fertig. Andernfalls ist $b \neq x$ und infolgedessen $b \in [\alpha(x)]$. Daher ist wieder $\alpha(x) \in T$.
Also ist T abgeschlossen gegenüber α. Daher ist $T = [a]$.
Zu 4.
Dies ist jetzt klar. Denn es ist etwa $x \in [y]$. Daher ist $[x] \subset [y]$.

Satz 2.2. *Ist $\alpha\colon [a] \to [a]$ nicht injektiv, so gibt es ein $x \in [a]$ mit $x \in \alpha([x]) = [\alpha(x)]$.*

Da α nicht injektiv ist gibt es $x \neq y \in [a]$ mit $c := \alpha(x) = \alpha(y)$. Wegen Satz 2.1 Teil 3 ist etwa $x \in [y] = \{y\} \cup [\alpha(y)] = \{y\} \cup [c]$. Da $x \neq y$ ist $x \in [c] = [\alpha(x)]$. □

Satz 2.3. *Ist $\alpha\colon [a] \to [a]$. Äquivalent sind:*

1. *$a \notin \alpha(A)$ und α injektiv.*
2. *Für kein $c \in [a]$ ist $c \in \alpha([c])$.*

1. $\Rightarrow$ 2.: Sei
$$T = \{c | c \notin [\alpha(c)]\}.$$
Es ist $a \in T$ nach Voraussetzung. Sei $b \in T$. Also $b \notin [\alpha(b)]$. Angenommen $\alpha(b) \in \alpha([\alpha(b)]) = [\alpha(\alpha(b))]$. Es gibt dann ein $d \in [\alpha(b)]$ mit $\alpha(b) = \alpha(d)$. Weil α injektiv ist, ist $b = d$. Daher ist $b \in [\alpha(b)]$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
2. $\Rightarrow$ 1.: Es $a \notin [\alpha(a)] = \alpha([a])$ nach Voraussetzung. Wäre α nicht injektiv, so gäbe es wegen Satz 2.2 ein $c \in [a]$ mit $c \in \alpha([c])$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Trifft eine der beiden Aussagen und damit jede der beiden Teilaussagen von Satz 2.3 zu, so sagen wir in $[a]$ gibt es keinen Kreis.

Satz 2.4. *Gibt es in $[a]$ keinen Kreis, so ist $[a]$ durch die folgende Ordnung wohlgeordnet. $x \leq y \iff [y] \subset [x]$*

.

1. Die Reflexivität ist klar.
2. Es sei $x \leq y$ und $y \leq x$ Also ist $[x] = [y]$. Ist $x = y$ ist man fertig. Andernfalls ist $x \in [\alpha(y)] = \alpha([y]) = \alpha([x]) = [\alpha(x)]$. das geht nicht. Also ist $x = y$.
3. Die Transitivtät ist klar.
4. Wegen Satz 2.1 Teil 3 sind zwei Elemente aus $[a]$ stets vergleichbar.
5. Bleibt zu zeigen, dass jede Teilmenge von $[a]$ ein kleinstes Element hat.

   Ich zeige dies zunächst für eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $U \subset [a]$.

   Ist $a \in U$, so ist $a \leq u$ für alle $u \in U$ und man ist fertig. Andernfalls betrachten wir die Menge
   $$T = [a] \setminus U \neq \emptyset$$
   Es ist $a \in T$. Wäre sie abgeschlossen gegenüber α, so wäre $T = [a]$. Das hieße $U = \emptyset$.

Also gibt es ein $c \in T$, also $c \notin U$ mit $\alpha(c) \in U$.

Beh.: $\alpha(c)$ ist minimales Element in U.

Sei $u \in U$ mit $u \leq \alpha(c)$. Ist $u = \alpha(c)$ ist man fertig. Andernfalls ist $u < \alpha(c)$ also $\alpha(c) \neq u$ und da $u \leq \alpha(c)$ ist $\alpha(c) \in [u] = \{u\} \cup \alpha([u])$.

Also gibt es ein $d \in [u]$ mit $\alpha(d) < 0\alpha(c)$. Daher ist $d = c \in [u] \subset U$. Das geht wegen der Wahl von c nicht.

Also ist $\alpha(c)$ ein minimales Element in U. Da die Ordnnung auf $[a]$ linear ist, - je zwei Elemente lassen sich vergleichen - , folgt $\alpha(c)$ ist auch kleinstes Element in U.

Jetzt sei $\emptyset \neq U$ eine beliebige Teilmenge von $[a]$. Dann hat $[U]$ ein kleinstes Element d. Zu zeigen ist bloß noch, dass d in U liegt. Es ist $d \in [u]$ für ei $u \in U$. Daher ist $u \leq d$. Daher ist $d = u$ und damit ist d das kleinste Element in U □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch in folgendem Sinne.

Satz 2.5. *Ist $[a]$ in obigem Sinne halbgeordnet, und hat α keinen Fixpunkt, so gibt es in $[a]$ keinen Kreis.*

Angenommen es gibt in $[a]$ ein c mit $c \in [\alpha(c)]$. Ist $c = \alpha(c)$, so ist c ein Fixpunkt, den es nach Voraussetzung nicht gibt. Daher gibt es ein $d \in [\alpha(c)], d \neq c$ mit $\alpha(d) = c$. Also ist $c \in [d]$, das heißt $d \leq c$ und natürlich $d \in [c]$, also $c \leq d$. Aber es ist $c \neq d$. Dies widerspricht der vorausgesetzten Halbordnung. □

Definition 15. Sind (A, α) und (B, β) zwei einstellige Algebren, dann wird $A \times B$ zu einer einstelligen Algebra durch $\alpha \times \beta \colon A \times B \ni (a, b) \mapsto (\alpha(a), \beta(b))$.

Satz 2.6. *Seien (A, α) und (B, β) zwei einstellige Algebren und $(a, b) \in A \times B$. Weiter sei $[(a, b)]$, die von $(\alpha \times \beta)$ erzeugte Bahn in $A \times B$. Es gilt: $(x, y) \in [(a, b)]$, dann ist $x \in [a]$ und $y \in [b]$.*

Die Umkehrung gilt nicht.

Es sei

$$T = \{(x, y) \in [(a, b)] \text{ und } x \in [a] \text{ und } y \in [b]\}$$

Es ist $(a, b) \in T$. Sei $(x, y) \in T$. Dann ist $(\alpha \times \beta)(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)) \in [(a, b)]$ und es ist $\alpha(x) \in [a]$ und $\beta(y) \in [b]$. Daher ist T abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$. Also ist $T = [(a, b)]$. Dies wurde behauptet. □

Sind (A, α) und (B, β) und $(a, b) \in A \times B$ beliebig, so ist normalerweise die von (a, b) in $A \times B$ erzeugte Bahn nicht rechtseindeutig. Betrachte als Beispiel: Beispiele:

1. Sei $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\alpha = 1+$ auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Weiter sei $B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\beta = 1+$ auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Starten wir mit $(0, 0)$ in $A \times B$. Es ergibt sich die folgende Bahn.

$$(0, 0) \to (1, 1) \to (0, 2) \to (1, 2) \to (0, 0)$$

   Wie man sieht gibt es zu 0 zwei Elemente in der Bahn $[(0, 0)]$. Es gilt aber.

Satz 2.7. *Ist $\alpha \colon [a] \to [a]$ injektiv und $a \notin \alpha([a])$. Weiter sei (B, β) eine Kette Dann gilt: Ist $[(a, b)]$ der Abschluss von (a, b) in $A \times B$ bezüglich $\alpha \times \beta$ ist für beliebiges $b \in B$ rechtseindeutig.*

Sei $(x, y) \in [(a, b)]$ und $(x, y') \in [(a, b)]$. Es ist etwa $(x, y') \in [(x, y)]$ (wegen 2.1 3.). Ist dann $(x, y') = (x, y)$, so ist $y = y'$ und man ist fertig. Anderenfalls ist $(x, y') \in (\alpha \times \beta)([(x, y)])$. Es gibt daher ein $(x_1, y_1) \in [(x, y)]$ mit $(x, y') = (\alpha \times \beta)(x_1, y_1) = (\alpha(x_1), \beta(y_1))$. Daher ist $x = \alpha(x_1) \in \alpha([x]) = [\alpha(x)]$. (Da $x_1 \in [x]$.) Das geht nicht da $x \notin \alpha([x])$ wegen Satz 2.3 □

Aufgaben:

12. Seien (A, α) und (B, β) Ketten mit injektivem α
    a) Ist $R \subset A \times B$ rechtseindeutig, so ist $(\alpha \times \beta)(R)$ rechtseindeutig.
    b) Es sei $R \subset A \times B$ rechtseindeutig. Ist dann auch $R \cup (\alpha \times \beta)(R)$ rechtseindeutig?

Satz 2.8. *Sei (A, α) mit injektivem α. Für $a, b \in A$ gilt: $[a] \cap [b] = \emptyset$. oder $[a] \subset [b]$ oder $[b] \subset [a]$.*

1. Ist $b \in [a]$ so ist $[b] \subset [a]$. Man ist fertig.

2. Andernfalls ist $b \in [b] \setminus [a] = T$.
   a) Ist $[b] \setminus [a]$ abgeschlossen gegenüber α, so ist $[b] = [b] \setminus [a]$. Das heißt $[b] \cap [a] = \emptyset$.
   b) $[b] \setminus [a]$ ist nicht abgeschlossen gegenüber α. Dann gibt es ein $c \in [b], c \notin [a]$, aber $\alpha(c) \in [a] = \{a\} \cup \alpha([a])$. Ist $\alpha(c) = a$, so ist $[a] \subset [b]$ und man ist wieder fertig. Andernfalls ist $\alpha(c) \in \alpha([a])$. Es gibt daher ein $d \in [a]$ mit $\alpha(c) = \alpha(d)$. Weil α injektiv ist, folgt $c = d$.Daher ist $c \in [a]$. Dies widerspricht der Wahl von c. □

Satz 2.9. *Sei (A, α) eine Kette mit injektivem α. Außerdem sei $E = A \setminus \alpha(A)$. $[E] = \bigsqcup_{e \in E} [e]$, wobei die Vereinigung elementfremd ist. $A \setminus [E]$ ist abgeschlossen gegenüber α und diese Einschränkung ist bijektiv.*

Zunächst zeige ich, dass $C := A \setminus [E]$ gegenüber α abgeschlossen ist. Sei $x \in C$. Angenommen $\alpha(x) \in [E]$. Es ist $\alpha(x) \in E$ unmöglich. Also gibt es y in $\alpha(x) = \alpha(y) \in [E]$. Da α injektiv ist, ist $x = y \in [E]$. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $x \notin [E]$.
Weiter behaupte ich, dass α auf $A \setminus [E]$ surjektiv ist. Dies ist aber klar, da für $y \in A \setminus [E]$ ist ist es sicher nicht in $E = A \setminus \alpha(A)$. Also ist $y \in \alpha(A)$.
Bleibt zu zeigen, dass $[E] = \bigsqcup_{e \in E} [e]$ gilt. Dafür bleibt nur zu zeigen, dass die Vereinigung elementfremd ist. Es ist $[e] \subset [e']$ unmöglich, da $e \notin \alpha([e])$ und $e \neq e'$. Daher ist wegen 2.8 $[e] \cap [e'] = \emptyset$. $\square$

2.2 Der Satz von Dedekind, Cantor, Bernstein:

Will man Dinge der Größe nach vergleichen, so muss es eine „kleiner“ $\leq$ geben. Eine wichtige Forderung ist etwa: $a \leq b$ und $b \leq c$, dann ist auch $a \leq c$. Weiter ist von Bedeutung $a \leq b$ und $b \leq a$, dann ist $a = b$. Genau diese letzte Tatsache wurde in den Anfangszeiten der Mengenlehre diskutiert. Cantor hatte definiert: Die Menge A hat eine kleinere Mächtigkeit wie die Menge B, es ist $|A| \leq |B|$, wenn es eine injektive Abbildung $A \to B$ gibt. Sie haben gleiche Mächtigkeit, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen gibt. Was ist, wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ gilt. Die Intuition sagt, dass es dann auch eine Bijektion zwischen den Mengen gibt. Cantor hat diesen Satz formuliert und auch in seinen Seminaren verwendet. Aber bewiesen wurde er erst 1897 von dem 19 jährigen Felix Bernstein(Siehe Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, Seite 71). Der nächste Satz bereitet vor.

Satz 2.10. *Ist (A, α) ein Kette, $\alpha(A) \subset B \subset A$ und $U = A \setminus B$ so gilt:*

$$B = \alpha([U]) \cup A \setminus [U]$$

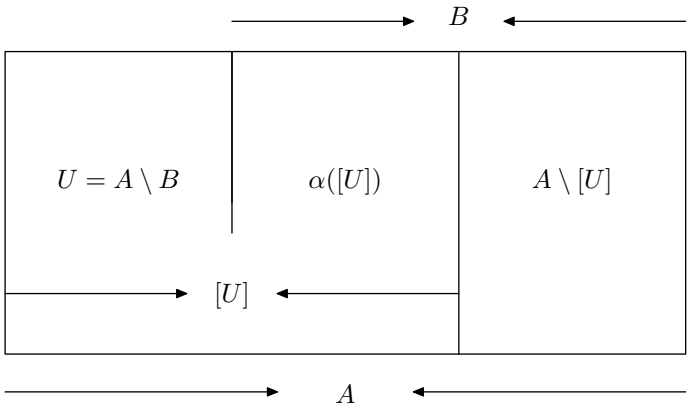


Abb. 2.3: Satz von Dedekind-Bernstein

Es ist

$$A \setminus [U] \subset A \setminus U = A \setminus (A \setminus B) = B.$$
$$B \cap [U] = B \cap (U \cup \alpha([U])) = \alpha([U])$$

Daher ist $B = B \cap A = B \cap (A \setminus [U] \cup [U]) = A \setminus [U] \cup \alpha([U])$

Folgerung 2.11. *Ist $\alpha\colon A \to A$, $\alpha(A) \subset B \subset A$ und $U = A \setminus B$, so ist die Abbildung:*

$$\beta\colon A \ni a \mapsto \begin{cases} \alpha(a) & \textit{für } a \in [U] \\ a & \textit{sonst} \end{cases} \in B$$

surjektiv.

Klar oder

- Ist $b \in \alpha([U])$, so gibt es ein $a \in [U]$ mit $\alpha(a) = b = \beta(a)$.
- $b \in A \setminus [U]$, so ist $b = Id(b) = \beta(b)$. □

Satz 2.12 (Dedekind 1887). *Sei $\alpha\colon A \to A$ eine injektive Abbildung $\alpha(A) \subset B \subset A$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\beta\colon A \to B$.*

Dieser Satz steht im Nachlass von Richard Dedekind Band III unter dem Titel „Ähnliche Abbildungen und ähnliche Systeme“ 1887 7.11 (Tagebuch).

Zu zeigen ist noch, dass die Abbildung β aus 2.11 auch injektiv ist. Sei $\beta(a) = \beta(a')$.

- $a, a' \in [U]$. Dann ist $\alpha(a) = \beta(a) = \beta(a') = \alpha(a')$. Da α injektiv ist, ist $a = a'$.
- $a \in [U]$ und $a' \in A \setminus [U]$. Aber $[U] \ni \alpha(a) = \beta(a) = \beta(a') = a' \in A \setminus [U]$ ist unmöglich.
- $a, a' \in A \setminus [U]$. Also ist $a = \beta(a) = \beta(a') = a'$.

Daher ist β auch injektiv und damit bijektiv. □

Satz 2.13 (Dedekind, Cantor, Bernstein). *Gibt es injektive Abbildungen $\alpha\colon A \to B$ und $\beta\colon B \to A$, so gibt es eine bijektive Abbildung $\gamma\colon A \to B$.*

Es ist $\beta\alpha\colon A \to A$ injektiv und $\beta\alpha(a) \subset \beta(B) \subset A$. Daher gibt es eine bijektive Abbildung $\gamma'\colon A \to \beta(B)$. Da $\beta(B)$ ähnlich zu B ist, gibt es eine bijektive Abbildung $\gamma\colon A \to B$. □

Emmy Noether schreibt hierzu in dem Buch: Richard Dedekind „Gesammelte Werke Band 3“ Fricke, Noether und Ore, *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke*, Seite 448

> Dieser nach Datierung vom 11. Juli 1887 stammende Beweis des Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes von 1897 ist genau derselbe, den Zermelo 1908 gegeben hat mit dem ausdrücklichen Hinweis, dass sein Beweis nur auf der Dedekindschen Kettentheorie. In der Tat findet sich der wesentliche Hilfssatz, $T = \mathfrak{M}(\phi(U_0), V)$ (Unser Satz**??**) schon ohne Beweis in Satz 63 §4 „Was sind und was sollen die Zahlen“

In einem Brief vom 29.August 1899 schreibt Dedekind über den Satz an Cantor:

> Als der junge Herr Felix Bernstein mich Pfingsten 1887 in Harzburg besuchte, sprach er von dem Satze B. auf Seite 7 der Übersetzung von Marotte und stutzte ein wenig, als ich meine Überzeugung aussprach, daß derselbe mit meinen Mitteln (Was sind und was sollen die Zahlen?) leicht zu beweisen sei; doch kam es zu keiner weiteren Unterhaltun über seinen oder meinen Beweis. Nach seiner Abreise setzte ich mich daran und konstruierte den hier beiliegenden Beweis des offenbar gleichwertigen Satzes C.

Dieser Beweis stimmt mit dem vorliegenden sachlich überein; die Bezeichnung ist geändert, schließt sich nicht mehr so eng an „Was sind und was sollen die

Zahlen?“ an. Offenbar hat Dedekind vergessen, dass es sich um die Rekonstruktion eines alten Beweises handelte. Den ursprünglichen Beweis fand J. Cavaillés-Paris im Nachlass.
Der Beweis von Dedekind hat den Vorteil, dass er nicht die Menge der natürlichen Zahlen verwendet. Er gilt auch, wenn man die Existenz einer unendlichen Menge nicht voraussetzt.
Weil dieser Satz so schön ist ein weiterer Beweis.

Satz 2.14 (Fixpunktsatz). *Jede monotone Abbildung $\varphi\colon H \to H$ eines vollständigen Verbandes hat einen Fixpunkt.*

Sei $M\colon = \{x | x \leq \varphi(x)\}$ und $s = \sup(M)$. Weil $x \leq s$ folgt $\varphi(x) \leq \varphi(s)$ für alle $x \in M$. Daher ist $\varphi(s)$ obere Schranke von M. Daher ist $s \leq \varphi(s)$. Da φ eine monotone Funktion ist, folgt $\varphi(s) \leq \varphi(\varphi(s))$. Also ist $\varphi(s) \in M$. Daher ist $\varphi(s) \leq s$. Es folgt $\varphi(s) = s$. □

Jetzt folgt wieder der 2.12 und damit der Satz von Cantor Bernstein.

Sei dazu wieder $U = A \setminus B$ Wir haben die monotone Abbildung $F\colon \mathfrak{P}(A) \ni X \mapsto \alpha(X) \cup U \in \mathfrak{P}(A)$. Sei C ein Fixpunkt dieser Abbildung. Also ist $C = \alpha(C) \cup U$. Wir erhalten: $A \setminus C = A \setminus (U \cup \alpha(C)) = (A \setminus U) \cap A \setminus (\alpha(C)) = B \cap (A \setminus \alpha(C)) = B \setminus (\alpha(C))$. Daher ist $A = C \cup B \setminus (\alpha(C)); \alpha(C) \subset B$ und $B = \alpha(C) \cup B \setminus (\alpha(C)) = \alpha(C) \cup (A \setminus C)$. Also liefert

$$\beta\colon A \ni a \mapsto \begin{cases} \alpha(a) & \text{für } a \in C \\ a & \text{sonst} \end{cases} \in B$$

die gewünschte Bijektion. [4] □

2.3 Morphismen

2.3.1 Definition und einfache Eigenschaften

Es ist immer wichtig die strukturerhaltenden Abbildungen zu betrachten: Eine Frage ist: Meinen der Urzeithirte Abel und Āryabhata dasselbe? Abel wird, wenn er gezählt hat, Striche aneinandergefügt haben. Der indische Mathematiker Āryabhata hat unser Stellenwertsystem erfunden. Er zählt etwa im Dualsystem $0, 1, 10, 11, 100, 101 \ldots$. Bedeuten die Zeichenreihen `||||` und `100`

[4] Eigentlich ist der Fixpunktsatz (er stammt von Tarski und Knaster) überflüssig. Denn es ist $[U] = [U] \cup \alpha([U])$ ein Fixpunkt von F.

dasselbe? Gibt es eine Übersetzung, die mit dem „Eins weiter“ des Urzeithirten und dem „Eins weiter “ des Inders verträglich ist? Gibt es eine Funktion f, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist?

$$\begin{tikzcd}
\text{Abel} & \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & | \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & || \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & ||| \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & |||| \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & \dots \\
\text{Inder} & 0 \arrow[r, "\beta"'] & 1 \arrow[r, "\beta"'] & 10 \arrow[r, "\beta"'] & 11 \arrow[r, "\beta"'] & 100 \arrow[r, "\beta"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

Es muss eine ordentliche Leiter entstehen. Wenn Abel eins weiter geht und dann übersetzt, muss dasselbe herauskommen, wie wenn zuerst übersetzt wird und dann der Inder eins weiter geht. Betrachtet man die Paare der Kette, so sieht man die Menge der Paare

$$\{(a, f(a)) | a \text{ ein Strichmuster } \wedge f(a) \text{ ein 01 Muster}\}$$

ist gegenüber der Abbildung $(\alpha|\beta)$ abgeschlossen. Tatsächlich gibt es eine solche Übersetzung. Sie ist leicht zu programmieren.
Betrachten wir andererseits das Bild 2.1, so sehen wir sofort, dass eine solche Übersetzung vom „einfachsten Zykel“ in den „Kreis“ nicht gelingen kann.

Satz 2.15. *Sind (A, α) und (B, β) zwei Ketten, so sind für eine Abbildung $f : A \to B$ äquivalent:*

1. *Das Diagramm ist kommutativ.*
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"'] \\
B \arrow[r, "\beta"'] & B
\end{tikzcd}$$

2. *Der Graph $G = \{(a, f(a)) | a \in A\}$ ist gegenüber (α, β) abgeschlossen.*

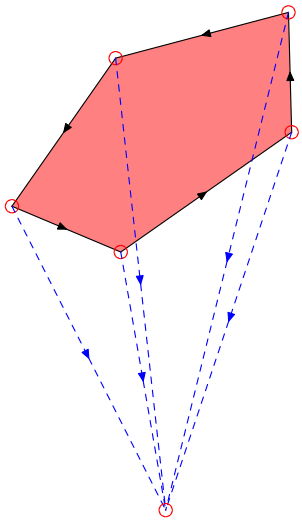
3. *Es ist $f \circ \alpha = \beta \circ f$.*

1. $\Rightarrow$ 3. Sei $a \in A$. Dann ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a))$ für alle $a \in A$ wegen der Kommutativität des Diagramms.
3. $\Rightarrow$ 2. Es sei $(a, f(a)) \in G$. Dann ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a))$. Also ist $(\alpha(a), f(\alpha(a))) = (\alpha(a), \beta(f(a))) \in G$. Also ist $(\alpha, \beta)(a, f(a))) \in G$. Also ist G gegenüber (α, β) abgeschlossen.
2. $\Rightarrow$ 1. Sei $a \in A$. $(a, f(a))) \in G$ Also ist $(\alpha(a), \beta f(a)) \in G$. Da f eine Funktion ist, ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a))$. Das war behauptet. $\square$

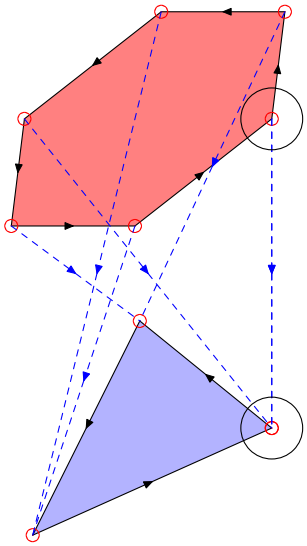
Definition 16. Sind (A, α) und (B, β) Ketten, so heißt $f : A \to B$ ein Homomorphismus oder Morphismus, wenn f die Eigenschaften des Satzes erfüllt.

Damit ist $f\colon A \to A$ ein Morphismus, wenn f mit α kommutiert. Beispiele:

2. Sei $\alpha : \mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$. Wählt man im Ziel $\beta = \alpha$ so sind die Homomorphismen $(\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \alpha)$ gerade die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also die zum 0-Punkt punktsymmetrischen Abbildungen.
3. Sei $\alpha : \mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}$ und $\beta : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ die Identität. Die Homomorphismen $f : (\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \beta)$ sind gerade die Abbildungen, die symmetrisch gegenüber der $y-$ Achse sind.
4. Sei $\alpha : \mathbb{R} \ni x \mapsto x + c \in \mathbb{R}$ und β die Identität. Dann sind die Homomorphismen $f : (\mathbb{R}, \alpha) \to (\mathbb{R}, \beta)$ gerade die periodischen Abbildungen mit der Periode c.
5. Ich habe hier ein paar Beispiele von Homomorphismen gemalt:



Genau-ein-Morphismus



Auch-ein-Morphismus

Satz 2.16. *Bild und Urbild von abgschlossenen Mengen unter Homomorphismen sind abgeschlossen.*

Sehr einfach □

Satz 2.17. *Die Klasse der Ketten bilden zusammen mit den zugehörigen Morphismen eine Kategorie.*

Die Identität ist immer ein Morphismus. Sind $(A, \alpha), (B, \beta)$ und (C, γ) drei Ketten und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Homomorphismen. Dann ist: $g \circ f)\alpha = g(f\alpha) = g(\beta f) = \gamma(g \circ f)$. Also ist $g \circ f$ ein Morphismus. □

Die Kategorie der Ketten bezeichne ich mit $\widehat{\mathcal{S}}$
In dem Buch von F. William Lawvere und Stephan H. Schanuel (Siehe Lawvere und H.Schanuel, *Conteptual Mathematics, A first introduction to categories*) nennen dies die Autoren die Kategorie der Endomaps.
Das einfachste und langweiligste Objekt in dieser Kategorie ist wie in der Kategorie der Mengen, die leere Menge $\emptyset$ mit der leeren Selbstabbildung als Funktion. Ich bezeichne sie als leere Kette. Die leere Kette ist ein Anfangsobjekt in der Kategorie der Ketten. Jede einelementige Menge $\{0\}$ mit der Identität ist ein Endobjekt in dieser Kategorie. Wie in der Kategorie der Mengen gibt es keine Nullobjekte. Auch richtig ist:

Satz 2.18. *Das Inverse eines bijektiven Morphismusses ist ein Morphismus.*[5]

Sei $f\colon (A,\alpha) \to (B,\beta)$ ein bijektiver Morphismus und g die Umkehrabbildung. Dann folgt: $f\alpha = \beta f$. Daher $(gf)\alpha = g\beta f$. Also ist $\alpha = g\beta f$. Es folgt $\alpha g = g\beta$. Daher ist g ein Morphismus. □

Aufgaben:

13. a) Gib zwei Ketten mit jeweils zwei Elementen an, die nicht isomorph sind.
    b) Gib alle Isorphieklassen von Ketten mit 2 Elementen an.
    c) Gib alle Isomorphieklassen von Ketten mit 3 Elementen an.

Aber vieles, was in der Kategorie der Mengen wahr ist, gilt nicht mehr in der Kategorie der Ketten.

- Dort besagt der Satz 1.11, dass es zu jeder injektiven Abbildung

  $f\colon A \to B$ eine Abbildung $g\colon B \to A$ gibt, so dass $g \circ f = 1_A$ ist. Dies gilt hier nicht: Betrachte etwa $A = \{a,b\}$ und $\alpha : a \to b \to b$,

  und $B = \{0,1,2\}$ $\beta : 0 \to 1 \to 2 \to 2$. Dann ist $f : a \mapsto 1, b \mapsto 2$ ein Morphismus.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[r] \arrow[d, "f"] & b \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 2
\end{tikzcd}$$

  Eine linksinverse Abbildung g von f muss erfüllen: $g(1) = a$ und $g(2) = b$. Dies kann kein Morphismus sein. Denn es ist $g(0) = a$ oder $g(0) = b$ möglich.

  - Ist $g(0) = a$, so ist $g(1) = g(\beta(0)) = \alpha(g(0)) = \alpha(a) = b$. Das ist ein Widerspruch.

[5] Dies ist in der Kategorie der topologischen Räume nicht der Fall.

  - Ist $g(0) = b$, so ist $g(1) = g(\beta(0)) = \alpha(g(0)) = b$. Das geht nicht, da ja $g(1) = a$ gelten muss.

  Also ist in $\overset{\frown}{\mathcal{S}}$ keineswegs jeder Monomorphismus ein Schnitt.

- Das duale ist auch nicht richtig. In **Me** gibt es zu jedem Epimorphismus $f\colon A \to B$ ein $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = 1_B$. Dies ist in $\overset{\frown}{\mathcal{S}}$ nicht der Fall. Betrachte $A = \{0, 1\}$ $\alpha : 0 \mapsto 1 \mapsto 0$ und $B = \{0\}$ mit $\beta(0) = 0$. Dann ist die konstante Abbildung $f\colon A \to B$ ein Morphismus. Aber es gibt keinen Morphismus in die Gegenrichtung.

Vieles bleibt aber richtig.
Eine Äquivalenzrelation auf der Kette (A, α) heißt mit α verträglich, wenn für alle $a \sim a'$ gilt: $\alpha(a) \sim \alpha(a')$. Der Durchschnitt von mit α verträglichen Äquivalenzrelationen ist mit α veträglich. Ist daher $H \subset A \times A$ irgend eine Menge, so gibt es eine kleinste Äquivalenzrelation, die mit α verträglich ist und H enthält.

Satz 2.19. *Ist $\sim$ eine Äquivalentrelation auf der Kette A, so hat man die surjektive Abbildung $\pi\colon A \ni a \mapsto \{a' | a' \sim a\} \in A/\sim :=$ Menge der Äquivalenzklassen. Ist $\sim$ mit α veträglich, so wird $A/\sim$ durch $\overline{\alpha}(\pi(a)) = \pi(\alpha(a))$ zu einer Kette. Und π wird surjektiver Morphismus.*

Der Beweis ist einfach.

Satz 2.20 (Homomorphiesatz für Ketten). *Sei $f\colon (A, \alpha) \to (B, \beta)$ ein Morphismus von Ketten. Dann gibt es einen injektiven Morphismus $f^* : A/\sim \to B$ mit $f = f^*\pi$. Dabei ist $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.*

Da f ein Morphismus ist, ist für $x \sim y$: $f(\alpha(x)) = \beta(f(x)) = \beta(f(y)) = f(\alpha(x))$. Also ist die Äquivalenzrelation mit α verträglich. Ich definiere:
$f^*(\pi(x)) := f(x)$. Denn $\pi(x) = \pi(y)$, dann ist $x \sim y$ und also $f(x) = f(y)$. Es ist f^* ein Morphismus.
Denn $f^*(\overline{\alpha}(\overline{x})) = f^*(\overline{\alpha(x)}) = f^*(\pi(\alpha(x))) = f(\alpha(x)) = \beta(f(x)) = \beta(f^*(\overline{x}))$.
Es ist f^* injektiv. Denn ist $f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y))$, so ist $f(x) = f(y)$ und daher $x \sim y$. Daher ist $\pi(x) = \pi(y)$. □

Fragen:

4. Was ist los, wenn man den Ketten Struktur gibt. Also zum Beispiel: Die Ketten seien abelsche Gruppen und die Struktuabbildungen Homomorphismen.

Ein wichtiges Beispiel zu dem Satz liefert die folgende Überlegung:

Definition 11 Sei $U \hookrightarrow A$. Wir sagen: Ein Morphismus $f\colon A \to B$ zieht U zusammen oder identifiziert die Elemente aus U, genau dann, wenn $f(u) = f(u')$ für alle u, u' aus U. □

Bemerkung 5 Sei $\emptyset \neq U \hookrightarrow A$ und $A \xrightarrow{f} B$ ein Morphismus, der U zusammenzieht. Dann gibt es in B einen Fixpunkt b von β mit $f(u) = b$ für alle $u \in U$ □

Sei $u \in U$. Dann ist $\alpha(u) \in U$. Daher ist $f(u) = f(\alpha(u)) = \beta(f(u))$. Also ist $b = f(u)$ der gesuchte Fixpunkt. Die Umkehrung der Bemerkung gilt auch. □

Wir definieren nun zu $\emptyset \neq U \hookrightarrow A$ eine besondere Kette A/U. Sei $\omega \notin A$ und $V = A \setminus U$.

$$A/U\colon = \{\omega\} \cup V. \tag{2.2}$$

$$\overline{\alpha}\colon \ni x \mapsto \begin{cases} \omega \text{ falls } x = \omega \\ \omega \text{ falls } x \in V \text{ und } \alpha(x) \in U \\ \alpha(x) \text{ sonst} \end{cases} \tag{2.3}$$

Dadurch wird A/U zu einer Kette.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \circ \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[dl] & \circ \arrow[r, dotted] \arrow[dl, dotted] & {} \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \bullet \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \bullet \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \omega \arrow[loop right] & & &
\end{tikzcd}$$

In der Zeichnung sind mit $\circ$ die Elemente aus U symbolisiert und mit $\bullet$ die Elemente aus $V = A \setminus U$.

Satz 2.21. *Ist $U \hookrightarrow A$. Dann ist die Abbildung $\pi_U\colon A \ni a \mapsto \begin{cases} \omega \text{ falls } a \in U \\ a \text{ sonst} \end{cases}$ ein surjektiver Morphismus, der auf V eine injektive Abbildung ist.*

1. Sei $u \in U$. Dann ist $\alpha(u) \in U$. Wir erhalten: $\omega = \pi(\alpha(u)) = \overline{\alpha}(\omega) = \overline{\alpha}(\pi(u))$.
2. $\alpha(x) \in U$ und $x \in V$: Dann ist: $\pi(\alpha(x)) = \omega = \overline{\alpha}(x) = \overline{\alpha}(\pi(x))$.
3. $\alpha(x) \notin U$: Dann ist: $\pi(\alpha(x)) = \alpha(x) = \overline{\alpha}(x) = \overline{\alpha}(\pi(x))$.

Dieser surjektive Morphismus π zieht U zusammen und lässt die anderen Elemente in Ruhe. □

Folgerung 2.22. *Jeder Epimorphismus in $\overset{\curvearrowright}{\mathcal{S}}$ ist eine surjektive Abbildung.*

Sei $C \xrightarrow{f} A$ ein Epimorphismus. Sei $U := f(C)$, $\pi\colon A \to A/U$ und $k_\omega\colon A \to \{\omega\}$. Es ist $\pi \circ f = k_\omega \circ f$. Da f ein Epimorphismus ist, folgt $\pi = k_\omega$. Also ist f surjektiv.

Satz 2.23. *Ist $U \hookrightarrow A$ und $f\colon A \to B$ ein Morphismus, der U zusammenzieht, so gibt es genau einen Morphismus $f^*\colon A/U \to B$ mit $f^*\pi = f$. Das heißt das folgende Diagramm ist kommutativ.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ A/U \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

Da f die Unterkette U zusammenzieht, gibt es in B einen Fixpunkt b von β mit $(u) = b$ für alle $u \in U$. Wir erklären:

$$f^*\colon A/U \ni x \mapsto \begin{cases} b \text{ für } x = \omega \\ f(x) \text{ sonst} \end{cases}$$

f^* ist ein Morphismus. Denn:

1. $x = \omega$. Dann ist $f^*(\overline{\alpha}(\omega)) = f^*(\omega) = b$.
2. $x \in V = A \setminus U$: Dann gibt es zwei Möglichkeiten:
   a) $\alpha(x) \in U$: Wir erhalten $f^*(\overline{\alpha(x)}) = f^*(\omega) = b$ und $\beta(f^*(x))\beta(f(x)) = f(\alpha(x)) = b$.
   b) $\alpha(x) \notin U$: $f^*(\overline{\alpha}(x)) = f^*(\alpha(x)) = f(\alpha(x)) = \beta(f(x))$. □

Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen:
Es sei $g \circ \pi = f = f^* \circ \pi$. Da π eine surjektive Abbildung ist, ist $g = f^*$.

Satz 2.24. *Es habe (Q, π') auch die Eigenschaft des Satzes vorher. Dann ist $Q \cong A/U$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"] & Q' \\ A/U \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Es gibt genau ein $g\colon A/U \to Q$ mit $g\pi = \pi'$. Genauso gibt es genau ein $f\colon Q \to A/U$ mit $f\pi' = \pi$. Es folgt $g\pi = gf\pi' = 1_Q\pi'$. Wegen der Eideutigkeit folgt $1_Q = gf$. Entsprechend folgt die umgekehrte Verkettung. □

15. März 2017

Man kann den letzten Satz auch einer allgemeineren Situation unterordnen. Wir betrachten die Klasse

$$\mathfrak{B}\colon = \{(B,\pi)|\pi\colon A \to B \text{ und } \pi \text{ zieht } U \text{ zusammen }\}$$

Sind $(B,\pi),(B',\pi')$ zwei solche Zusammenziehunhungen, so ist ein Morphismus $f\colon B \to B'$ ein Morphismus in der Kategorie der Zusammenziehungen, wenn $f\pi = \pi'$ gilt. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

Diese Zusammenziehungen bilden eine Kategorie.

Satz 2.25. *A/U ist ein Anfangsobjekt in der Kategorie der Zusammenziehungen.*

Der Beweis steht oben.

2.3.2 Zyklische Ketten

Ist (A,α) eine Kette, so kann $[A,A]$ =Menge der Morphismen von A nach A selber in der folgenden Weise als einstellige Algebra aufgefasst werden. Wir erklären:

$$\alpha* := [\alpha,-]\colon [A,A] \ni f \mapsto \alpha \circ f \in [A,A]$$

In $[A,A]$ erzeugt die Idendität bezüglich $\alpha*$ eine Bahn. Ich bezeichne sie mit $[1_A]_{\alpha*}$

Satz 2.26. *Ist $[a]$ eine zyklische Kette (A,α), so ist: $\{f(a)|f \in [1_A]_{\alpha*}\} = [a]$. Zu jedem $c \in [a]$ gibt es genau ein $f \in [1_A]_{\alpha*}$ mit $f(a) = c$.*

Sei

$$T = \{c|c \in [a] \text{ und } c = f(a) \text{ für ein } f \in [1_A]_{\alpha*}\}$$

Es ist $a \in T$, denn $a = 1_A(a)$. Sei $b \in T$. Dann gibt es ein $f \in [1_A]_{\alpha*}$ mit $f(a) = b$. Wir erhalten $\alpha(b) = (\alpha \circ f)(a)$. Daher ist $\alpha(b) \in T$. Daher ist $T = [a]$. Zu jedem $c \in [a]$ gibt es daher ein $f \in [Id]_{\alpha*}$ mit $f(a) = c$. Dieses f ist auch eindeutig bestimmt. Denn ist $h(a) = f(a)$, so ist $f = h$. □

Ist also $[a]$ eine zyklische Kette, so hat man eine Abbildung: $\Phi : [a] \ni c \mapsto \Phi(c) \in [A,A]$, dabei ist $\Phi(c)$ der eindeutig bestimmte Morphismus f mit $f(a) = c$.

Satz 2.27. *Ist* $[a]$ *eine zyklische Kette, so ist* Φ *ein bijektiver Morphismus zwischen* $([a], \alpha) = [1_A]_{\alpha*} = ([A, A], \alpha*)$.

Es ist Φ surjektiv. Denn wenn f ein Morphismus ist mit $f(a) = c$, so ist $\Phi(c)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\Phi(c)(a) = c$. Außerdem ist Φ injektiv. Denn sei $\Phi(c) = \Phi(c')$. Dann ist $c = \Phi(c)(a) = \Phi(c')(a) = c'$. Bleibt zu zeigen, dass Φ ein Morphismus ist.
Dafür ist zu zeigen, dass $\Phi(\alpha(c)) = \alpha * (\Phi(c))$ ist. Linke und rechte Seite der Gleichung sind Morphismen. Wir müssen sie nur auf a anwenden, um zu sehen ob sie gleich sind.
Man hat: $\Phi(\alpha(c))(a) = \alpha(c)$.
Und $\alpha * (\Phi(c))(a) = (\alpha \circ \Phi(c))(a) = \alpha(c)$. Also ist $\Phi(c)$ ein Morphismus. □

Definition 17. Sei $U \subset [A, A]$ und $V \subset A$. $U \cdot V := \{f(a) | f \in U \wedge v \in V\}$

Satz 2.28. *Für alle* $a \in A$ *ist* $[a] = [1_A]_{\alpha*} \cdot a$

Die rechte Seite der Gleichung ist gegenüber α abgeschlossen und enthält a.

Satz 2.29. *Ist die Kette* (A, α) *von dem Element* a *erzeugt, so ist* $[A, A]$ *kommutativ.*

Es sei $f \in [A, A] = [1_A]_{\alpha*}$. Durch Induktion zeige ich: f kommutiert mit jedem $g \in [A, A]$. Sei

$$T = \{g | g \in [A, A] \wedge f \circ g = g \circ f\}$$

Es ist $1_A \in T$. Sei $g \in T$. Dann $(\alpha * (g)) \circ f = (\alpha \circ g) \circ f = \alpha \circ (g \circ f) = \alpha \circ (f \circ g) = f \circ (\alpha \circ g) = f \circ (\alpha * (g))$. Also kommutiert f mit $\alpha * (g)$. Daher ist T abgeschlossen gegenüber $\alpha*$ und daher ist $T = [1_A]_{\alpha*} = [A, A]$. □

Beispiele:

6. Gegeben sei die Algebra $A = \{a, b\}$ mit der Funktion $\alpha(a) = b$ und $\alpha(b) = b$. Es gibt dann genau zwei Morphismen $f : A \to A$. Nämlich die Identität und den Morphismus $g(a) = b$. Stellen wir die Verknüpfungstafel für diese zwei Morphismen auf, so sieht sie so aus, wenn wir mit g die Abbildung $g(a) = b$ bezeichen.

	1_A	g
1_A	1_A	g
g	g	g

Aufgaben:

14. Sei $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ und
$\alpha(x) := \begin{cases} 1 + x & \text{für} x < n \\ n & \text{für } x = n \end{cases}$ Berechne für die folgenden n die Verknüfungstafel von $[A, A]$
    a) $n = 2$.
    b) $n = 4$.
    c) Algemein für n.
15. Sei $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ und
$\alpha(x) := \begin{cases} 1 + x & \text{für} x < n \\ n - 1 & \text{für } x = n \end{cases}$ Berechne für die folgenden n die Verknüfungstafel von $[A, A]$
    a) $n = 2$.
    b) $n = 4$.
    c) Algemein für $n > 2$.

Definition 18. Ist (A, α) zyklisch und erzeugt von a, also $A = [a]$, so kann man folgendermaßen eine Verknüpfung auf A erklären.

$$b \circ c \colon = \Phi(b)(c)$$

Dabei ist $\Phi(b)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\Phi(b)(a) = b$.

Satz 2.30. *Es gilt:*

1. $a \circ b = b \circ a = b$ *für alle* $b \in A$.
2. $(b \circ c) \circ d = b \circ (c \circ d)$ *für alle* $b, c, d \in A$.
3. $b \circ c = c \circ b$ *für alle* $b, c \in A$

Zu 1:
$a \circ b = \Phi(a)(b) = b$, da $\Phi(a)$ die Identität ist. Weiter ist nach Definition $\Phi(b)(a) = b$. Daher folgt die Behauptung.
Zu 2:
Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f \colon A \ni x \mapsto (b \circ c) \circ x \in A$$
$$g \colon A \ni x \mapsto b \circ (c \circ x) \in A$$

Es ist $f(x) = \Phi(b \circ c)(x)$, also $f = \Phi(b \circ c)$. Und es ist $g(x) = \Phi(b)(c \circ x) = (\Phi(b) \circ \Phi(c))(x)$. Also ist $g = \Phi(b) \circ \Phi(c)$. Es sind daher f und g Morphismen. Wir müssen nur noch untersuchen ob sie in dem Argument a übereinstimmen. Es ist $f(a) = \Phi(b \circ c)(a) = b \circ c$ und $g(a) = (\Phi(b) \circ \Phi(c))(a) = \Phi(b)(c) = b \circ c$. Daher folgt das Assoziativgesetz.
Zu 3. Klar da $[A, A]$ kommutativ ist. □

Satz 2.31. *Folgende Aussagen sind für eine Kette (A, α) äquivalent:*

1. *Nur die leere Menge und A selber sind abgeschlossene Teilmengen von A.*
2. *$A = [a]$ für ein $a \in A$ und α ist surjektiv.*
3. *$A = [a]$ für ein $a \in A$ und α ist bijektiv.*
4. *$A = [a]$ für ein $a \in A$ und alle Elemente in $[A, A]$ sind invertierbar mit Inversen in $[A, A]$.*
5. *Für alle $d \in A = [a]$ ist $[d] = A$.*

[6]

1. $\Rightarrow$ 2.:
Es ist $\alpha(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von A. Daher ist $\alpha(A) = A$. Also ist α surjektiv. Sei etwa $a \in A$. Dann ist $[a]$ eine abgeschlossene Teilmenge von A. Also ist $[a] = A$.
2. $\Rightarrow$ 3.: Es gibt ein $b \in A$ mit $\alpha(b) = a$. Außerdem gibt es ein $f \in [A, A]$ mit $f(a) = b$. Daher ist $(\alpha \circ f)(a) = (f \circ \alpha)(a) = a$. Also ist $\alpha \circ f = f \circ \alpha = 1_A$. Damit ist α ein Isomorphismus.
3. $\Rightarrow$ 4.: Es ist $[A, A] = [1_A]_{\alpha *}$. Sei

$$T = \{f | f \in [A, A], f \text{ invertierbar } in [A, A]\}$$

Es ist $1_A \in T$. Sei $f \in T$. Dann gibt es $g \in [A, A]$ mit $f \circ g = g \circ f = 1_A$. Mit α ist auch $\alpha^{-1} \in [A, A]$. Denn α^{-1} kommutiert mit α.Es folgt: $\alpha * (f) = \alpha \circ f$ und $(\alpha \circ f) \circ (g \circ \alpha^{-1}) = 1_A$. Daher ist $\alpha * (f)$ in $[A, A]$ invertierbar. Daher ist $T = [1_A]_{\alpha *} = [A, A]$.
4. $\rightarrow$ 5.: Sei $d \in [a]$. Es gibt ein Morphismus $f : [a] \rightarrow [a]$ mit $f(a) = d$. Sei $g \in [A, A]$ der inverse Morphismus. Daher ist $g(b) = a$. Also ist wegen Satz 2.28 $a \in [b]$. Daher ist $[a] = [b]$.
5. $\Rightarrow$ 1.: Sei $U \subset A$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von A. Dann gibt es ein $a \in U$. Daher ist $[a] = A$. Also ist $A = [a] \subset U$. □

[6] Dieser Satz erinnert an das Lemma von Schur aus der Modultheorie. Der Endomorphismenring eines einfachen Moduls ist ein Schiefkörper

Definition 19. Eine Kette heißt einfach, kreisförmig oder einfach ein Kreis, wenn sie die Bedingungen des Satzes erfüllt.

> Dedekind macht in seiner Schrift (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite X im Vorwort zur 2. Auflage) folgenden Vorschlag: „Ein System heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden lässt, dass kein echter Teil von A in sich selbt abgebildet wird.“ Weiter schreibt er dazu: „Nun mache man einmal den Versuch, auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu erichten! Man wird alsbald auf große Schwierigkeiten stoßen...“. Beachtet man den Satz 2.31, so besagt Dedekinds Vorschlag: Eine Menge A ist endlich, genau dann wenn es eine Abbildung α gibt, so dass (A, α) kreisförmig ist. Später werde ich das Thema nochmal aufgreifen.

Satz 2.32. *Sind $([a], \alpha)$ und (B, β) zwei Ketten und β injektiv. Stimmen zwei Morphismen $f, g : [a] \to B$ in einem Argument überein, so sind gleich.*

Sei $T = \{c | c \in [a] \text{ und } f(c) = g(c) \Rightarrow f = g\}$.
Es ist $a \in T$. Sei $c \in T$. Weiter sei $f(\alpha(c)) = g(\alpha(c))$. Dann ist $(\beta \circ f)(c) = (\beta \circ g)(c)$. Dann ist $f(c) = g(c)$, da β injektiv ist. Also ist $f = g$. Daher ist T gegenüber α abgeschlossen. Also ist $T = [a]$. □

Folgerung 2.33. *Ist (A, α) eine zyklische Kette $A = [a]$ mit injektivem α, so gilt die Kürzungsregel: $b \circ c = b' \circ c$ für ein $c \in A$, so ist $b = b'$ Anders ausgedrückt: Die Abbildung $A \ni x \mapsto c \circ x \in A$ ist injektiv.*

Die beiden Morphismen $\Phi(b)$ und $\Phi(b')$ stimmen in dem Argument c überein. Also sind sie gleich. Daher ist $b = \Phi(b)(a) = \Phi(b')(a) = b'$ □

Definition 20. Sei $([a], \alpha)$ eine zyklische Kette. Dann schreiben wir für die oben definierte Verknüpfung $c \circ b$ meist $c + b$. Da für alle $b \in [a]$ gilt: $a + b = b$ ist a Neutralelement. Dieses ist eindeutig bestimmt. Wir benennen es in dieser Situation mit 0.

Folgerung 2.34. *Ist $A = ([0], \alpha)$ eine zyklische Kette mit injektivem α, so ist A eine regulärer Monoid. Das heißt es gilt die Kürzungsregel. Für alle $b, c, b' \in A$ gilt: $b + c = b' + c$, dann ist $b = b'$.*

Definition 21. In der Situation der Folgerung 2.34 ist $(A, +)$ eine regulärer kommutativer Monoid.

Folgerung 2.35. *Ist $A = ([0], \alpha)$ die Abbildung α sogar bijektiv, so gibt es zu jedem $b \in A$ ein eindeutig bestimmtes $c \in A$ mit $b + c = 0$. Man sagt $(A, +)$ ist eine zyklische Gruppe.*

Sei $b \in [a]$. Alle Elemente aus $[A, A]$ sind invertierbar. Daher gibt es ein$c \in [0] = A$ mit $\Phi(c)(b) = 0$. Daher ist $c + b = 0$. ist c' ein weiters solches c, so ist wegen der Kürzungregel $c = c'$. □

Definition 22. Ist $(A, +)$ eine kommutative Gruppe, so heißt das eindeutig bestimmte c mit $b + c = 0$ auch $-b$.

Ist U eine gegenüber α abgeschlossene Untermenge der Kette (A, α), so ist die Inklusion ein Homomorphismus. Die Abbildung $\alpha : A \to A$ ist natürlich selber ein Homomorphismus.

Satz 2.36. *Sei (A, α) eine von U erzeugte Kette. Dann gilt für alle Ketten (B, β) und alle Abbildungen $U \xrightarrow{f} B$: Es gibt höchstens einen Homomorphismus $A \xrightarrow{f^*} B$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[dl, "f^*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Seien $g, h : A \to B$ zwei Homomorphismen, die $g(u) = h(u) = f(u)$ für alle $u \in U$ erfüllen. Durch Induktion zeige ich nun, dass $g(a) = h(a)$ für alle $a \in A$ ist. Sei dazu

$$T = \{a | a \in A \text{ mit } g(a) = h(a)\}$$

Nach Voraussetzung ist $U \subset T$. Ich zeige: T ist gegenüber α abgeschlossen. Sei dazu $a \in T$. Also ist $g(a) = h(a)$. Da g, h Homomorphismen sind folgt: $g(\alpha(a)) = \beta(g(a)) = \beta(h(a)) = h(\alpha(a))$. T ist gegenüber α abgeschlossen. Nun ist aber A die kleinste Menge, die U enthält und gegenüber α abgeschlossen ist. Daher ist $T = A$. Dies war zu zeigen. □

Satz 2.37. *In der Kategorie der Ketten gibt es Differenzkerne.*

Seien $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ zwei Morphismen. Außerdem erfülle der Morphismus $h : C \to A$ die Gleichung $fh = gh$.

$$T = \{a | f(a) = g(a)\}$$

ist abgeschlossen gegenüber α. Denn sei $a \in T$. Dann ist $f(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(g(a)) = g(\alpha(a))$. Also ist T mit α selber eine Kette und $\iota : T \ni a \mapsto a \in A$ ein Morphismus mit $f\iota = g\iota$. Es ist $h(C) \subset T$. Erklären wir nun $h^* : C \ni c \mapsto h(c) \in T$,so ist $\iota h^* = h$. h^* ist auch die einzige Abbildung, die dies erfüllt. □

Satz 2.38. *In der Kategorie der Ketten gibt es Differenzkokerne.*

Seihen $h, g\colon A \to B$ zwei Morphismen. Es gibt eie kleinste Äquivalenzrelation auf B mit $f(a) \sim g(a)$ für alle $a \in A$, die mit β verträglich ist. Sei $Q := B/\sim$. Weiter sei $B \xrightarrow{\pi} Q$ die kanonische Projektion. Dann ist Q ein Differenzkokern von f, g.
Sei $B \xrightarrow{h} C$ ein Morphismus mit $hf = hg$. Dann definiert $b \sim_1 b' :\iff h(b) = h(b')$ eine mit β verträgliche Äquivalenzrelation auf B und für alle $a \in A$ ist $f(a) \sim_1 g(a)$. Wir definieren

$$h^*(\pi(b)) := h(b)$$

Dies ist wohldefiniert. Denn ist $\pi(b) = \pi(b')$, so ist $b \sim b'$ und also $b \sim_1 b'$. Daher ist $h(b) = h(b')$. Außerdem ist $h^*(\overline{\beta}(\pi(b))) = h^*(\pi(\beta(b))) = h(\beta(b)) = \gamma(h(b))$, wenn (C, γ) die Kette ist. □

Wie schon früher gesagt, verwende ich in den Beispielen $\mathbb{N}$.
Beispiele:

7. Sei $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ mit $f(n) = n+3$. Weiter sei $g(n) = n$. Will man den Differnzkokern von f und g bestimmen, so muss man die kleinsten Äquivalenzrelation bestimmen für die gilt $n + 3 \sim n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher $0 \sim 3$, $1 \sim 4$, $2 \sim 5$ und $3 \sim 6 \sim 0$. Man überlege sich (ohne Teilen mit Rest), dass $\overline{0}, \overline{1}$ und $\overline{2}$ die einzigen Äquivalenzklassen sind. Daher ist $\mathbb{N}/\ = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Die zugehörige Strukturabbildung ist: $\overline{0} \to \overline{1} \to \overline{2} \to \overline{0}$
8. Sei $A = \{0, 1, 2, 3\}$ und $\alpha :$ $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
   Es sei f die Identität und $g(0) = 2$. Dadurch ist der Morphismus g eindeutig bestimmt. Ich berechne den Differenzkokern von f und g. Es ist $0 \sim 2$. Geht man jeweils eins weiter erhält man: $1 \sim 3$ und $2 \sim 3$. Also sid alle Elemente miteinander äquivalent. Es ist also $\overline{0}$ die einzige Äquivalenzklasse. Der Differnzkokern von f, g ist daher $\overline{0}$ mit der Identität. Der einfachste Zykel.

2.3.3 Koprodukt von Ketten

Satz 2.39. *In der Kategorie der Ketten gibt es Koprodukte.*

Sei $f_i : X_i \to X$ eine Familie von Morphismen zwischen den Ketten (X_i, γ_i) und (X, γ). Es sei

$$\coprod_{i \in I} X_i = \{(i, x) | i \in I \text{ und } x \in X_i\}$$

$\coprod_{i\in I} X_i$ wird zu einer Kette durch:

$$\Gamma : \coprod_{i\in I} X_i \ni (i,x) \mapsto (i,\gamma_i(x)) \in \coprod_{i\in I} X_i$$

Zu jedem $i \in I$ hat man die Injektion $q_i : X_i \ni x \mapsto (i,x) \in \coprod_{i\in I} X_i$. Es ist q_i ein Morphismus. Denn $q_i(\gamma_i(x)) = (i,\gamma_i(x)) = \Gamma(i,x) = \Gamma(q_i(x))$. Wir erklären zu $(f_i|i \in I)$:

$$f^* : \coprod_{i\in I} X_i \ni (i,x) \mapsto f_i(x) \in X$$

Dies ist ein Morphismus. Denn es ist:

$$f^*(\Gamma((i,x))) = f^*((i,\gamma_i(x))) = f_i(\gamma_i(x)) = \gamma(f_i(x)) = \gamma(f^*(i,x))$$

Also ist $f^* \circ \Gamma = \gamma \circ f^*$. Dies Abbildung ist auch einzig. Denn sei h ein Morphismus mit $h \circ q_i = f_i$ für alle $i \in I$. Und sei $y \in \coprod_{i\in I} X_i$. Dann gibt es $i \in I$ und $x \in X_i$ mit $y = (i,x)$. Wir erhalten: $h(y) = h((i,x)) = hq_i(x) = f_i(x) = f^*((i,x)) = f^*(y)$. Also ist $f^* = h$. □

2.3.4 Produkt von Ketten

Satz 2.40. *In der Kategorie der Ketten gibt es Produkte.*

2.4 Rekursionssatz

Schlägt man irgend ein Mathematikbuch auf, so sieht man wahrscheinlich irgendwann folgendes Definitionsschema.
(B,β) sei irgend eine Kette, wobei B eine beliebige Menge und β eine beliebige Funktion ist. Weiter sei $b \in B$ beliebig. Man erklärt eine Funktion $\mathbb{N} \xrightarrow{f} B$ durch: $f(0) := b$ und $f(1+n) := \beta(f(n))$. Kaum einer zweifelt daran, dass so eine Funktion tatsächlich gibt. Aber überlegen wir uns, warum dies richtig ist. Es ist $\mathbb{N}$ eine besondere Menge. $1+$ ist eine besondere Funktion $1+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Außerdem ist $0 \in \mathbb{N}$ ein besonderes Element in $\mathbb{N}$. Man geht den Sachen auf den Grund, wenn man versucht die Voraussetzungen zu verändern. Gelten dann noch ähnliche Argumente? Gelten noch ähnliche Tatsachen?

Es ist $(\mathbb{N}, 1+)$ eine Kette. Die Definition oben ist sinnvoll, wenn es eine Funktion gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "1+"] \arrow[d, "f"] & 1+n \arrow[d, "f"] \\ f(n) \arrow[r, "\beta"] & \beta(f(n)) \end{tikzcd}$$

Will man untersuchen, woran es liegt, dass es eine solche Abbildung gibt, sollte man sich am besten von zu viel „selbstverständlichen“ Wissen über die Abbildung 1+ und auch von zu viel „Selbstverständlichen“ von $\mathbb{N}$ befreien. Ersetzen wir also $(\mathbb{N}, 1+)$ durch eine beliebige andere Kette (A, α).

Beispiele:

9. $A = 0$ und $\alpha = 1_A$. Weiter sei $B = \{a, b\}$ und $\beta :$ $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$

   Man sieht sofort: Eine solche Funktion f wie gefordert kann es nicht geben. Denn für f müsste das Diagramm $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "\beta"] & b \end{tikzcd}$ kommutativ und rechtseindeutig sein. Das ist aber nicht der Fall.

10. Es sei $A = \{0, 1\}$ und $\alpha(0) = 1 = \alpha(1)$. Die Menge B wie im letzten Beispiel mit der gleichen Abbildung β. Wieder sieht man:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & 1 \arrow[d] \\ a \arrow[r, "\beta"'] & b \arrow[r, "\beta"'] & a \end{tikzcd}$$

   ist nicht rechts-eindeutig. Von 1 gehen zwei Pfeile aus mit verschiedenem Ziel.

Aufgaben:

16. Sei $A = \mathbb{N}$ und $\alpha(n) = (1 + n) \bmod 3$. $B = \mathbb{N}$ und $\beta(n) = (1 + n) \bmod 4$. Zeige: Es gibt keinen Morphismus $f\colon A \to B$ mit $f(0) = 0$.

17. **frei bezüglich** (B, β)**:** Eine zyklische Kette $(A, \alpha) = ([a], \alpha)$ heißt frei bezüglich (B, β), wenn es zu jedem $b \in B$ genau einen Morphismus $f : A \to B$ gibt mit $f(a) = b$.
    a) Sei $A = \{0\}$ und $\alpha : 0 \to 0$. Es ist (A, α) frei bezüglich (B, β) genau dann, wenn β die Identität ist.
    b) Ist $\beta : B \to B$ die Identität so ist jedes $[a]$ frei bezüglich B.
    c) Ist $A = \{0, 1\}$ und $\alpha : 0 \to 1 \to 0$ und A frei bezüglich B, so ist B elementfremde Vereinigung von Kreisen der Länge 2 oder 1.
    d) Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $\alpha : 0 \to 1 \to 2 \to 0$. Kennzeichne die Ketten (B, β) bezüglich denen A frei ist.
    e) Ist (A, α) frei bezüglich (N, β), so gibt es einen surjektiven Morphismus von einem Koprodukt der A nach B.

Der Satz 2.7 besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Rechtseindeutigkeit richtig ist. Ich will dies jetzt allgemein formulieren und beweisen. Es liegt einerseits daran, dass es in A genügend viele verschiedene Elemente gibt. Das erkennt man, wenn man die Situation versucht zu malen.

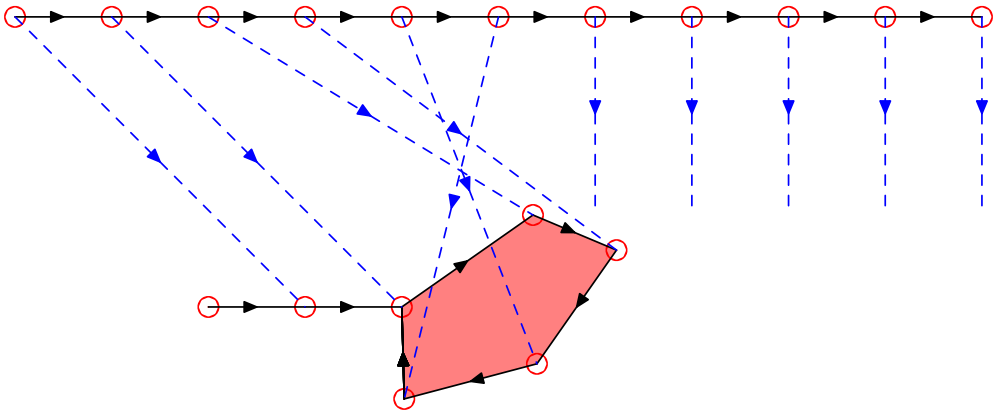


Abb. 2.4: Rekursionssatz

Satz 2.41 (Rekursionsatz Dedekind 1887). *Sei (A, α) eine Kette mit injektivem α. Die zu $\alpha(A)$ disjunkte Teilmenge U von A erzeuge A. Dann gibt es zu jeder einstelligen Algebra (B, β) und jeder Abbildung $f : U \to B$ genau einen Homomorphismus f^*, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "f^*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

$\iota : U \ni u \mapsto u \in A$ ist die Inklusionsabbildung.

Definition 23. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt heißt (A, α) freie Kette mit Basis U.

Ich will mehrere Beweise bringen. Ein erster Beweis vielleicht der übersichtlichste. Er braucht das bisher erarbeitete Wissen.

Wir betrachten $D = \{(e, f(e)) | e \in E\}$. Es sei $[D]$ der Abschluss von D in $A \times B$ bezüglich $\alpha \times \beta$. Es ist $[D] = \bigsqcup_{e \in E} [(e, f(e))]$ rechtseindeutig. Die Vereinigung ist tatsächlich elementfremd und es rechte Seite gleich linker Seite.

Sei $(a, b) \in [(e, f(e))]$ und $(a, c) \in [(e', f(e'))]$. Dann ist $a \in [e]$ und $a \in [e']$. Also ist $[e] = [e']$. Da $[(e, f(e))]$ rechtseindeutig ist, folgt $b = c$. Das war behauptet. $[D]$ ist abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$ und zu jedem $a \in A = [E]$ gibt es ein $(a, b) \in [D]$. Dies folgt wieder leicht durch Induktion. Daher ist $[D]$ der Graph einer Funktion f^* mit $f(e) = f^*(e)$ für alle $e \in E$. Das war behauptet. $\square$

Den weiteren Beweis des Satze habe ich dem entsprechenden Beweis im Buch Ebbinghaus und al., *Zahlen*, Seite15 nachempfunden.

Wir betrachten $D = \{(u|f(u))|u \in U\}$. Sie erzeugt eine kleinste Untermenge $[D]$ in $A \times B$, die abgeschlossen gegenüber (α, β) ist.
Beh: $[D]$ ist der Graph einer Funktion.
Bew:

1. Zu jedem $a \in A$ gibt es ein Paar $(a, b) \in [D]$.

   Beweis durch Induktion.

   Sei $u \in U$, dann ist $(u|f(u))$ nach Definition in $[D]$. Sei

   $$T = \{a|a \in A \wedge \exists b \in B : (a|b) \in [D]\}.$$

   Wir haben gesehen $U \subset T$. Sei $a \in T$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $(a|b) \in [D]$. Daher ist $(\alpha \times \beta)(a|b) \in [D]$, da $[D]$ abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$ ist. Also ist $\alpha(a) \in T$. Daher ist T gegenüber α abgeschlossen. Daher ist $T = A$.

2. Für jedes u in U liegt nur $(u, f(u))$ in $[D]$.

   Sei $(u|f(u)) \in [D]$ mit $u \in U$. Angenommen es gibt ein weiteres Paar $(u|b) \in [D]$. Dann ist auch noch $[D] \setminus \{(u|b)\}$ gegenüber (α, β) abgeschlossen. Dazu muss ich nur zeigen, dass $(u|b)$ nicht als Bild eines Elementes aus $[D] \setminus \{(u|b)\}$ vorkommen kann. Angenommen $(\alpha, \beta)(a', c) = (u, b)$. Dann ist $(\alpha(a'), \beta(c)) = (u, b)$. Das bedeutet $u \in \alpha(A)$. Dies kann nach Voraussetzung nicht sein. Also ist nur $(u|f(u)) \in T$.

3. $[D]$ ist rechtseindeutig. Beweis durch Induktion:

   Wieder sei

   $$T = \{a|a \in A \wedge \text{ es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in [D]\}$$

   Zu zeigen bleibt T ist abgeschlossen gegenüber α. Sei $(a, b) \in [D]$ mit $a \in T$. Das heißt nur dieses b existiert, so dass $(a, b) \in [D]$. Dann ist $(\alpha(a), \beta(b)) \in [D]$. Angenommen es gibt ein weiteres $(\alpha(a), c) \in [D]$.

Dann ist auch noch $[D] \setminus \{(\alpha(a)|c)\}$ gegenüber (α, β) abgeschlossen. Denn angenommen $(\alpha, \beta)(a'|b') = (\alpha(a)|c)$. Dann ist $\alpha(a') = \alpha(a)$ und daher (weil α injektiv ist) $a = a'$. Dann ist aber $(a, b') \in [D]$ und $(a, b) \in [D]$. Zu a gab es nur ein b mit $(a, b) \in [D]$. Dann ist $b' = b$. Das heißt $c = \beta(b') = \beta(b)$. Dies widerspricht der Annahme $c \neq \beta(b)$. Also ist $[D]$ der Graph einer Funktion und wegen Satz 16 folgt die Behauptung.

Wir sehen es war wichtig, dass $\alpha : A \to A$ injektiv ist. □

Ich will noch einen abgewandelten Beweis anfügen.

Es sei wieder $D = \{(u, f(u))|u \in U\}$. $[D]$ die von $\alpha \times \beta$ und D erzeugte Unteralgebra (Kette) in $A \times B$.

$$T = \{a|a \in A \text{ Es gibt genau ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in [D]\}$$

Ich behaupte $T = A$. Es ist $U \subset T$. Für $u \in U$ ist $(u|f(u)) \in [D]$. Also gibt es mindestens ein $b \in B$ mit $(u, b) \in [D]$. Sei b mit $(u, b) \in [D] = D \cup (\alpha \times \beta)([D])$. Es ist $(u, b) \in (\alpha \times \beta)([D])$ unmöglich. Denn dann gäbe es ein $(a, b) \in [D]$ mit $(u, b) = (\alpha(a), \beta(b))$. Also wäre $u = \alpha(a)$. Aber $U \cap \alpha(A) = \emptyset$. Daher ist $(u, b) \in D$. Da D ein Funktionsgraph ist, ist D rechtseindeutig. Also ist $b = f(u)$. (Dieser Teil des Beweises geht nur, wenn $U \cap \alpha(A) = \emptyset$ ist. Beispiel: $A = \{0, 1\}$ und $\alpha = 1_A$. und $B = \{0, 1\}$ mit $\beta(x) = 1 + x \bmod 2$. Dann ist $D = \{(0, 0)\}$ und $[D] = \{(0, 0), (0, 1)\}$. Das heißt $[D]$ ist nicht rechtseindeutig.)
Jetzt zeige ich T ist gegenüber α abgeschlossen.
Sei $a \in T$. und b das einzige b mit $(a, b) \in [D]$. Dann ist $(\alpha(a), \beta(b)) \in [D]$. Sei $(\alpha(a), b_1) \in [D]$. Also $\in (\alpha \times \beta)([D])$. Daher gibt es (a', b') mit $(\alpha \times \beta)(a', b') = (\alpha(a'), \beta(b')) = (\alpha(a), b_1)$. Also ist $\alpha(a') = \alpha(a)$ und daher $a = a'$, weil α injektiv. Mit $(a, b') = (a', b') \in [D]$ und $a \in T$ und $(a, b) \in [D]$ folgt $b' = b$. Also ist auch $B_1 = \beta(b') = \beta(b)$. Daher ist $\alpha(a) \in T$. Daher ist $T = A$. $[D]$ ist daher der Graph einer Funktion von $A \to B$. Es ist $[D]$ natürlich abgeschlossen gegenüber $\alpha \times \beta$. Die Eindeutigkeit von f^* ist klar. □

Satz 2.42 (Basissatz). *Seien (A, α) und (B, β) zwei Ketten mit injektivem α und β. Haben A und B gleichmächtige Basen, so sind sie isomorph.*

Sei U ein Basis von A und V eine Basis von B. Nach Voraussetzung gibt es eine umkehrbare Abbildung $f : U \to V$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "F"] \\ V \arrow[r, "\iota"'] & B \end{tikzcd}$$

Es gibt genau ein $F : A \to$

B, so dass nebenstehendes Diagramm kommutativ ist. Die Umkehrabbildung von f sei g. Zu g gibt es ein G, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "G"] \\ U \arrow[r, "\iota"'] & A \end{tikzcd}$$

Man erhält also $G(F(u)) = G(f(u)) = g(f(u)) = u$ für alle $u \in U$. Andererseits ist $1_A(u) = \iota(u)$ für alle $u \in U$. Es gibt nur eine solche Abbildung. Daher ist $GF = 1_A$. genauso folgt $FG = 1B$. Das war aber behauptet. □

So wie wir den Satz formuliert haben besteht eine Analogie zur Theorie der Vektorräume oder der freien Moduln. Auf der Basis ist man frei Homomorphismen zu definieren. Der definierte Homomorphismus ist eindeutig. Es ist also sinnvoll eine Kette (A, α) mit Basis frei zu nennen.

2.5 Unendliche Mengen

Auf einer Party tummeln sich eine Menge von Damen $\mathbb{D}$ und eine Menge von Herren $\mathbb{H}$. Es ist Damenwahl. Jede der Damen sucht sich einen Tänzer aus. Und siehe da es bleibt keiner übrig. Die Damen sind sehr tanzfreudig und so wird auch in den nächsten Runden keiner der noch so faulen Herren seinem Schicksal entgehen. Mathematisch heißt dies: Es gibt eine bijektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ und jede injektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ ist auch surjektiv. Das heißt insbesondere ist jede injektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ auch surjektiv.
Wer jemals auf einem Wandertag ein Klasse gezählt hat weiß, dass dies nicht selbstverständlich ist. Denn was heißt zählen. Jedem Schüler wird genau ein bestimmtes Wort eines Gedichts zugeordnet. Zugegeben das Gedicht ist meist recht langweilig „Eins Zwei ...“. Meist stellt sich beim Experiment heraus, dass jedesmal ein anderes Wort sich am Ende ergibt. Die reine Theorie sagt uns, dass sich jedesmal dasselbe ergeben sollte.
David Hilbert hat folgendes Bild gebraucht: Ein endliches Hotel hat die folgende Eigenschaft: Angenommen in jedem Zimmer wohnt eine Gast. Das Hotel ist voll belegt. Abends kommt ein Fremder an und fragt nach einem Zimmer. Der Portier muss sagen: „Es tut uns schrecklich leid. Wir können Ihnen kein Zimmer vermieten, da unser Haus voll ist.“
Würde der Fremde fragen, ob man wirklich alle Zuordnungen der Zimmer zu den Gästen bedacht habe, so würde man ihn als verrückt einstufen. Auch wenn die Höflichkeit gebieten würde es nicht zu sagen.
Stellen wir uns aber einen langen Flur ohne Ende vor. In ihm sind die Zimmer wie an einer Perlenschnur angeordnet. Rechts von jedem Zimmer liegt ein

weiteres Zimmer.

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$

Auch wenn in jedem Zimmer des Ganges eine Person untergebracht ist, kann der neue Gast noch mit einem Bett versorgt werden. Jeder Gast muss einfach das Zimmer rechts von seinem Zimmer beziehen. Dann bleibt das erste Zimmer frei. Hier kann der Fremde seinen Koffer auspacken. Bezeichnen wir mit X die Menge der Zimmer dann bedeutet es: Es gibt einen injektive Funktion, $f\colon X \to X$, welche nicht surjektiv ist.

Definition 24 (Dedekind). Eine Menge M heißt unendlich, wenn es eine injektive Abbildung $f : M \to M$ gibt, welche nicht surjektiv ist. (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite 13.) In einer Fußnote erklärt Dedekind auf genau diese Weise eine unendliche Menge. Er schreibt dor „S heißt unendlich, wenn es einen echten Teil von S gibt, in welchen sich S deutlich abbilden lässt“. Unter „deutlich“ versteht er eine injektive Funktion. Dies ist übrigens ein schönes Wort für die Sache. Leider hat sich dieser Begriff nicht durchgesetzt.
Entsprechend heißt eine Menge M endlich, wenn jede injektive Abbildung $f : M \to M$ surjektiv ist.

Er hat auch eine schöne Begründung dafür, dass es eine unendliche Menge gibt: „Meine Gedankenwelt, d.h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s', dass s der Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S. Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung $\varphi\dots$“ die gewünschten Eigenschaften.
Ich muss gestehen: Mich überzeugt der Beweis. Es gibt Beckmesser, die ihn nicht schlüssig finden.
Für eine gemalte Erläuterung dieser Idee siehe die Abbildung 2.5

Abb. 2.5: Richard Dedekind und seine Gedanken

Auf jeden Fall erhellt Dedekinds Definition schlaglichtartig, dass das Unendliche näher liegt als das endliche. Einer der Kritiker Dedekinds war sein Freund Georg Cantor. Er hatte übrigens die etwas unangenehme Art die Freundschaft unter wissenschaftlichen Auseinandersetzungen leiden zu lassen. So schreibt er in einem Brief an Hilbert: Herbert Meschkowski, *Georg Cantor Briefe*, Seite 427

> „Dedekind geht offenbar von der Meinung aus, dass die Zahlentheorie keine anderen Axiome voraussetze als die logischen; dasselbe scheinen die Vertreter des Logikcalcüls zu glauben. ... Mein anderer Gegensatz zu Dedekind besteht, wie Sie ja wissen, darin, dass er jede bestimmte Vielheit für consistent hält, also den Unterschied von consistenten und inconsistenten Vielheiten nicht zugibt“

Dedekind definiert Unendlichkeit als mögliche Beziehung einer Menge zu sich. Dedekind erklärt durch soziale Beziehungen die Unendlichkeit.

Satz 2.43. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine unendliche Menge.*
2. *Es gibt eine freie zyklische Kette.*

1. $\Rightarrow$ 2. Es gibt eine unendliche Menge A. Das heißt es gibt eine injektive Abbildung $\alpha : A \to A$, welche nicht surjektiv ist. Also ist $A \setminus \alpha(A) \neq \emptyset$. Sei $a \notin \alpha(A)$ und $[a]$ die kleinste Unteralgebra von A, welche a enthält. $([a], \alpha)$ ist dann eine freie zyklische einstellige Algebra.
2.$\Rightarrow$ 1. Ist klar. $\square$

Hinweise:

1. Der Begriff der Unendlichkeit überträgt sich von der Kategorie der Mengen ganz leicht auf andere Kategorien. So kann man sagen: Ein Vektorraum V hat unendliche Dimension, genau dann wenn es einen injektiven Homomorphismus gibt, der nicht surjektiv ist. [7]

   Definition 25. Ein Objekt A in einer Kategorie heißt unendlich, wenn es einen Monomorphismus $f : A \to A$ gibt, der kein Epimorphismus ist. Endlich heißt A, wenn dies nicht der Fall ist. Dabei heißt ein Morphismus f Monomorphismus, wenn für alle Morphimen α, β mit $f \circ \alpha = f \circ \beta$ auch $\alpha = \beta$ ist.

2. In diesem Sinne in in der Kategorie der abelschen Gruppen $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ endlich, während $\mathbb{Z}$ unendlich ist. Also etwas als Menge größeres ist endlich. Dies zeigt einen weiteren Aspekt der Definition von Dedekind. Ob etwas endlich erscheint, hängt von den Beziehungen ab, die betrachtet werden.

3. Man hätte auch den dualen Begriff nehmen können etwa

   Definition 26. Ein Objekt A in einer Kategorie heißt kounendlich, wenn es einen Epimorphismus $f : A \to A$ gibt, der kein Monomorphismus ist. Man könnte vielleicht vernünftiger *epiunendlich* sagen. Dabei heißt ein Morphismus f Epimorphismus, wenn für alle Morphimen α, β mit $\alpha \circ f = \beta \circ f$ auch $\alpha = \beta$ ist.

[7] In diesem Sinne ist auch jeder unzerlegbare injektive Modul endlich.

Satz 2.44. *In der Kategorie der Mengen ist eine Menge genau dann unendlich, wenn sie kounendlich ist.*

Sei E eine unendliche Menge und $E \xrightarrow{f} E$ eine injektive nicht surjektive Abbildung. Es gibt ein $g : E \to E$ mit $gf = 1_E$. Es ist g surjektiv. Wäre g auch injektiv, so wäre g umkehrbar und $f = g^{-1}$. Dem widerspricht, dass f nicht surjektiv ist. Also ist E kounendlich.

Ist umgekehrt E kounendlich und $f : E \to E$ eine surjektive nicht injektive Funktion. Dann gibt es ein $g : E \to E$ mit $fg = 1_E$.[8] g ist sicher injektiv. Wäre g auch surjektiv, so wäre g umkehrbar und wieder $f = g^{-1}$. Dem widerspricht, dass f nicht injektiv ist. Also ist E unendlich. □

Der Satz 2.44 gilt in anderen Kategorien nicht. Beispiele:

11. Beispielsweise ist jeder unendliche Integritätsring, der nicht Körper ist, in der Kategorie der Moduln über diesem Ring unendlich aber keineswegs kounendlch.

12. $\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$ ist in der Kategorie der abelschen Gruppen kounendlich aber endlich.

Ab jetzt stellen wir uns auf den Standpunkt des heiligen Augustinus. Wir glauben also an die Existenz einer unendlichen Menge. Wegen Satz 2.43 gibt es dann eine freie zyklische Kette. Dedekind nennt sie in Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite 16 einfach unendlich. Nach dem Basissatz 2.42 ist diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir wählen eine solche aus und nennen sie $(\mathbb{N}, s)$. Sie werde erzeugt von 0.

Satz 2.45. *Der einzige Epimorphismus $f : (\mathbb{N}, s) \to (\mathbb{N}, s)$ ist die Identität.*

Sei $f : (\mathbb{N}, s) \to (\mathbb{N}, s)$ ein Epimorphismus. Angenommen $f(0) = n \neq 0$. Ich betrachte die folgende einstellige Algebra mit zwei Elementen (C, γ) $C = \{a, b\}$ und $\gamma(a) = \gamma(b) = b$. $\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\gamma"] & b \arrow[loop right] \end{tikzcd}$
Ich erkläre zwei Morphismen $g, h : (\mathbb{N}, s) \to C$ durch $g(0) = a$ und $h(0) = b$. Ist $x \neq 0$, so ist $x = s(y)$ also ist $g(x) = g(s(y)) = \gamma(g(y)) = b$. Daher ist für alle $x \neq 0$: $h(x) = g(x)$. Also ist insbesondere $g(f(0)) = h(f(0))$. Daher ist $gf = hf$. Da f als Epimorphismus vorausgesetzt ist, ist $g = h$. Dies war aber gerade nicht der Fall. Daher muss $f(0) = 0$ sein. Dies erfüllt aber nur die Identität. □

Das heißt $(\mathbb{N}, s)$ ist in der Kategorie der einstelligen Algebren koendlich[9], aber nicht endlich.

Satz 2.46. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

[8] Beim Beweis dieser Tatsache ist das Auswahlaxiom notwendig.
[9] Es wäre vernünftiger epiendlich zu sagen.

Es gibt eine unendliche Menge.

Für jede Kette (A, α) gilt: Sie ist genau dann zyklisch, wenn sie epimorphes Bild von $(\mathbb{N}, s)$ ist.

Sei (A, α) eine zyklische einstellige Algebra. Ein Element a erzeugt also A. Das heißt $[a] = A$. Wegen dem Rekursionssatz 2.41 gibt es zu der Abbildung $\{0\} \ni 0 \mapsto a \in [a] = A$ genau ein Homomorphismus $f^* : \mathbb{N} \to A$ mit $f^*\iota = f$. $f^*(\mathbb{N})$ ist als Bild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Also ist $A = [a] \subset f^*(\mathbb{N})$. Daher ist f surjektiv. Die Umkehrung ist einfach. □

Satz 2.47. *Jede Kette ist epimorphes Bild einer freien Kette.*

Sei (B, β) eine beliebige Kette. Wir betrachten die Menge $F := \mathbb{N} \times B$. Als Funktion $\alpha : F \ni (n, b) \mapsto (s(n), b) \in F$. Diese Funktion ist sicher injektiv. Ist $E := 0 \times B$, so ist $E \cap \alpha(F) = \emptyset$. Also ist F frei mit Basis E. Zu der Abbildung $f : E \ni (0, b) \mapsto b \in B$ gibt es genau einen Morphismus $F \xrightarrow{f^*} B$ mit $f^* \circ \iota = f$. Es ist f surjektiv. Also ist auch f^* surjektiv und damit ein Epimorphismus. □

Satz 2.48.

1. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.*
2. *Ist $f : A \to B$ eine injektive Abbildung in eine endliche Menge B, so ist A endlich.*
3. *Jedes surjektive Bild einer endlichen Menge ist endlich.*[10]

Zu 1. Sei A eine Teilmenge der endlichen Menge B. Dann ist $B = A \cup (B \setminus A)$. Sei $f : A \to A$ eine injektive Abbildung. Wir erklären eine injektive Abbildung $g : B \to B$ mit $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.

$$g(b) := \begin{cases} f(b) & \text{falls } b \in A \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: g ist injektiv.
Es sei $b_1, b_2 \in B$ mit $g(b_1) = g(b_2)$. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1. $b_1, b_2 \in A$. Dann ist $g(b_1) = f(b_1) = g(b_2) = f(b_2)$. Somit ist $b_1 = b_2$, da f injektiv ist.
2. $b_1 \in A$ und $b_2 \in B \setminus A$. Dann ist $g(b_1) = f(b_1) \in A$ aber $g(b_2) = b_2 \notin A$. Dann ist $g(b_1) = g(b_2)$ aber unmöglich.

[10] Hier braucht man das Auswahlaxiom.

3. $b_1, b_2 \in B \setminus A$. Dann ist $b_1 = g(b_1) = g(b_2) = b_2$. $\square$

Also ist in jedem Fall, in dem $g(b_1) = g(b_2)$ möglich ist, schon $b_1 = b_2$. Daher ist g injektiv. Da B endlich ist, ist g auch surjektiv. Es gibt daher zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $g(b) = a$. Es ist aber $b \in B \setminus A$ unmöglich. Denn dann wäre $a = g(b) = b \notin A$. Also ist $b \in A$, $g(b) = f(b)$ und man hat: Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $a' \in A$ mit $f(a') = a$. Das heißt f ist surjektiv. Also ist A eine endliche Menge.
Zu 2. Man zeigt leicht, dass die Klasse der endlichen Mengen gegenüber Bijektionen abgeschlossen ist. Damit folgt die Behauptung.
Zu 3. Ist $f : A \to B$ eine surjektive Abbildung mit endlichem A, so gibt ein $g : B \to A$ mit $fg = 1_B$. Daher ist g eine injektive Abbildung. $g(B) \subset A$ ist endlich. Daher ist B endlich.

Aufgaben:

18. a) Zeige: Ist A eine unendliche Menge, und $a \in A$, so ist $A \setminus \{a\}$ unendlich. Nimmt man aus dem unendlichen Meer einen Tropfen heraus, so bleibt das Meer unendlich.

Lösung:

Es gibt eine injektive Funktion $\alpha : A \to A$, welche nicht surjektiv ist. Also gibt es ein $b \in A \setminus Bi(\alpha)$.

$a = b$: Dann ist für jedes $x \in A' = A \setminus \{a\}, \alpha(x) \neq a = b \notin Bi(\alpha)$. Also hat man die injektive Funktion

$$\alpha' : A' \ni x \mapsto \alpha(x) \in A'$$

Sie ist als Einschränkung von α sicher injektiv. Sie ist auch nicht surjektiv. Denn es ist $\alpha(a) \neq a \notin Bi(\alpha)$. Also ist $\alpha(a) \in A' = A \setminus \{a\}$. Außerdem ist $\alpha(a) \notin Bi(\alpha')$. Denn wäre $\alpha(a) = \alpha(a')$ mit einem $a' \neq a$, so wäre, weil α injektiv ist $a = a'$. Dies widerspricht sich. Also ist $\alpha' : A' \to A'$ injektiv aber nicht surjektiv. Damit ist $A' = A \setminus \{a\}$ auch unendlich.

$a \neq b$: In diesem Fall sei f die Funktion, die a und b vertauscht. Die ist sicher bijektiv. Sie ist zu sich selbst invers.

Beh.: $a \notin Bi(f\alpha)$.

Angenommen es gibt ein $x \in A$ mit $f(a) = (f\alpha)(x)$. Dann ist $b = f(a) = \alpha(x)$. Dies widerspricht der Wahl von b. Die Einschränkung:

$$\widehat{f\alpha} : A' \ni x \mapsto f\alpha(x) \in A'$$

ist dann eine injektive Funktion, welche nicht surjektiv ist.

b) Ist die Menge E endlich und x beliebig, so ist $E \cup \{x\}$ endlich.

Lösung: Wäre $E \cup \{x\}$ unendlich, so wäre E unendlich.

c) Sei $([a], \alpha)$ eine einstellige zyklische Algebra, so ist für alle $x \in [a]$ die Menge $[a] \setminus [x]$ endlich.

Lösung:

Ich bezeichne mit $\overline{[x]} := [a] \setminus [x]$. Die Behauptung ist für $x = a$ sicher richtig. Denn dann ist $\overline{[x]} = \emptyset$. Sei

$$\mathbb{T} = \{x | \overline{[x]} \text{ endlich } x \in [a]\}$$

Es ist $a \in \mathbb{T}$. Sei $x \in \mathbb{T}$.

- $x \in \overline{[\alpha(x)]}$: In diesem Fall ist $[\alpha(x)] = [x]$ und daher $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]}$ endlich.
- $x \notin [\alpha(x]$: In diesem Fall ist $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]} \cup \{x\}$ und das ist endlich.

Hinweise:

4. Glaubt man an die Existenz einer unendlichen Menge, so ist wahrscheinlich die metasprachliche Induktion, welche die Logiker immer machen und die ich nie verstanden habe (Sie wollen doch die Induktion begründen) überflüssig. Ich kann ja in der unendlichen Menge Induktion führen.

2.6 Die natürlichen Zahlen als Monoid

„Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppenverstandes entsprechenden Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschuung von vorneherein einleuchtend und gewiß erscheinen“ (Siehe Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Seite IV)

Wir wählen eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte freie Kette und nennen sie $(\mathbb{N}|1+)$. Dabei ist $1+$ die injektive Strukturabbildung. Früher habe ich sie s genannt. Es werde $\mathbb{N}$ von dem Element 0 erzeugt. Wir erinnern uns an die Definition einer Verknüpfung bei zyklischen Ketten (Siehe Definition 18). Wenden wir sie auf $(\mathbb{N}, 1+)$ an. Es sei also $\Phi(a)$ der eindeutig bestimmte Morphismus $\Phi(a) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\Phi(a)(0) = a$. Dann ist $a + b := \Phi(a)(b)$. Wegen der Folgerung 2.34 gilt folgender Satz:

Satz 2.49. $(\mathbb{N}, +)$ *ist ein regulärer, kommutativer Monoid mit dem neutralen Element* 0.

Man beachte, dass bisher noch nicht der Rekursionssatz benutzt wurde. Im nächsten Satz wird er benutzt.

Definition 27. Ist (A, α) eine einstellige Algebra, so gibt es wegen dem Rekursionssatz 2.41 zu jedem $a \in A$ genau einen Morphismus $p(a, -) : \mathbb{N} \ni m \mapsto p(a, m) \in \mathbb{N}$ mit $p(a, 0) = a$.

Insbesondere gibt es genau einen Homomorphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ mit $f(0) = 0$ nämlich die Identität.

Satz 2.50. *Die Abbildung*

$$\Phi(A) \colon A \ni a \mapsto p(a, -) \in [\mathbb{N}, A] \tag{2.4}$$

ist ein funktorieller Isomorphismus. Für alle $(a, n) \in A \times \mathbb{N}$ *gilt:*

$$p(\alpha(a), n) = \alpha(p(a, n)) = p(a, s(n)).$$

Zunächst zeige ich, dass $\{\Phi(A) | (A, \alpha)$ einstellige Algebra$\}$ funktoriell ist. Ich muss zeigen, dass für alle Morphismen $A \xrightarrow{f} B$ zwischen einstelligen Algebren folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & B \arrow[d, "\Phi(B)"] \\
{[\mathbb{N}, A]} \arrow[r, "{[\mathbb{N}, f]}"'] & {[\mathbb{N}, B]}
\end{tikzcd}$$

Sei zu $a \in A$, $\Phi(A)(a) = p(a, -)$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $p(a, 0) = a$. Es ist $[\mathbb{N}, f] \circ \Phi(A)(a)(0) = f(p(a, 0)) = f(a)$. Außerdem ist $(\Phi(B) \circ f)(a) = \Phi(B)(f(a)) = p(f(a), --)$. Dies ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\mathbb{N} \to B$ mit $p(f(a), 0) = f(a)$. Also folgt die Kommutativität des Diagramms.
Jetzt muss noch gezeigt werden: $\Phi(A)$ ist ein Isomorphismus für beliebiges A. Sei $\Phi(a) = \Phi(a')$ Das heißt es ist $p(a, --) = p(a', --)$. Insbesondere ist $a = p(a, 0) = p(a', 0) = a'$. Als ist $\Phi(A)$ injektiv. Sei $f \colon \mathbb{N} \to A$ ein Morphismus. Dann gibt es $f(0) = a$ für ein gewisses $a \in A$. Andererseits ist $p(a, --)$ der einzige Morphismus mit $p(a, 0) = a$. Daher ist $p(a, --) = f$. Also ist $\Phi(A)$ bijektiv.
Da insbesondere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & A \arrow[d, "\Phi(A)"] \\ {[\mathbb{N}, A]} \arrow[r, "{[\mathbb{N},\alpha]}"'] & {[\mathbb{N}, A]} \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, folgt $\Phi(\alpha(a)) = \alpha \circ \Phi(a)$. Das heißt $p(\alpha(a), --) = \alpha \circ p(a, --)$. Dies war zu zeigen. □

2.7 Besondere Eigenschaften von $\widehat{\mathcal{S}}$

2.7.1 Monomorphismen, Epimorphismen

Ein Morphismus $B \xrightarrow{f} C$ in einer Kategorie heißt Monomorphismus, wenn für alle $A \xrightarrow{\alpha} B$,$A \xrightarrow{\beta} B$ mit $f\alpha = f\beta$ folgt: $\alpha = \beta$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $A \in \widehat{\mathcal{S}}$ die Abbildung $[A, B] \ni \alpha \mapsto f \circ \alpha \in [A, C]$ injektiv ist.

Satz 2.51. *In der Kategorie der Ketten ist jeder Monomorphismus eine injektive Abbildung.*

Sei $A \xrightarrow{f} B$ ein Monomorphismus. Ich will zeigen, dass f eine injektive Abbildung ist. Sei $f(x) = f(y)$. Nach dem Rekursionsatz gibt es genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$ mit $g(0) = x$. Und es gibt genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{h} B$ mit $h(0) = y$. Also ist $f(x) = f(g(0)) = f(y) = f(h(0))$. Nach dem Rekursionssatz gibt es nur einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{k} C$ mit $k(0) = (x)$. Daher ist $f \circ g = f \circ h$. Da f monomorph ist, folgt $g = h$. Daher ist $g(0) = x = y = h(0)$. □

Es ist interessant: Es wurde wesentlich der Rekursionssatz verwendet.
Fragen:

5. Gilt auch die Umkehrung des Satzes? Ist in $\widehat{\mathcal{S}}$ jeder Monomorphismus eine injektive Abbildung, so gilt der Rekursionssatz.

In der Folgerung 2.22 wurde gezeigt, dass jeder Epimorphismus von Ketten als Abbildung surjektiv ist.

2.7.2 Projektive Ketten

Satz 2.52. *Jede freie Kette ist auch projektiv. Das heißt: Ist $f : B \to C$ ein surjektiver Homomorphismus zwischen einstelligen Algebren und $g : A \to C$*

auch ein Homomorphismus, so gibt es ein $g^* : A \to B$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g^*"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Sei (A, α) eine freie Kette mit der Basis $(a_i | i \in I)$. Wir betrachten die Familie $(g(a_i)|i \in I) \subset C$. Zu dieser Familie gibt es nach dem Auswahlaxiom eine Familie $(b_i|i \in I)$ mit $f(b_i) = g(a_i)$ für alle $i \in I$. Wir erklären $g'(a_i) := b_i$. Nach dem Rekursionssatz gibt es einen eindeutigen bestimmten Homomorphismus $g^* : A \to B$ mit $g^*(a_i) = b_i$. Damit ist $f \circ g^*(a_i) = g(a_i)$ und damit $f \circ g^* = g$. Dies war zu zeigen. □

Fragen:

6. Unterketten freier Ketten sind auch frei? Die Anwort ist ja! Ich hab einen Beweis dazu.
7. Damit sind projektive Ketten frei? Ja, denn projektive sind UNterketten freier Ketten.

2.7.3 Injektive Ketten

Hier muss das nachgetragen werden, was ich über injektive Ketten weiß.

2.8 Multiplikation

Die Methode aus 27 kann wiederholt angewendet werden. Ab jetzt schreibe ich wieder wie gewohnt $a + b$ für $p(a, b)$ und 1 für $s(0)$.
Diese Wiederholung soll etwas allgemeiner durchgeführt werden. Denn sie wird langweilig, wenn man einfach wiederholt. Es ist wie bei vielen menschlichen Tätigkeiten. Wir wiederholen auf einer höheren Stufe. Wir haben schon genügend viele Beispiele um den folgenden Begriff zu erläutern.

Definition 28. Eine Menge $(A, +)$ zusammen mit der zweistelligen Verknüpfung $+$ heißt regulär, kommutativer Monoid mit dem Neutralelement 0, wenn gilt:

1. $0 + a = a + 0$ für alle $a \in A$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in A$.
3. $a + b = a' + b$, dann ist $a = a'$ für alle $a, a', b \in A$.

Ein solcher regulärer, kommutativer Monoid wird auch kommutativ, kürzbarer Monoid geneannt.
Wir kennen schon eine Reihe solcher Monoide. Die Folgerung 2.34 beschreibt eine ganze Klasse solcher Monoide. $(\mathbb{N}, +)$ ist ein solcher Monoid. In diesem Abschnitt meine ich mit Monoid immer einen Monoid dieser Sorte.
Ist eine Teilmenge eines Monoid gegenüber der Addition abgeschlossen,und enthält sie 0, so heißt er *Untermonoid*. Der Durschnitt von Untermonoiden ist ein Untermonoid. Zu jeder Teilmenge $U \subset A$ gibt es einen kleinsten Monoid, der U enthält. Ich bezeichne ihn mit $[U]$, der von U erzeugte Untermonoid. $\mathbb{N}$ ist von $\{1\}$ erzeugt. Die Potenzmenge einer Menge X zusammen mit der elementfremden Vereinigung ist ein kommutativ regulärer Monoid.

Definition 29. Sind A, B zwei Monoide, so heißt eine Abbildung $A \xrightarrow{f} B$ ein Homomorphismus, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Satz 2.53. *1. Ist $A \xrightarrow{f} B$ ein Homomorphismus, so ist $f(0) = 0$.*

2. $Ke(f) := \{x | f(x) = 0\}$ ist ein Untermonoid.

3. $Bi(f) := \{f(x) | x \in A\}$ ist ein Untermonoid von B.

Zu 1.: Es ist $0 + f(0) = f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. Wegen der Kürzbarkeit von A folgt $f(0) = 0$.
Zu 2.: Seien $x, y \in Ke(f)$. Dann ist $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$.
Zu 3.: Seien b_1, b_2 in $Bild(f)$. Es gibt daher $x_1, x_2 \in A$ mit $f(x_1) = b_1$ und $f(x_2) = b_2$. Damit ist $b_1 + b_2 = f(x_1 + x_2) \in Bild(f)$. □

Beispiele:

13. Ist I eine Menge und $(A, +)$ eine regulärer, kommutativer Monoid, so ist A^I mit der komponentenweisen Addition ein regulär kommutativer Monoid.

14. Sei $H \subset \mathbb{N}$. H enthalte die 0 und H sei abgeschlossen gegenüber der Addition. In diesem Fall heißt H numerische Halbgruppe.
    a) H = kleinste Untermenge von $\mathbb{N}$, welche $2, 3$ enthält und abgeschlossen gegenüber der Addition ist und 0 enthält.
    Beh.: $H = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Beweis: Aufgabe.

15. Sind $(A, +)$ und $(B, +)$ zwei kommutativ, reguläre (kürzbare) Monoide, so ist $Hom(A, B)$ mit der Verknüpfung $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$ ein kommutaiv regulärer Monoid.

Satz 2.54. *Die kommutativ, regulären Monoide bilden eine Kategorie.*

Sei nun $(A, +)$ ein kommutaiv regulärer Monoid und $a \in A$. Wir haben die Abbildung

$$a+ : A \ni x \mapsto a + x \in A$$

Dadurch wird $(A, a+)$ zu einer Kette.

Satz 2.55. *Es gibt genau einen Homomorphismus $M(a) \in Hom(\mathbb{N}, A)$ mit $M(a)(1) = a$.*

Wir betrachten auf A die Abbildung $a+$. Dadurch wird A zu einer Kette. Es gibt daher genau einen Morphismus $M(a) : \mathbb{N} \to A$ mit $M(a)(0) = 0$. Da $M(a)$ ein Morphismus zwischen den Ketten $(\mathbb{N}, 1+)$ und $(A, a+)$ ist gilt $M(a)(1) = M(a)(1 + 0) = a + M(a)(0) = a$.
Behauptung: $f := M(a)$ ist ein Homomorphismus.
Bew.: Sei $T := \{y | f(y + z) = f(y) + f(z)$ für alle $z \in \mathbb{N}\}$
Es ist $0 \in T$. Denn für jedes $z \in \mathbb{N}$ ist $f(z) = f(0+z) = 0+f(z) = f(0)+f(z)$. Sei $y \in T$. Wir betrachten $1+y$. $f((1+y)+z) = f(1+(y+z)) = a+f(y+z) = a+(f(y)+f(z)) = (a+f(y))+(f(z)) = f(1+y)+f(z)$ Also ist $f = M(a)$ ein Homomorphismus. $T = \mathbb{N}$. Bleibt zu zeigen, dass $M(a)$ mit obigen Bedingungen eindeutig ist.
Sei $g : \mathbb{N} \to A$ mit $g(1) = a$ ein Homomorphismus. Dann ist $g(0) = 0$. Da $g(1 + y) = g(1) + g(y) = a + g(y)$ ist, sit g ein Morphismus zwischen $(\mathbb{N}, 1+)$ und $(A, a+)$ mit $g(0) = 0$. Daher sit $f = g$. □

Satz 2.56. *Ist $(A, +)$ ein regulärer kommutativer Monoid, so ist $Hom(\mathbb{N}, A)$ ein regulärer kommutativer Monoid mit der Addition $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$.*

Sei $f + g = f + g'$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) + g(n) = f(n) + g'(n)$. Daher ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $g(n) = g'(n)$. Daher ist $g = g'$. □

Satz 2.57. *Die Abbildung $M(A) : A \ni a \mapsto M(a) \in Hom(\mathbb{N}, A)$ ist ein Isomorphismus.*

Seien $x, y \in A$. Dann ist $M(x + y)(1) = x + y = M(x)(1) + M(y)(1) = (M(x) + M(y))(1)$. Also ist $M(x + y) = M(x) + M(y)$. Daher ist $M(A)$ ein Homomorphismus. Bleibt zu zeigen. dass $M(A)$ ein Isomorphismus ist.
Sei f ein Hommorphismus. Es sei $f(1) = a$. Dann ist $M(a)(1) = a = f(1)$. Also ist $f = M(a)$. Daher ist $M(A)$ surjektiv. $M(A)$ ist auch injektiv. Denn sei $M(a) = M(a')$. Man erhält: $a = M(a)(1) = M(a')(1) = a'$. Daher ist $M(A)$ ein Isomorphismus. □

15. März 2017

Satz 2.58. *Die Familie* $\{M(A)|A$*kommutativ regulärer Monoid* $\}$ *ist ein funktorieller Isomorphismus.*

Zu zeigen ist, dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "M(A)"'] & B \arrow[d, "M(B)"] \\ Hom(\mathbb{N}, A) \arrow[r, "Hom(\mathbb{N},f)"'] & Hom(\mathbb{N}, B) \end{tikzcd}$$

Sei $a \in A$. $(M(B) \circ f)(a) = M(B)(f(a))$. $M(B)(f(a))(1) = f(a)$. Es ist $M(B)(f(a))$ der einzige Homomorphismus h mit $h(1) = f(a)$. Andererseits ist
$(f \circ M(A))(a)(1) = f(M(A)(a))(1) = f(a)$. Daher ist $f \circ M(A) = M(B) \circ f$. Also ist die Familie eine natürliche Transformation.
Betrachten wir die Auswertfunktion

$$W(A) : Hom(\mathbb{N}, A) \ni f \mapsto f(1) \in A$$

Sie ist invers zu $M(A)$. Beweis: Es ist $W(A) \circ M(A)(a) = W(A)(M(A)(a)) = M(a)(1) = a$. Zur Umkehrung: $M(A) \circ W(A)(f) = M(A)(f(1)) =$ Einziger Homomomorphismus $f : \mathbb{N} \to A$ mit $h(1) = f(1)$. Das ist aber f. Daher ist $M(A) \circ W(A) = Id$. Man rechnet auch nach, dass W ein funktorieller Morphismus ist. □

Definition 30. Ist $(A, +)$ ein regulärer kommutativer Monoid. Wir definieren:

$$\odot \colon \mathbb{N} \times A \ni (n, a) \mapsto M(A)(a)(n) \in A$$

Dies ist eine äußere Verknüpfung auf A

Satz 2.59. *Es gilt für einen regulären kommutativen Monoid* $(A, +)$

1. $0 \odot a = 0$ *für alle* $a \in A$. *Außerdem ist* $n \odot 0 = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
2. $1 \odot a = a$ *für alle* $a \in A$.
3. $(x + y) \odot a = x \odot a + y \odot a$ *für alle* $a \in A$ *und alle* $x, y \in \mathbb{N}$.
4. $x \odot (a + b) = x \odot a + x \odot b$ *für alle* $x \in \mathbb{N}$ *und* $a, b \in A$.

Ich schreibe im Beweis einfach M anstelle von $M(A)$, da die Menge A ja ja fest liegt.
Zu 1. $0 \odot a = M(a)(0) = 0$, da $M(a)$ ein Homomorphismus ist. Ist $n \in \mathbb{N}$ so ist $n \odot 0 = M(0)(n)$. Es ist $M(0)$ der einzige Homomorphismus $\mathbb{N} \to A$, welcher die $1 \in \mathbb{N}$ auf $0 \in A$ abbildet. Das ist aber der Nullhomomorphismus. Daher ist $M(0)(n) = 0 = n \odot 0$.
Zu 2. $1 \odot a = M(a)(1) = a$ nach Definition von $M(a)$.
Zu 3. $(x + y) \odot a = M(a)(x + y) = M(a)(x) + M(a)(y) = x \odot a + y \odot a$.
Zu 4. $x \odot (a + b) = M(a + b)(x) = M(a)(x) + M(b)(x) = x \odot a + x \odot b$, weil wegen Satz 2.57 $M : \mathbb{N} \to Hom(\mathbb{N}, A)$ ein Homomorphismus ist. □

[11]

Wendet man diesen Satz Auf $A = (\mathbb{N}, +)$ an, so hat man auf $\mathbb{N}$ eine zweistellige Verknüpfung die Multiplikation. Ich bezeichne sie mit dem einfachen Punkt.

Satz 2.60. $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *hat die folgenden Eigenschaften.*

1. $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
2. $(n + m) \cdot x = n \cdot x + m \cdot x$ *für alle* $n, m, x \in \mathbb{N}$.
3. $n \cdot (x + y) = n \cdot x + n \cdot y$ *für alle* $x, y, n \in \mathbb{N}$

Die Beweise stehen oben.

Satz 2.61. *Die Verknüpfung* $\cdot$ *ist auf* $\mathbb{N}$ *kommutativ.*

Wir betrachten zu bestimmtem $n \in \mathbb{N}$ die beiden Homomorphismen:

$$f : \mathbb{N} \ni x \mapsto x \cdot n \in \mathbb{N}$$
$$g : \mathbb{N} \ni x \mapsto n \cdot x \in \mathbb{N}$$

Es ist $f(1) = 1 \cdot n = M(n)(1) = n$ und $g(1) = 1 \cdot n = n$. Also ist $\cdot$ kommutativ. □

Es bleibt das Assoziativgesetz zu überlegen.

Satz 2.62. *Sein* $(A, +)$ *ein regulärer kommutativer Monoid. Dann gilt für alle* $a \in A$ *und alle* $n, m \in \mathbb{N}$*:* $(n \cdot m) \odot a = n \odot (m \odot a)$.

[11] Es ist zu überlegen, ob die Kommutativtät der Addition in A tatsächlich gebraucht wird.

Betrachten wir die beiden Abbildungen:

$$f\colon \mathbb{N} \ni x \mapsto (x \cdot m) \odot a \in A$$
$$g\colon \mathbb{N} \ni x \mapsto x \odot (m \odot a) \in A$$

Es sind beides Homomorphismen und es ist $f(1) = (1 \cdot m) \odot a = m \odot a$. Weiter ist $g(1) = 1 \odot (m \odot a) = m \odot a$. Daher sind die beiden Homomorphismen gleich. Es folgt die Behauptung. □

Insbesondere folgt das Assozitivgesetz für die Multiplikation in $\mathbb{N}$. Fassen wir die Gesetze der Multiplikation in$\mathbb{N}$ noch einmal zusammen.

Satz 2.63. *Auf dem regulären kommutativen Monoid* $(\mathbb{N}, +)$ *gilt für die Multiplikation* $\cdot$ *folgendes:*

1. $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *für alle* $a, b, c \in \mathbb{N}$.
3. $a \cdot b = b \cdot a$ *für alle* $a, b \in \mathbb{N}$.
4. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *für alle* $a, b, c \in \mathbb{N}$

2.8.1 Konstruktive Durchführung der Multiplikation

Ich habe schon bemerkt, dass es einen Nachteil hat, wenn man die gewohnte Schreibweise für die Addition wählt. Man vergisst dann leicht die Freiheiten, die man noch hat. Daher möchte ich die Multiplikation in Abhängigkeit von einer von der Nachfolgebeziehung in $(\mathbb{N}, s)$ programmieren. Einzige Voraussetzung soll sein, dass s eine injektive Funktion ist. Das Spiel kann man weitertreiben. Man erhält so die Potenz und verallgemeinert die Ackermannfunktion.

2.8.2 Potenzrechnung

Ist $a \in \mathbb{N}$ so gibt es nach dem Abschnitt2.8 eine Abbildung $m(a, -) : \mathbb{N} \ni \mapsto a \cdot n \in \mathbb{N}$. Zu dieser Abbildung gibt es nach dem Rekursionssatz genau ein Homomorphismus $e(a, -) : (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, m(a, -))$ mit $e(a, 1) = 1$.

Satz 2.64. *Es ist* $e(a, b + c) = e(a, b) \cdot e(a, c)$.

Weil $e(a, -) : (\mathbb{N}, 1+) \to (\mathbb{N}, m(a, -))$ ein Homomorphismus ist, gilt $e(a, b + 1) = a \cdot e(a, b) = e(a, b) \cdot e(b, 1)$. □

Dies muss allgemeiner Durchgeführt werden mit einem Monoid multiplikativ geschrieben. (Der braucht nicht regulär sein)

2.8.3 Ordnung

Satz 2.65. *Ist $\alpha : A \to A$ injektiv und $a \notin Bi(\alpha)$, dann ist die Abbildung:*

$$\Phi : [a] \ni x \mapsto [x] \in \textit{Menge der abgeschlossenen Teilmengen von } [a] \tag{2.5}$$

bijektiv.

Seien $x, y \in [a]$ mit $[x] = [y]$. Dann ist $x \in [y]$. Wäre $x \neq y$, so wäre $x \in \alpha([y])$. Es gäbe ein $c \in [y] = [x]$ mit $\alpha(c) = x$. Dieses c wäre auch in $[x]$. Das hieße $x \in \alpha([x]) = [\alpha(x])$ im Widerspruch zum Lemma 2.3. Daher ist Φ injektiv. Zu zeigen bleibt die Surjektivität von Φ.
Sei U eine gegenüber α abgeschlossene Teilmenge von $[a]$. Ist $a \in U$, so ist $[a] = U$ und man ist fertig. Andernfalls ist $a \notin U$. Sei

$$T = \{c | c \notin U\}$$

T ist nicht gegenüber α abgeschlossen, da sonst $T = [a]$, also U die leere Menge wäre. Also gibt es $c \notin U$ aber $\alpha(c) \in U$.
Beh.:$[\alpha(c))] = U$
Bew.: Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein $u \in U$ mit $u \notin [\alpha(c)]$. Also ist $[u] \not\subset [\alpha(c)]$ und wegen Satz 2.1 Teil 4 ist $[u] \cap [\alpha(c)] \neq \emptyset$.
Ist daher $u \notin [\alpha(c)]$, so ist wegen Satz 2.8 $[\alpha(c)] \subset [u]$ und $u \neq \alpha(c)$. Also ist $\alpha(c) \in \alpha([u])$. Es gibt daher ein $d \in [u]$ mit $\alpha(d) = \alpha(c)$. Weil α injektiv ist, ist $c = d \in U$. Das kann aber nicht sein. Es kann also ein $u \in U \setminus [\alpha(c)]$ nicht geben. Daher ist $U = [\alpha(c)]$. Das heißt die Abbildung Φ ist surjektiv.

Satz 2.66. *Ist (A, α) eine freie Kette mit Basis E, so ist $A = \bigcup_{e \in E} [e]$. Wobei die Vereinigung disjunkt ist.*

Jedes Element aus A ist von genau einem Basiselement aus erreichbar.

Es ist $[E] = A$. Da $\bigcup_{e \in E} [e]$ abgeschlossen gegenüber α ist und E enthält ist $A = [E] = \bigcup_{e \in E} [e]$. Es bleibt zu zeigen, dass für zwei verschiedene Basiselemente e, e' gilt: $[e] \cap [e'] = \emptyset$. Verhielte es sich anders, so wäre etwa wegen **??** $[e] \subset [e']$. Also $e \in [e']$. Da $e \neq e'$ ist muss $e \in \alpha([e'])$ sein. Das geht nicht, da e Basiselement ist. □

Definition 31. Ist (A, α) eine einstellige Algebra, so erklären wir $a \leq b :\Longleftrightarrow [b] \subset [a]$. Das heißt von a aus ist b erreichbar durch α.

15. März 2017

Satz 2.67. *Ist (A, α) eine freie einstellige Algebra mit der Basis E, so ist die in der Definition 31 erklärte Relation eine Halbordnung auf A, in der jede nichtleere Menge ein minimales Element hat.*

Die Relation ist sicher reflexiv das heißt $[a] \subset [a]$. Außerdem ist sie transitiv. Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so ist $[y] \subset [x]$ und $[x] \subset [y]$. Daher ist $[x] = [y]$. Dann ist $y \in [x]$. Wäre $y \neq x$, so wäre $y \in [\alpha(x)]$. Das hieße $[y] = [x] \subset [\alpha(x)]$ und damit $x \in [\alpha(x)]$. Da $x \in [e]$ für ein Basiselement e ist, widerspricht dies 2.3 auf Seite 39
Zu zeigen bleibt: Jede nichtleere Menge $V \subset A$ hat ein minimales Element. Sei V eine nichtleere Teilmenge von A. 1.Fall: $E \cap V \neq \emptyset$: Dann gibt es ein $e \in V$. Dieses e ist sicher minimal.
2. Fall: $E \cap V = \emptyset$: Es ist dann $E \subset A \setminus [V] = [E] \setminus [V]$. (Da $[V] = V \cup \alpha([V])$ ist.) Diese Menge ist nicht abgeschlossen gegenüber α. Wäre sie das, so wäre $[E] \setminus [V] = A$ und also $[V] = \emptyset$. Also gibt es ein $c \in [E] \setminus [V]$ mit $\alpha(c) \in [V]$.
Beh.: $\alpha(c) \in V$ und $\alpha(c)$ ist minimal in $[V]$ und damit in V.
Es gibt ein $v \in V$, so dass $\alpha(c) \in [v]$. Wäre $\alpha(c) \neq v$, so wäre $\alpha(c) \in \alpha([v])$. Also gäbe es ein $d \in [v]$ mit $\alpha(c) = \alpha(d)$. Da α injektiv ist, folgt $c = d \in [v] \subset [V]$. Dies widerspricht der Voraussetzung. Also ist $\alpha(c) \in V$.
Beh: $\alpha(c)$ ist minimales Element in $[V]$.
Angenommen es gäbe ein $v_1 \in V$ mit $v_1 < v = \alpha(c)$. Dann ist $[v] \subsetneq [v_1]$. Es gibt also ein $d \in [v_1] \subset [V]$ mit $\alpha(d) = v = \alpha(c)$. Daher ist $c = d$, was wieder nicht der Fall sein kann. Denn es war $c \notin [V]$. Es folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.68. $(\mathbb{N}, 1+)$ *ist wohlgeordnet*

Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{N}$ ist wegen Satz 2.1 Teil 3 $[x] \subset [y]$ oder $[y] \subset [x]$. Daher ist $y \leq x$ oder $x \leq y$. Somit ist $(\mathbb{N}, 1+)$ linear geordnet. Dann ist jedes in einer Menge V minimale Element auch schon ein kleinstes Element. □

Bemerkung 6 Ist $a \in \mathbb{N}$, so ist $[a] = \{a + t | t \in \mathbb{N}\}$. Es ist $a \leq b$ genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ gibt mit $a + t = b$. Diese t ist eindeutig bestimmt und wird mit $b - a$ bezeichnet. □

Die eindeutig bestimmte Abbildung $p(a, -) \colon \mathbb{N} \to [a]$ mit $p(a, 0) = a$ ist surjektiv. Daher gibt es zu jedem $b \in [a]$ ein t mit $p(a, t) = a + t = b$. Ist $a \leq b \iff [b] \subset [a] \iff b \in [a]$ genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ gibt mit $a + t = b$. Diese t ist eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 7 Für $m \in \mathbb{N}$ und $a \leq b$ ist $m \cdot (b - a) = m \cdot b - m \cdot a$. □

Wir haben:

$$\begin{aligned} a + (b - a) &= b \\ a \cdot c + (b - a) \cdot c &= b \cdot c \\ (b - a) \cdot c &= b \cdot c - a \cdot c \end{aligned}$$

Satz 2.69. *Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $a \leq b \leq 1 + a$ so ist $b = a$ oder $b = 1 + a$*

$b \leq 1 + a$, dann ist $1 + a \in [b]$. Ist $1 + a = b$ so ist man fertig. Andernfalls gibt es ein $c \in [b]$ mit $1 + a = 1 + c$. Dann ist $a = c \in [b]$. Also ist $b \leq a$. Wir haben also $b \leq a$ und $a \leq b$. Daher ist $a = b$. □

Satz 2.70. *Ist $a \leq b$, so folgt für alle $0 \leq c$*

1. $a + c \leq b + c$.
2. $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Ist $a < b$, so folgt für alle $0 < c$:

1. $a + c < b + c$.
2. $a \cdot c < b \cdot c$.

Es gibt ein $t \in \mathbb{N}$ mit $a + t = b$. Daher ist $(a + c) + t = (b + c) + t$. Daher ist $a + c \leq b + c$.
$a \cdot c + t \cdot c = b \cdot c$. Daher ist $a \cdot c \leq b \cdot c$.
Zum zweiten Teil: Ist $a < b$ so ist $a + c \leq b + c$. $a + c = b + c$ kann nicht sein, denn dann wäre $a = b$. Also ist $a + c < b + c$.
Ist $0 < c$ und $0 < t$, so ist $1 \leq t$ Also ist $0 < t < c \cdot t$. Ist $a < b$, so ist $a + t = b$ mit einem $0 < t$, so ist $a \cdot c + t \cdot c = b \cdot c$, mit $0 < t \cdot c$. Daher ist $a \cdot c < b \cdot c$ □

Folgerung 2.71. *Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.*

Satz 2.72 (Teilen mit Rest.). *Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $b > 0$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{N}$ mit $a = q \cdot b + r$ und $r < b$. Die Zahlen q, r sind eindeutig bestimmt.*

Durch Induktion nach a. Sei $T = \{a | a = q \cdot b + r, r < b\}$. Es ist sicher $0 \in T$. Denn $0 = 0 \cdot b + 0$. Sei die Behauptung richtig für ein $a \in T$. Also $a = q \cdot b + r$, mit $r < b$. Daher ist $a + 1 = q \cdot b + (r + 1)$. Ist $r + 1 < b$ ist man fertig. Andernfalls ist $r < b \leq r + 1$. Also ist $b = r + 1$. Daher ist $a + 1 = q \cdot b + b = (q + 1) \cdot b$ wegen dem Distributivgesetz. Zur Eindeutigkeit. (Wie üblich) □

15. März 2017

Aufgaben:

19. Sei (A, α) eine freie einstellige Algebra mit der Basis E. Außerdem sei

$$\beta : A \times A \ni (a, b) \mapsto \begin{cases} (b, \alpha(a)) \text{ falls } b \in E \\ (\alpha(a), \alpha^{-1}(b)) \text{ falls } b \notin E \end{cases}$$

Dann ist $(A \times A, \beta)$ eine freie einstellige Algebra mit $E \times E$ als Basis.

Satz 2.73. *Ist $(A, 1+)$ eine Unteralgebra von $(\mathbb{N}, 1+)$ und $A \neq \emptyset$, dann ist $(A, 1+)$ zyklisch.*

A hat ein kleinstes Element a.
Beh.: $A = [a]$.
Angenommen es ist $A \setminus [a] \neq \emptyset$. Sei $b \in A \setminus [a]$. Da $\mathbb{N}$ linear geordnet ist, ist $a \leq b$ oder $b \leq a$. Wäre $a \leq b$, so wäre $b \in [a]$, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Also ist $b \leq a$. Da a das kleinste Element in A war folgt $b = a$. Dies geht wieder nicht. Daher ist $[a] = A$. □

Satz 2.74. *Das surjektive Bild einer einfachen Kette ist ist eine einfache Kette.*

Sei $([a], \alpha)$ eine zyklische Algebra und (B, β) eine weitere einstellige Algebra und $f : [a] \to B$ eine surjektive Abbildung.
Beh.: $[fa] = B$. Sei $b \in B$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $c \in [a]$ mit $f(c) = b$. Es ist $f(c) \in [f(a)]$. Es sei $T = \{c | f(c) \in [f(a)]\} = f^{-1}([f(a)])$. T ist abgeschlossen gegenüber α und $a \in T$. Dahei ist $T = [a]$. Also ist $b = f(c) \in [f(a)]$. Daher ist $B = [f(a)]$. □

Satz 2.75. *Ist $([a], \alpha)$ eine zyklische Kette, so ist jede Unterkette zyklisch.*

Es sei $[a] = A$. Es gibt einen Morphismus $f \colon \mathbb{N} \to A$ mit $f(0) = a$. Es ist f surjektiv. Sei $U \subset A$ eine Unteralgebra. Dann ist $f^{-1}(U) \subset \mathbb{N}$ eine Unteralgebra von $(\mathbb{N}, 1+)$. Diese Unteralgebra ist zyklisch. Daher ist $f(f^{-1}(U)) = U$ auch zyklisch.
Hier brauch ich den Rekursionssatz. □

Satz 2.76. *Sei $f \colon [a] \to [a]$ ein Morphismus mit $f(a) = a$. Dann ist f die Identität.*

Zwei Morphismen, die auf einem Erzeugendensystem übereinstimmen sind gleich. (Hier brauche ich nicht den Rekursionssatz) □

Satz 2.77. *Sei $\alpha : [a] \to [a]$ surjektiv. Dann ist α schon bijektiv und die Umkehrabbildung ist auch ein α Morphismus. (Das ist immer der Fall).*

Es gibt ein $b \in [a]$ mit $\alpha(b) = a$. Es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $\Phi(a)\colon \mathbb{N} \to [a]$ mit $\Phi(a)(0) = a$. Es ist $\Phi(a)$ surjektiv. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Phi(a)(n) = b$. Es ist $\Phi(\alpha(c)) = \alpha \circ \Phi(c)$ für alle $c \in [a]$. Zu dem oben gefunden $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Abbildung

$$g : A \ni c \mapsto \Phi(c)(n) \in A.$$

Es ist $g(\alpha(c)) = \Phi(\alpha(c))(n) = (\alpha \circ \Phi(c))(n) = (\alpha \circ g)(c) = \alpha(g(c))$. Also ist g ein Morphismus. Wir haben $(\alpha \circ g)(a) = \alpha(\Phi(a)(n)) = \alpha(b) = a$. Daher ist $\alpha \circ g = Id$. Und da g ein Morphismus ist, ist auch $g \circ \alpha = Id$. Also ist α invertierbar. □

Eine Anwendung der Ordnung auf $\mathbb{N}$:

Satz 2.78. *Seien (A, α) und (B, β) zwei Ketten mit bijektiven α, β Dann gilt:*

1. *Ist $f : A \to B$ ein Morphismus bezüglich α, β, so ist f auch ein Morphismus bezüglich den inversen Abbildungen.*
2. *Ist $f : A \to B$ ein Morphismus, so sind $Bi(f)$ und $B \backslash Bi(f)$ abgeschlossen gegenüber α*

1. Es ist $f\alpha = \beta f$. Daher ist $f = \beta f \alpha^{-1}$ Und damit ist $\beta^{-1} f = f\alpha^{-1}$.
2. $f(A)$ ist abgeschlossen gegenüber α. Sei $b \in B \setminus f(A)$. Wäre $\beta(b) \in f(A)$, so wäre $\beta^{-1}(\beta(b)) = b \in f(A)$. Das geht nicht. □

Ist U irgend eine Teilmenge der Kette (A, α), so kann man den Abstand der Elemente $a \in A$ von U durch folgende Funktion $d(U)$ messen.

$$d(U)(a) := \begin{cases} n \text{ falls } n \text{ die kleinste natürliche Zahl ist mit } \alpha^n(a) \in U \\ \infty \text{ falls } [a] \cap U = \emptyset \end{cases} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Es ist $a \in U \iff d(U, a) = 0$.
Wir erklären auf $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung.

$$\gamma(x) := \begin{cases} x - 1 \text{ falls } x > 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \\ \infty \text{ falls } x = \infty \end{cases}$$

Dadurch wird $\overline{\mathbb{N}}$ zu einer Kette. Malt man ein Bild dazu so sieht das beispielsweise so aus

Satz 2.79. *Ist U abgeschlossen in A, so ist $d(U) : A \to \overline{\mathbb{N}}$ ein Morphismus.*

Sei $a \in A$.

1. Gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(n) \in U$ so ist auch $\alpha(a)$ von dem Typ. Daher ist $d(U)(\alpha(a)) = \infty = \gamma(\infty) = \gamma(d(U)(a))$
2. Sei $\alpha^n(a) = \alpha^{n-1}(\alpha(a)) \in U$ mit $n > 0$. Dann ist $d(U)(\alpha(a)) = n - 1 = \gamma(d(U, a))$.
3. Es sei $a \in U$. Dann ist $\alpha(a) \in U$. Also $d(U)(\alpha(a)) = 0 = \gamma(0) = \gamma(d(U(a))$.

Damit ist $d(U)$ ein Morphismus. □

Folgerung 2.80. *Ist $h : B \to A$ ein Epimorphismus von Ketten, so ist h surjektiv als Abbildung.*

Es ist $U := h(B)$ abgeschlossen in A. Sei k_0 der Morphismus, der alles auf $0 \in \overline{\mathbb{N}}$ abbildet. Dann ist $d(U)h = k_0 h$. Da h ein Epimorphismus ist folgt $d(U) = k_0$. Für ein $a \notin U$ ist $d(U)(a) \neq 0$. Also gibt es kein $a \notin U = h(B)$. Daher ist $h(B) = A$. Es ist daher h surjektiv. □

Fragen:

8. Gibt es in der Kategorie der Ketten einen Kogenerator?

2.8.4 Andere Kennzeichnung der Unendlichkeit

> [4]Ein Geschlecht geht, und ein anderes kommt; doch die Erde bleibt ewig bestehen. [5] Die Sonne geht auf, und die Sonne geht unter und eilt an ihren Ort, wo sie aufgeht. [6] Der Wind weht nach Süden, dann wendet er nach Norden; er dreht sich, kehrt um, kommt wieder; so wiederholt der Wind seinen Umlauf, [7] Alle Flüsse laufen ins Meer, doch wird das Meer nicht voll. Zum Ort, wohin die Flüsse gehen, dahin geht ihr Lauf immer wieder. Alle Worte erlahmen. Keiner vermag zu sagen: das Auge werde nicht satt beim Sehen und das Ohr nicht vom Hören voll. [9] Was gewesen, dasselbe vird (wieder) sein, und was geschehen, wird (wieder) geschehen: Nichts Neues gibt es unter der Sonne. [10] Sagt man von etwas: „Sieh, das ist neu“, so war es schon längst zu den Zeiten, die vor uns gewesen. [11] Kein Gedenken bleibt den Früheren; aber auch den Späteren, die kommen, wird kein Gedenken bleiben bei denen, die noch später sind.

So lehrt das Buch der Prediger (Koholet oder Ecclesiastes) imKapitel 1 ab Vers 4Beuron, *Die Bibel. Die heilige Schrift des alten und neuen Testamentes*, Seite 723. Diese These, dass auf der Welt immer wieder das Gleiche passiert, wurde in der Antike heftig diskutiert. Aber auch in der Neuzeit wurde die Lehre immer wieder aufgegriffen. So schreibt Nietzsche in hohepriesterlichen Ton:

> ICH ERZÄHLE nunmehr die Geschichte des Zarathustra. Die Grundkonzeption des Werks, der Ewige Wiederkunfts-Gedanke, diese höchste Formel Bejahung, die überhaupt erreicht werden kann —, gehört in den August des Jahres 1881: er ist auf ein Blatt hingeworfen, mit der Unterschrift: „6000 Fuß jenseits – ' Mensch und Zeit“. Ich ging an jenem Tage am See Silvaplana durch die Wälder; bei einem mächtigen pyramidal aufgetürmten Block unweit Surlei machte ich halt. Da kam mir dieser Gedanke. — Rechne ich von diesem Tage ein paar Monate zurück, so finde ich, als Vorzeichen, eine plötzliche und im tiefsten entscheidende Veränderung meines Geschmacks, vor allem in der Musik. Man darf vielleicht den ganzen Zarathustra unter die Musik rechnen; —- sicherlich war eine Wiedergeburt in der Kunst zu hören, eine Vorausbedingung dazu. In einem kleinen Gebirgsbade unweit Vicenza, Recoaro, wo ich den Frühling des Jahrs 1881 verbrachte, entdedeckte ich, zusammen mit meinem maästro und Freunde Peter Gast, einem gleichfalls „Wiedergebornen“, daß der Phönix Musik mit leichterem und leuchtenderem Gefieder, als er je gezeigt, an uns vorüberflog. Rechne ich dagegen von jenem Tage an vorwärts, bis zur plötzlichen und unter den unwahrsdieinlichsten Verhältnissen eintretenden Niederkunft im Februar 1883 — die Schlußpartie, dieselbe, aus der ich im Vorwort ein paar Sätze zitiert habe, wurde genau in der heiligen Stunde fertig gemacht, in der Richard Wagner in Venedig starb ——- so ergeben sich achtzehn Monate für die Schwangerschaft. Diese Zahl gerade von achtzehn Monaten dürfte den Gedanken nahelegen, unter Buddhisten wenigstens, daß ich im Grunde ein Elefanten—Weibchen bin. — In die Zwischenzeit gehört die „gaya scienza“, die hundert Anzeichen der Nähe von etwas Unvergleichlichem hat; zuletzt gibt sie den Anfang des Zarathustra selbst noch, sie gibt im vorletzten Stück des vierten Buchs den Grundgedanken des Zarathustra. —

Nietzsche deklamiert hier im Sing Sang eines Hochamtes mit Weihrauch und Glockengeläut. Er schreitet wie ein Bischof mit Mitra einher. Die Gongschläger fehlen nicht,- (wie bei der Wandlung in der katholischen Messe). Er wählt grundsätzlich die feierlichen altertümlichen Worte. „6000 Fuss jenseits von Mensch und Zeit“. Wie alltäglich, langweilig hätte sich angehört. „3 km von Surlei entfernt". Altertümliches findet der normale Leser weihevoller es geht einen priesterlichen Gang „Andante Majestoso“. Kaum eine Lisa, ein Sepp oder eine Heidi weiß was ein „Fuß“ ist. Er hätte die Geschichte auch anders erzählen können. Zum Beispiel so: Gestern nach dem Mittagessen in dem Gasthaus

„zum Ochsen“ spazierte ich zu einem dicken Felsen am Silvaplana. Die Sonne schien wie gestern, wie voriges Jahr um diese Zeit. Am Fuss des Felsens döste ich. Ich sah, wie Fische immer wieder nach Fliegen schnappten. Ihr Schnappen zeichnete Kreise in die Wasseroberfläche. Die Wellen breiteten sich über den ganzen See aus. Sie prägten ihr kreisförmiges Muster über dem ganzen See ein. Ist es ähnlich mit der Zeit. Hat auch sie einen Rythmus. Was ist der Takt der Zeit?
Ich packte meine Brotzeit: Schweizer Käse mit der gewohnten Verteilung der Löcher. Wie zwei Jahre zuvor verzehrte ich zwei Semmeln. Ich wiederholte Gedanken, die andere vor mir gedacht haben. Wiederholt sich nicht vieles? Wiederholt sich alles??
Aber so wäre es ein Gedanke, den jeder Handwerksbursche, einer der von ihm Verachteten „Viel zu vielen“ hätte haben können und auch sicher schon hatte. Aber mit viel Pathos geölt wird auch ein Mäusegdanke zur Weltoffenbarung.
Wie wir am Buch der Prediger gesehen haben. Die ewige Wiederkehr des Gleichen wurde auch in der Antike schon oft diskutiert. Dafür braucht es keine Offenbarung „Gottes“ des Weltgeistes an den Jünger des Zaratustras. Auch braucht es keine buddistischen Elefantenweibchen.
Die Frage, ob die These des Predigers richtig ist, hängt eng zusammen mit der Frage: Gibt es unendliche Mengen? Um dies nochmal in klarer Sprache zu erläutern, erinnere ich: $\mathfrak{P}(A)$ sei Menge aller Teilmengen von A, das ist die Potenzmenge von A.

Satz 2.81 (Unendliche Menge). *Für eine Menge sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist unendlich.*
2. *Es gibt eine streng monoton fallende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(A)$*
3. *$\mathfrak{P}(A)$ enthält eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ ohne kleinstes Element.*

1. $\Longrightarrow$2. $\alpha : A \to A$ sei eine injektive nicht surjektive Funktion und $a \notin \alpha(A)$. Weiter sei $[a]$ die von a erzeugte einstellige Unteralgebra. Ich betrachte die Menge der zyklischen Unteralgebren von $[a]$. Durch

$$\beta : [b] \mapsto [\alpha(b)] = \alpha([b]) \tag{2.6}$$

wird jeder solchen zyklischen Unteralgebra eine echte zyklische Unteralgebra zugeordnet. Nach dem Rekursionssatz gibt es eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \text{Menge der zyklischen Unteralgebren}$$

mit $f(0) = [a]$ und $f(n+1) = \beta(f(n))$. (Dies kann man auch so formulieren: Es gibt eine Funktion $g : [a] \to$ Menge der zyklischen Unteralgebren mit $g(a) = [a]$ und $g(\alpha(x)) = \beta(g(x))$) Beh.: f ist streng monoton fallend.
Bew: Es sei $T = \{t | f(n+t) < f(n)\}$ Es ist $f(n) = [b]$ und $f(n+1) = [\alpha(b)] \subsetneq [b]$. Also ist $1 \in T$. Sei $t \in T$ und $f(n+t) = [b]$. Dann ist $f(n+t+1) = \beta([b]) = [\alpha(b) \subsetneq [b] = f(n+t) \subsetneq f(n)$. Also ist T abgeschlossen gegenüber Nachfolgern. Daher ist $T = \mathbb{N}$. Die Funktion f ist daher echt monoton fallend.
2. $\Longrightarrow$3.: Ist

$$f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(A)$$

echt monoton fallend, dann enthält $\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ kein minimales Element.
3. $\Longrightarrow$2. Sei $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(A)$ eine Menge ohne minimales Element. Das bedeutet. Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ ist $K(U) = \{V | V \subsetneq U, V \in \mathfrak{U}\} \neq \emptyset$. Nach dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Funktion

$$\alpha : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$$

mit $\alpha(U) \in K(U)$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Wir wählen ein beliebiges $U_0 \in \mathfrak{U}$ aus. Nach dem Rekursionssatz gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{U}$, mit $f(0) = U_0$ und $f(n+1) = \alpha(f(n))$. Man zeigt leicht: f ist echt monoton fallend.
2.$\Longrightarrow$1. Da es eine streng monoton fallende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(A)$ gibt, gibt es eine echt absteigende Kette $U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq \dots$. Daher ist $B_0 = U_0 \setminus U_1, B_1 = U_1 \setminus U_2 \dots$ eine Folge von nichtleeren paarweise disjunkten Mengen. Nach dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Folge $x_0, x_1, \dots$ mit $x_i \in B_i$. Die x_i sind daher paarweise verschieden. Wir haben daher eine injektive Funktion $h : \mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in A$. Das heißt A ist unendlich[12]. □

Es ist natürlich auch A unendlich genau dann, wenn es Teilmenge von $\mathfrak{P}(A)$ ohne maximales Element gibt.
Kehren wir noch einmal zurück zu Augustinus. Im Zusammenhang mit der Theorie von der ewigen Wiederkehr des Gleichen verteidigte er die reale Existenz einer unendlichen Menge. Wir verdeutlichen:

Definition 32. (A, α) eine Kette. Die von einem $a \in A$ erzeugte Bahn kehrt nicht wieder, wenn für alle $c \in [a]$ gilt: $c \notin [\alpha(c)]$. Wir sagen a ist azyklisch.

Es gilt:

Satz 2.82. *Eine Menge A ist unendlich, wenn gilt: Es gibt ein $a \in A$ und ein $\alpha : A \to A$, so dass die von a erzeugte Bahn nicht wiederkehrt.*

[12] Wir haben also tatsächlich das Auswahlaxiom hier gebraucht

Ist A unendlich, dann gibt es ein injektives $\alpha : A \to A$, welches nicht surjektiv ist. Sei $a \notin \alpha(A)$. Wegen dem Hilfsatz 2.3 kehrt die von a erzeugte Bahn nicht wieder.
Ist umgekehrt $\alpha : A \to A$ eine Abbildung und unter dieser Abbildung $[a]$ eine Bahn ohne Wiederkehr, so ist die Menge $\mathfrak{A} = \{[x] | x \in [a]\}$ eine Menge ohne minimales Element. Das heißt wegen Satz 2.81 auf Seite 87 ist A eine unendliche Menge. □

Wir sehen, der Prediger im alten Testament hatte also Unrecht, wenn es eine unendliche Menge gibt. Augustinus hatte dagegen Recht. Er war der Meinung, dass die ewige Wiederkehr des Gleichen unsinnig ist. Jedenfalls kann man der ewigen Wiederkehr ausweichen, wenn es eine unendliche Menge gibt. Dann gibt es ein Modell einer azyklischen Welt. „Auf jene (die Vertreter der Wiederkehrlehre) aber treffen, wie ich meine, die darauffolgenden Worte zu: «Im Kreise laufen die Gottlosen herum», nicht als ob ihr Leben in jenen vermeintlichen Kreisläufen sich wiederholen würde, sondern weil schon jetzt ihr Irrtumspfad, das ist, ihre falsche Lehre, sich im Kreise dreht.“ (Siehe Augustinus, *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*, Seite 81)

Satz 2.83. *Ist A eine endliche Menge und x beliebig, so ist $A \cup \{x\}$ endlich.*

Angenommen es gibt eine injektive Funktion $\alpha : A \cup \{x\} \to A \cup \{x\}$, welche nicht surjektiv ist. Also gibt es ein $a \in A \cup \{x\}$ mit $[a] \cong \mathbb{N}$.
1. Fall: $x \notin [a]$. Dann ist $[a] \subset A$ und daher A unendlich.
2. Fall: $x \in [a]$. Dann ist aber $x \notin [\alpha(x))] \subset A$. Es ist aber auch $[\alpha(x)] \cong \mathbb{N}$. Also ist wieder A unendlich. Dies widerspricht der Voraussetzung. □

Folgerung 2.84. *Sei $([a], \alpha)$ eine zyklische Kette. Dann ist für alle $x \in [a]$ die Menge $\overline{[x]} = [a] \setminus [x]$ endlich.*

Dies ist sicher für $x = a$ richtig, denn dann ist $[a] \setminus [a] = \emptyset$ endlich. Sei

$$T = \{x | \overline{[x]} \text{ ist endlich und } x \in [a]\}$$

Es ist $a \in T$. Sei $x \in T$. Dann ist $\overline{[\alpha(x)]} = \overline{[x]} \cup \{x\}$ endlich. Also ist $T = [a]$. Dies war zu zeigen. □

Was erreicht worden ist (durch α) ist endlich. Nur die „ das noch nicht Erreichte“ ist eventuell unendlich.

Definition 33. Wir wollen eine Menge zählbar nennen, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt und eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N} \setminus [n] = \overline{[n]}$, wenn es also eine Bijektion auf einen unteren Abschnitt von $\mathbb{N}$ gibt. Wir sagen jede Bijektion f von A in einen unterern Abschnitt von $\mathbb{N}$ zählt die Menge A. . Die Zahl n heißt Anzahl von A.

Bemerkung 8 Ist eine Menge A zählbar, so ist die Anzahl von A eindeutig bestimmt. □

Seien $f : A \to \mathbb{N} \setminus [n]$ und $g : A \to \mathbb{N} \setminus [m]$ zwei Bijektionen. Angenommen es ist $m \neq n$. Da $\mathbb{N}$ linear geordnet ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n < m$ ist. Also ist $[m] \subsetneq [n]$ und daher $\mathbb{N} \setminus [n] \subsetneq \mathbb{N} \setminus [m]$. Wir betrachten die Abbildung $\iota f g^{-1} : \mathbb{N} \setminus [m] \to \mathbb{N} \setminus [m]$. Es ist eine Injektion, welche nicht surjektiv ist. Dies widerspricht Folgerung 2.84. □

Satz 2.85. *Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie zählbar ist.*

Dies ist vielleicht das Endlichkeitskriterium, welches den meisten Leuten zuerst einfällt. Zu jeder endlichen Menge gehört also die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, die Anzahl der Menge.

Sei A endlich. Dann enthält die Menge der zählbaren Teilmengen von A ein maximales Element U^* und eine bijektive Funktion $f : U^* \to \{0, 1 \ldots, n-1\}$. Beh. $U^* = A$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $a \in A$ aber $a \notin U^*$. Wir betrachten $U_0 := U^* \cup \{a\}$. und die Funktion:

$$f^* : U_0 \ni u \mapsto \begin{cases} f(u) \text{ falls } u \in U^* \\ n \text{ falls } u = a \end{cases} \tag{2.7}$$

Diese Funktion ist bijektiv. Das geht aber nicht, da schon U^* maximal war.
Die Umkehrung gilt wegen der Folgerung 2.84 □

Wir haben also folgendes Ergebnis. Die endlichen Mengen sind genau die Mengen, die einem unteren Abschnitt von $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.
Jetzt kann die intuitiv klare Tatsache gezeigt werden, dass jede endliche Menge von natürlichen Zahlen ein größtes Element hat:

Definition 34. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ heißt beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m \in M$ gilt: $m \leq c$.

Satz 2.86. *Für eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Die Teilmenge M ist beschränkt.*
2. *M ist endlich.*
3. *M hat ein größtes Element.*

1. $\Longrightarrow$2. Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, die beschränkt ist, so gibt es ein $b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $a \in M$ gilt: $a \leq b$. Es ist daher $M \subset \mathbb{N} \setminus [b+1]$. Dies ist ein endliche Menge. Daher ist die Teilmenge M endlich.
2. $\Longrightarrow$3.: Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, so ist wegen der linearen Ordnung von $\mathbb{N}$ jeds Maximale Element schon ein größtes. Ich muss daher nur zeigen, dass es in M ein maximales Element gibt. Zu
$a \in M$ sei

$$G(a) : \{x | a < x \text{ und } x \in M\}$$

Unter diesen Mengen gibt es eine minimale etwa $G(m)$.
Beh. m ist ein maximales Element in M.
Bew.: Sei $a \in M$. Angenommen es ist $m < a$. Dann ist $G(a) \subset G(m)$ und daher ist $G(m) = G(a)$. Aber nach Voraussetzung ist $a \in G(m)$ und nicht in $G(a)$. Dies ist ein Widerspruch. Daher ist $a \leq m$ und m ist maximal. Hierbei wurde das Auswahlaxiom verwendet.
3. $\Longrightarrow$1. Dies ist klar.

Jetzt ist einfach:

Satz 2.87. *Die Vereinigung zweier endlicher Mengen A, B ist endlich. Sind A und B elementfremd, so ist*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Dabei ist $|A|$ die Anzahl von A

Zähle $f : A \to \{0, \ldots, a-1\}$ die Menge A und $g : B \to \{0, \ldots, b-1\}$ zähle die Menge B. Sind A, B elementfremd, so zählt die Funktion

$$h : A \cup B \ni x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in A \\ g(x) + a \text{ falls } x \in B \end{cases}$$

die Menge $A \cup B$. Also ist die Vereinigung zweier elementfremder Mengen endlicher Mengen endlich. Da die Vereinigung epimorphes Bild der elementfremder Vereinigung ist, ist auch die Vereinigung von endlichen Mengen endlich. □

2.8.5 Gelesenes Gedanken

Aristoteles

- Ein Argument von Aristoteles:Lehmann-Leander, *Aristoteles Analytiker der Wirklichkeit*, Seite 25 „Man kann behaupten, dass in jeglichem Bereiche, wo es eine Stufenreihe, ein Höher oder Niedriger bezüglich der

Vollkommenheit[13] gibt, notwendig auch ein schlechthin Vollkommenstes besteht. Da es nun unter dem, was ist, eine solche Abstufung von Dingen höherer und geringerer Vollkommenheit gibt, so gibt es auch ein vollkommenstes Seiendes, und dies dürfte das Göttliche sein.“ Dies hat Aristoteles sicher fälschlich behauptet. Die Menge der natürlichen Zahlen ist der Größe nach geordnet. Sie enthält aber kein größtes Element. In der Menge der ganzen Zahlen gibt es sicher Teilmengen ohne kleinste Zahl. Es gibt unendliche aufsteigende Ketten, die nicht abbrechen. Aristoteles behauptet hier, dass jede Menge endlich ist. Denn sei A eine unendliche Menge. Dann enthält $\mathfrak{P}(A)$ eine Teilmenge ohne größtes Element. Ja $\mathfrak{P}(A)$ enthält sogar Ketten ohne größtes Element und Ketten ohne kleinstes Element. Man fragt sich, ob Aristoteles diese Beispiele als Gegenargument zugelassen hätte. In endlichen Mengen stimmen seine Argumente im wesentlichen schon. Vielleicht ist das der geheime Grund, warum er nur endliche Mengen zulässt. Seine Gottesbeweise führen sonst nicht zum Ziel.

- Aus dem Buch der Pysik III 6. Aristoteles, *Acht Bücher Physik*, Seite 133 „Daß aber auch, wenn es ein Unbegrenztes schlechthin gar nicht gibt, viel Unmögliches daraus folgt, ist klar; denn dann würde sowohl es von der Zeit einen Anfang und einen Abschluß geben, als auch die Größen würden nicht wieder in Größen teilbar sein und auch die Zahl würde nicht unbegrenzt sein“ Aristoteles sieht also durchaus die Schwierigkeiten, die entstehen, wenn man das Unbegrenzte und das Unendliche absolut ablehnt. Aus diesem Dilemma versucht er sich durch das potentielle Unendlich zu retten. „Wann aber, nachdem die Sache so festgestellt ist, nach keiner der beiden Seiten sich eine Möglichkeit zeigt, so bedarf es eines Schiedsrichters, und es ist klar, daß das Unbegrenzte gewissermaßen wohl existiert, gewissermaßen aber auch nicht. Nämlich das Existieren wird teils in dem Sinne von der 'Potenz nach', theils in dem Sinne von 'Verwirklichung nach' gesagt, das Unbegrenzte ist theils durch Wegnehmen. Daß aber die Größe aktuell nicht unbegrenzt ist, haben wir schon angegeben, der Teilung nach aber ist sie es, denn die Lehre von den 'unteilbaren Linien' aufzuheben ist nicht schwer. Also bleibt nur übrig, daß das Unbegrenzte der Potenz nach sei; man darf aber dabei das der Potenz nach Seiende nicht so nehmen, wie z.B. bei dem Vorhandensein der Potenz einer bestimmten Statue diese Statue auch einmal sein wird, daß eben eben so auch ein bestimmtes Unbegrenztes, welches dem Actus nach es wäre, wein werde, sondern ...“

[13] Was ist Vollkommenheit?

Thomas von Aquin

- Thomas von Aquin scheint explizit die Existenz der Unendlichkeit zu leugnen. So schreibt er in der Summe wider die Heiden Aquin, *Summe gegen die Heiden*, 20. Kapitel „Gott ist kein Körper“ Seite 77 „Eine unendliche Größe gibt es nicht“

Lukrez

- Lukrez zitiert nach Harrison, *Kosmologie*, Seite 166 Lukrez schrieb „Die Beobachtung zeigt, dass jeder Gegenstand durch einen andren begrenzt wird. Die Hügel werden von der Luft demarkiert und die Luft durch die Hügel. Das Land setzt den Meeren Grenzen und das Meer jedem Land. Aber das Universum wird durch nichts außen begrenzt“ Jenen, die an ein endliches Universum mit einem äußeren Rand glaubten schlug er folgendes Rätsel vor (siehe Abbildung) „Nimm einen Augenblick an, der ganze Raum sei begrenzt und jemand werfe über seine äußere Grenze hinaus einen Speer. Entscheidest du dich für die Annahme, dass das Geschoss, das mit aller Macht geworfen wird, entlang der Zielrichtung fliegen wird? Oder glaubst du, dass etwas den Speer auf dem Wege blockieren und anhalten wird? Du mußt dich für die eine oder andere Alternative entscheiden. . . . Mit diesem Argument werde ich dich verfolgen. Wohin auch immer du die äußerste Grenze von Dingen verlegen magst, ich werde dich fragen ’Gut dann, was geschieht mit dem Speer?’ “ Lukrez antwortet:„Lerne daraus, dass das Universum in keiner Richtung begrenzt ist.“

Bolzano

- Aus B. Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen“ (Prag 1851) nach Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Seite 275 „Ich behaupte nämlich: Zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge zugehörige Ding, mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, dass die eine dieser Mengen die andre als einen bloßen Teil in sich fasst,so dass die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d.h als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben.“ In unserer Sprache ausgedrückt behauptet hier Bolzano: Sind zwei Mengen unendlich, so kann

es eine bijektive Funktion von der einen in die andere Menge geben, obwohl eine Menge echter Teil der anderen ist. Im wesentlichen ist dies die Kennzeichnung unendlicher Mengen durch Dedekind. Dies belegt wieder die These. Nichts ganz neues gibt es unter der Sonne. Mathematik ist eben nachdenken. Bolzano belegt seine These, indem er die die bijektive Funktion

$$f : [0,5] \ni x \mapsto \frac{5}{12}x \in [0,12]$$

diskutiert. Es ist $[0,5]$ eine echte Teilmenge von $[0,12]$ und dennoch ist f eine bijektive Funktion.

Galilei

- Etwas undeutlicher hatte schon Galilei dies bemerkt. Ich zitiere nach Rucker, *Die Ufer der Unendlichkeit*, Seite 19 „Unendlich ist die Anzahl aller Zahlen, unendlich die der Quadrate, unendlich die der Wurzeln, weder ist die Menge der Quadrate kleiner als die der Zahlen,noch ist die Menge der letzteren größer; und schließlich haben die Attribute des Gleichen, des Größeren und des Kleineren nicht statt bei Unendlichem, sondern sie gelten nur bei endlichen Größeren“ Wir werden später sehen. Die Behauptung Galileis stimmt nur in ihrem ersten Teil. Cantor hat den zweiten Teil der Behauptung widerlegt.

Giordano Bruno

- Aus Giordano Bruno: Zitiert nach : „Der Weg der Physik“ Sambursky, *Der Weg der Physik*, Seite 252 ff

  Der unendliche Raum Personen des Gesprächs: Elpino, Filoteo, Fracastorio, Burchio.

  Elpino: Wie sollte es möglich sein, dass das All unendlich wäre?

  Filoteo: Umgekehrt, wie sollte es möglich sein, dass das All endlich wäre?

  Elpino: Meint Ihr, dass seine Unendlichkeit sich beweisen lässt?

  Fileto Mein Ihr, dass seine Endlichkeit sich beweisen lässt?

  Elpino: Was für eine Ausschweifung der Phantasie. ...

  Burchio:...schon ganz gern sähe, es wäre so wie Fileto behauptet, weil ich dann, sollte mir einmal das Malheur passieren, von dieser Welt hinunterzufallen, zu guter Letzt, doch immer irgendwo zu Lande schlagen müsste. ...

15. März 2017

Fileto: Freilich gibt es keinen Sinn, der das Unendliche anschaute, keinen Sinn, der uns unmittelbar zwänge, darauf zu schließen; denn das Unendliche kann kein Gegenstand der Sinneswahrnehmung sein. ... Wenn die Welt endlich ist und jenseits der Welt nichts, so frage ich euch: Wo ist die Welt? Wo befindet sich das All? Aristoteles antwortet: „In sich selber; die innere Wölbung der ersten Himmelskugel ist der erste und allgemeinste Ort, und dieser als das erste Umfassende wird von nichts anderem umfasst. (— Eine seltsame Vorstellung. Aber in der Sprache der Mengenlehre gar nicht so seltsam. Es gibt eine Klasse. In dieser Klasse sind alle Mengen enthalten. Sie selber ist aber nicht mehr Element einer Klasse—) Denn der Ort ist nichts anders als die Oberfläche und Begrenzung durch einen umfassenden Körper, und was in keinem umfassenden Körper ist ist in keinem Ort. Aber mein guter Aristoteles, was willst du damit sagen dass ein Raum in sich selber sei? Was willst du außerhalb der Welt annehmen? Sagst du: dort ist nichts – so befinden sich ja Himmel und Welt im Nichts also Nirgendwo.... (– Für Bruno ist es also unvorstellbar, dass es etwas gibt das nicht in etwas ist. Aber in der Mengenlehre sind Klassen gerade von dieser Art. Darauf baut die Mathematik auf.–) Denn es ist in Wahrheit unmöglich, mit irgendwelchem Sinn oder irgendwelcher Phantasie sich ernsthafterweise eine Oberfläche, eine Begrenzung einen Rand vorzustellen, außerhalb dessen weder ein Körper noch leerer Raum wäre, auch wenn die Gottheit dort wäre.

Burchio: Gewiss würde man glaube ich sagen müssen, dass, wenn eine Hand über jene Wölbung hinausstreckte, dies nicht mehr im Raum und also nirgendwo sein und folglich ihr Sein verloren haben würde. (Dies Argument erregt Schrecken ist aber toll.)

- Descartes, René. Aus den Meditationes: „ Wir werden deshalb uns nicht mit Streitigkeiten über das Unendliche ermüden; denn bei unserer eigenen Endlichkeit wäre es verkehrt, wenn wir versuchten, etwas darüber zu bestimmen und so es gleichsam endlich und begreiflich zu machen. Wir werden uns deshalb nicht mit der Antwort auf die Frage mühen, ob die Hälfte einer unendlichen Linie ebenfalls unendlich sei, oder ob die unendliche Zahl gleich oder ungleich sei und Ähnliches; denn nur der, welcher seine Seele für unendlich hält, kann meinen, hierüber nachdenken zu müssen. Wir werden dagegen Alles, bei dessen Betrachtung man kein Ende finden kann, zwar nicht als unendlich behaupten, aber als endlos ansehen. So kann man sich keinen Raum so groß vorstellen, dass eine Vergrößerung desselben unmöglich wäre, und man wird deshalb die Größe der möglichen Dinge als eine endlose bezeichnen. Ebenso wird man die Größe für

ohne Ende teilbar halten, weil kein Körper in so viel Teile geteilt werden kann, dass diese Teile nicht immer noch weiter teilbar wären. Ebenso wird man die Zahl der Sterne für nicht-beschränkt annehmen, weil man sich keine so große Zahl derselben vorstellen kann, dass Gott nicht noch mehr hätte erschaffen können. Dasselbe gilt für das Übrige."

- „Das Hinausgehen über das Seiende geschieht im Wesen des Daseins" Dies ist ein Satz von Heidegger zitiert nach dem Buch von Thomas H. Macho über Sartre. Macho, *Sartre*, Seite 25 Der Satz nimmt in der Hierarchie der Unverständlichkeiten sicher eine sehr hohe Stelle ein. Wie ja wahrscheinlich kaum einer so gut erreicht hat nicht verstanden zu werden wie Heidegger. Aber wenn wir ihn mit unsern Begriffen deuten, so scheint es zum Wesen des Daseins zu gehören, dass man über etwas hinausgeht. Das heißt in Sinne von Dedekind ist eine unendliche Menge vonnöten.

- „Da-sein heißt: Heineingehaltenheit in das Nichts" Macho, *Sartre*, Seite 28. Es wäre schön Giordano Bruno zu dieser Bemerkung Heideggers zu hören. Sie erinnert stark an das Weltbild des Aristoteles: Die Welt hängt im Nichts. Bei mir sträubt sich da jedes Vorstellungsvermögen. Schon die Hand, welche sich über den Rand des Nichts hinaus streckt, wo ist sie? Erst Recht die Hand, die das Da-Sein ins Nichts hält???

- Augustinus zur WiederkehrlehreAugustinus, *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22*, Seite 80: „Nun liest man freilich im Buche Salomos, genannt der Prediger, die Worte: «Was ist's das geschehen ist? Eben das hernach geschehen wird. Was ist's das man getan hat? Eben das man hernach wieder tun wird, und geschieht nichts neues unter der Sonne. Geschieht auch etwas, davon man sagen möchte: 'Siehe das ist neu'? Es ist zuvor auch geschehen in den langen Zeiten, die vor uns gewesen sind». Diese Worte wollen einige auf jene Umläufe beziehen, die immer wieder zum selben Punkt zurückkehren und alles auf den gleichen Stand bringen sollen. Aber Salomo spricht hier entweder von zuvor erwähnten Dingen, also den kommenden und gehenden Menschengeschlechtern, dem Kreisen der Sonne und dem Lauf der Gewässer, oder überhaupt von allerart Dingen, die entstehen und vergehen. Denn es gab Menschen vor uns, gibt sie um uns und wird sie nach uns geben, und nicht anders steht es mit allen Tieren und Pflanzen. Selbst die Ungetüme, die von der Naturregel abweichen, mögen sie auch untereinander verschieden und einige von ihnen nur einmal, wie es heißt vorgekommen sein, sind doch, sofern sie unter den Begriff Wundertiere und Ungetüme fallen, schon dagewesen und werden wieder erscheinen, und man kann es nicht a ls etwas Neues und unerhör-

tes bezeichnen, daß ein Ungetüm unter der Sonne geboren wird. Andere freilich verstehen die Worte des Weisen so, als habe er sagen wollen, in der Vorherbestimmung Gottes sei alles schon so gut wie geschehn, und daher gebe es nichts Neues unter der Sonne. Nie jedoch wird rechter Glaube darauf verfallen, mit diesen Worten Salomos seien jene Umläufe gemeint, in denen sich Zeiten und zeitliche Dinge in endlosen Kreisen wiederholen sollen. Denn dann müßte, mit Verlaub zu sagen, Plato, der Philosoph, wie er in seinem Jahrhundert in der Stadt Athen und der Akademie genannten Schule seine Zöglinge lehrte, schon unzählige Male in weiter zurückliegenden Jahrhunderten, gewiss in sehr langen, aber doch festen Abständen, aufgetreten sein, derselbe Plato, dieselbe Stadt, dieselbe Schule und dieselben Schüler,[14], und das müsste sich auch in zukünftigen Jahrhunderten stets von neuem wiederholen. Ausgeschlossen so etwas zu glauben! Denn einmal nur ist Christus für unsere Sünden gestorben.[15], «auferstanden von den Toten, stirbt er hinfort nicht mehr, und der Tod wird hinfort nicht über iohn herrschen». Und auch wir werden nach der Auferstehung immer bei dem Herrn sein, zu dem wir jetzt mit dem heiligen Psamlmsänger sagen: «Du, Herr, wollest uns bewahren und uns ewiglich behüten vor diesem Geschlecht.»Auf jene aber treffen, wie ich meine, die darauffolgenden Worte zu «Im Kreise. . . ». “

- Das folgende Gedicht stammt von Wilhelm Busch:

  Beschränkt
  Halt dein Rößlein nur im Zügel
  Kommst ja doch nicht allzuweit
  Hinter jedem neuen Hügel
  Dehnt sich die Unendlichekeit

  Nenne niemand dumm und säumig
  Der das Nächste recht bedenkt
  Ach, die Welt ist so geräumig—
  Und der Kopf ist so beschränkt Bender, *Deutsche Dichtung der Neuzeit*, Seite 298

- Ein Kinderlied von Wilhelm Hey 1837 Bayern, *Evangelisches Gesangbuch*, Nummer 511

[14] Hier ist eine Feinheit verborgen. Es können sich diesleben Muster durchaus wiederholen ohne dass tatsächlich das Muster periodisch ist. Man denke an Quasikristalle. Da gibt es sogar eindimensionale Quasikristalle. Wir haben also nicht nur die Alternative. Kristall–immer verschieden.

[15] Ist er für unsere Sünden gestorben?

Weißt du, wieviel Sternlein stehen
an dem blauen Himmelzelt?
Weißt du, wieviel Wolken gehen
weithin über alle Welt?
Gott der Herr hat sie gezählet,
dass ihm auch nicht eines fehlet
an der ganzen großen Zahl,
an der ganzen großen Zahl.

Weißt du, wieviel Mücklein spielen
in der heißen Sonnenglut,
wieviel Fischlein auch sich kühlen
in der hellen Wasserflut?
Gott der Herr rief sie mit Namen,
dass sie all ins Leben kamen,
dass sie nun so fröhlich sind,
dass sie nun so fröhlich sind.

Sterne sind sehr unordentlich über den Himmel verteilt. Daher schwer zu zählen.

- Georg Cantor (1887:

  „Unter einer endlichen [nichtleeren] Menge verstehen wir eine solche M, welche aus einem ursprünglichen Element durch sukzessive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, daß auch rückwärts aus M durch sukzessive Entfernung der Elemente in umgekehrter Ordnung das ursprüngliche Element gewonnen werden kann. Als durchaus wesentliches Merkmal endlicher Mengen muß es angesehen werden, daß eine solche keinem ihrer [echten] Bestandteile äquivalent ist. Denn eine aktual unendliche Menge ist immer so beschaffen, daß auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.“ Cantors endliche Mengen sind also den Stapeln der Informatik ähnlich, die durch schrittweises „push“ an Höhe gewinnen, aber auch durch schrittweises „pop“ wieder reduziert werden können. Ein Stapel unendlicher Höhe bestehend aus allen natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung ist ideell vorstellbar. Man kann ihn sich durch sukzessives „push“ aufgebaut denken, dagegen kann er durch „pop“ nicht mehr von oben abgebaut werden, weil er kein oberstes Objekt mehr besitzt. Zitiert nach Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, S. 94.

15. März 2017

Meiner Ansicht nach genügt das Kriterium, welches Cantor in seinem zweiten Teilsatz anspricht. Eine Menge ist endlich, wenn sie durch aufeinanderfolgendes wegnehmen jeweils eines Elementes ausgeschöpft werden kann. Passt sehr gut zu der Legende des Augustinus. Es ist das Endlichkeitskriterium von 2.81

- Hessenberg (1906) bemerkt zu dem „Beweis“ Dedekinds für die Existenz einer unendlichen Menge:

  > Einer der interessantesten Versuche, die Existenz transfiniter Mengen zu beweisen, ist der von Dedekind unternommene. Es sei a irgend ein Gegenstand des Denkens, so kann ich das Urteil fällen: a ist ein Gegenstand meines Denkens. Dieses Urteil (p(a) ist selbst ein Gegenstand des Denkens. Die Zuordnung (p zwischen a und cp(a) ist umkehrbar eindeutig [injektiv] und bildet die Menge aller Gedankendinge auf einen echten Teil ihrer selbst ab, da nicht jeder Gegenstand des Denkens die Form eines Urteils, daher a fortiori nicht die Form des speziellen Urteils cp(a) hat. Demnach ist die Menge aller Gedankendinge transfinit.

Moritz Schlick Moritz Schlick war einer der Gründer des Wiener Kreises. Viele Beiträge zur Ethik Naturphilosophie und Erkenntnistheorie schrieb er. Am 22. Juni 1936 wurde er von seinem ehemaligen Studenten Hans Nelböck ermordet. An einer Stelle schreibt er:

> Die Bedeutung eines Satzes feststellen heißt, die Regeln feststellen, gemäß derer der Satz gebraucht werden soll, und dies ist dasselbe, wie die Art und Weise festzustellen, auf die er verefiziert (oder falsifiziert) werden kann. Die Bedeutung einer Aussage ist die Methode ihrer Verifikation.

Dies ist zitiert nach Manfred, *Der Wiener Kreis*, Seite 113 Dies scheint mir falsch. Zunächst gibt es einmal Sätze, die man prinzipiell nicht verefizieren kann. Das sind alle Sätze, die etwas über unendliche Mengen aussagen. Was ist von dem Satz zu halten: Es gibt eine Menge A und eine injektive Funktion $\alpha\colon A \to A$ welche nicht surjektiv ist. Wer könnte den Satz verifizieren? Wie sieht eine Methode der Verifikation aus? Ein weiterer einfacher Satz ist: Es gibt unendlich viele Primzahlen. Wie sollte er verifiziert werden. Man kann einen Zusammenhang mit anderen Sätzen herstellen.
Letztlich wird man an die Existenz einer unendlichen Menge glauben müssen um den Satz akzeptieren zu können. Dabei sollte das „müssen“ vorsichtig verwendet werden. Man kann auch akzeptieren: Wenn es eine unendliche Menge gibt, dann ist auch die Menge der Primzahlen unendlich.

15. März 2017

Hinzu kommt: Für viele Sätze gibt es viele Möglichkeiten sie zu beweisen. Hat ein solcher Satz dann viele Bedeutungen? Kurz: Mir erscheint die Reduzierung der Bedeutung auf Syntax falsch.
Computerecke:

1. Das folgende Program berechnet die Fibonacci Zahlen. Es geht folgendermaßen vor. Es ist endrekursiv.
   - Die Funktion fib ist eine Funktion $fib : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Man übergibt dem Programm eine natürliche Zahl n. Diese gibt an, wie oft fib auf den Startvektor $\vec{a}$ angewendet werden soll.

     ```
     (defun fibon (n a)
      (defun fib(a)
      (list (nth 1 a) (+ (nth 0 a) (nth 1 a)))
     )
      (defun iter (i a)
             (if (>= i n) a
             (iter (1+ i) (fib a))
     )
     )
     (iter 0 a)
     )
     ```

     Es ergibt sich beispielsweise

     ```
      (fibon 10 (list 0 1))===> (55 89)
      (fibon 50 (list 0 1)) ===> (12586269025 20365011074)
     ```
   - Analog erhält man die nte Dreieckszahl

     ```
     (defun dreieck(n a)
     (defun dr(a)
       (list (1+ (nth 0 a))
             (+ (nth 0 a) (nth 1 a))
       )
     )
      (defun iter (i a)
            (if (>= i n) a
            (iter (1+ i) (dr a))
            )
     )
     (iter 0 a)
     )
     ```

     Es ergibt sich beispielsweise:

     ```
     (dreieck 10 (list 0 0)) ===>(10 45)
     ```

     Die 10te Dreieckszahl ist daher 45.

Aufgaben:

15. März 2017

20. Schreibe ein entsprechendes Programm zur Berechnung der Fakultät.
21. Schreibe ein entsprechendes Programm zur Berechnung der pyramidalen Zahlen.
22. Schreibe ein Programm, welches feststellt wann sich die Funktion fib aus obigem Beispiel auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ modulo 7 wiederholt. Untersuche andere Moduln.

2.9 Ketten mit bijektiver Strukturabbildung

Ich werde jetzt spezielle Ketten betrachten. Eine Forderung ist zunächst einmal, dass die Selbstabbildung $Q \xrightarrow{\alpha} Q$ surjektiv ist.

Ketten mit surjektiver Strukturabbildung

Lemma 1 *Sei $U \hookrightarrow A$ und $U \xrightarrow{f} Q$ ein Morphismus. Ist die Strukturabbildung $Q \xrightarrow{\gamma} Q$ surjektiv, so gibt es ein $\alpha^{-1}(U) \xrightarrow{f'} Q$ mit $f' \circ \iota = f$. Sind f und γ injektiv, so ist auch f' injektiv.* □

Ist $\alpha^{-1}(U) = U$ ist man fertig. Andernfalls ist $\alpha^{-1}(U) \setminus U \neq \emptyset$. Da γ surjektiv ist, gibt es zu jedem $a \in \alpha^{-1}(U) \setminus U$ ein $q_a \in Q$ mit $f(\alpha(q_a)) = \gamma(q_a)$. Ich erkläre:

$$f' \colon \ni a \mapsto \begin{cases} f(a) \text{ falls } a \in U \\ q_a \text{ falls } a \notin U \end{cases}$$

f' ist ein Morphismus. Denn ei $a \in U$. Dann ist $f'(\alpha(a)) = f(\alpha(a)) = \gamma(f(a)) = \gamma(f'(a))$
Ist $a \notin U$. Dann ist $f'(\alpha(a)) = \gamma(q_a) = \gamma(f'(a))$. Also ist f' ein Morphismus.□

Beispiele:

16. Die Kette $\ldots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$

Lemma 2 *Sei $U \hookrightarrow A$ eine Unterkette von (A, α) Es gibt eine kleinste Unterkette $\overline{U}$ von A, die U enthält und abgeschlossen gegenüber der Relation α^{-1} ist.* □

Sei

$$U_n := \{a | a \in A \text{ und } \alpha^n(a) \in U\}$$

Dann ist $U_n \hookrightarrow U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\overline{U} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

$\overline{U}$ ist abgeschlossen gegenüber α^{-1}. Denn sei $b \in \alpha^{-1}(\overline{U})$. Also ist $\alpha(b) \in \overline{U}$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n(\alpha(b)) \in U$. Daher ist $\alpha^{n+1}(b) \in U$. Also ist $b \in \overline{U}$. Ist V eine Unterkette von A, die gegenüber α^{-1} abgeschlossen ist und U enthält, so ist $U_1 \hookrightarrow V$ und allgemein $U_n \hookrightarrow V$. Also ist $\overline{U} \hookrightarrow V$. Daher ist $\overline{U}$ die kleinste gegenüber α^{-1} abgeschlossene Kette, die U enthält. □

Satz 2.88. *Es sei (Q, α) eine Kette mit injektivem α. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *α ist bijektiv.*
2. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $q \in Q$ gibt es genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{f} Q$ mit $f(n) = q$.*
3. *Zu jeder Unterkette $A \hookrightarrow \mathbb{N}$ und jedem Morphismus $A \xrightarrow{f} Q$ gibt es ein $\mathbb{N} \xrightarrow{f^*} Q$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[dl, "f^*"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

1. $\Longrightarrow$2.: Sei $q \in Q$. Nach dem Rekursionssatz gibt es ein genau einen Morphismus $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ mit $f(0) = q$. Sei

$$T = \{n | n \in \mathbb{N};\ \text{für alle } q \in Q \text{ gibt es gibt genau ein } f \text{ mit } f(n) = q\}$$

Es ist $0 \in T$ und T ist gegenüber der Nachfolgefunktion $\mathbb{N} \xrightarrow{1+} \mathbb{N}$ abgeschlossen. Denn sei $t \in T$ und $q \in Q$ beliebig. Zu $\alpha^{-1}(q) \in Q$ gibt es genau ein $\mathbb{N} \xrightarrow{f} Q$ mit $f(t) = \alpha^{-1}(q)$. Es folgt $q = \alpha(f(t)) = f(1+t)$.
Ist $h(1+t) = f(1+t) = q$, so ist $\alpha h(t) = \alpha f(t) = q$ und daher ist $h(t) = f(t) = \alpha^{-1}(q)$. Daher ist $h = f$.
2. $\Longrightarrow$3.: Da A Unterkette von $\mathbb{N}$ ist, ist A von seinem kleinsten a Element erzeugt. Wegen Teil 2. gibt es ein $\mathbb{N} \xrightarrow{f^*} Q$ mit $f^*(a) = f(a)$. Daher ist $f^*\iota = f$.
3. $\Longrightarrow$1.: Es ist $[1+0] = [1]$ eine freie Kette. Ist $q \in Q$ so gibt es ein $f : [1] \to Q$ mit $f(1) = q$. Es gibt ein $f^* : \mathbb{N} \to Q$ mit $f^*(1+0) = f(1) = q = \alpha(f^*(0))$. Daher ist $q \in Bi(\alpha)$ und es ist α bijektiv. □

Die Klasse der Ketten mit bijektiver Selbstabbildung bilden wieder eine Kategorie. Ich werde sie mit $\mathcal{S}^{\downarrow\uparrow}$ bezeichnen.

Die ganzen Zahlen: Im folgenden konstruieren wir die Menge der ganzen Zahlen. Dazu lassen wir uns von der folgenden Vorstellung leiten. Um das Vermögen einer Person zu beschreiben sind eigentlich zwei Zahlen notwendig sein Guthaben und seine Schulden. Tatsächlich hat einer ein Guthaben oder Schulden. Verschaffen uns zwei Kopien von $(\mathbb{N}, 1+)$. $\mathbb{N}^- := \{(0,n) | 0 \neq n\}$ und $\mathbb{N}^+ := \{(n,0) | n \in \mathbb{N}\}$ und setzten

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}^- \cup \mathbb{N}^+ \tag{2.8}$$

Auf $\mathbb{Z}$ muss noch die Strukturabbildung erklärt werden. Dazu bedienen wir uns der Vorstellung, dass in $\mathbb{N}^-$ die Pfeile umgedreht werden müssen.

$$\alpha : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} (0, n-1) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^- \\ (n+1, 0) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\cdots\cdots\to (0,3) \xrightarrow{\alpha} (0,2) \xrightarrow{\alpha} (0,1) \longrightarrow (0,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (2,0)$$

Es gilt:

Satz 2.89. *Die Abbildung $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist bijektiv.*

Zunächst ist α injektiv. Sei $\alpha(z_1) = \alpha(z_2)$. Sind z_1, z_2 beide aus $\mathbb{N}^-$, so ist $z_1 = (0, n_1)$ und $z_2 = (0, n_2)$ mit $n_1 \geq 1$ und $n_2 \geq 1$. Daher ist $\alpha(z_1) = (0, n_1 - 1) = \alpha(z_2) = (0, n_2 - 1)$ und daher $z_1 = z_2$. Ist $z_1 = (0, n_1) \in \mathbb{N}^-$ und $z_2 = (n_2, 0) \in \mathbb{N}^+$, so ist auf jeden Fall $\alpha(z_1) = (0, n_1 - 1) \neq (n_{2+1}, 0) = \alpha(z_2)$. Sind z_1, z_2 beide aus $\mathbb{N}^+$ so muss $z_1 = z_2$ sein.
Bleibt zu zeigen, dass α surjektiv ist. Ist $z = (0, n) \in \mathbb{N}^-$ so ist $z = \alpha((0, n+1))$. Ist $z = (n, 0)$ mit $n \geq 1$, so ist $z = \alpha((n-1), 0)$, Ist $z = (0, 0)$, so ist $z = (\alpha(0, 1))$. Also ist α surjektiv. □

Satz 2.90. *Ist $\emptyset \neq U \subset \mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber α und α^{-1}, so ist $U = \mathbb{Z}$.*

1. Fall: $(0, 0) \in \mathbb{Z}$. Da U abgeschlossen gegenüber α ist, ist $\mathbb{N}^+ \subset U$. Genauso ist, da U abgeschlossen gegenüber α^{-1} ist $\mathbb{N}^- \subset U$. Also ist $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \mathbb{N}^+ \subset U$.
2. Fall: Ist $(0, 0) \notin U$, so ist $(0, 0) \in \mathbb{Z} \backslash U$. Diese Menge kann nicht abgeschlossen gegenüber α und α^{-1} sein, sonst wäre sie gleich $\mathbb{Z}$. Dies widerspräche $U \neq \emptyset$. Also gibt es ein $c \in \mathbb{Z} \setminus U$ mit $\alpha(c)$ oder $\alpha^{-1}(c) \in U$. Ist $\alpha(c) \in U$, so ist auch $c = \alpha^{-1}(\alpha(c)) \in U$. Das widerspricht $c \notin U$. Ist $\alpha^{-1} \in U$, so ist $c = \alpha(\alpha^{-1}(c)) \in U$. Dies widerspricht wieder $c \notin U$. □

Wir werden die Strukturabbildung von $\mathbb{Z}$ auch mit $1+$ bezeichnen.

Satz 2.91. *Sei (B, β) eine Kette mit bijektivem β. Zu jedem $b \in B$ gibt es genau einen Morphismus $f : \mathbb{Z} \to Q$ mit $f(0) = b$.*[16]

$\mathbb{N}^- \cup \{(0,0)\}$ ist eine Kette mit dem freien Erzeugenden $(0,0)$ und der Abbildung $\alpha^{-1} : \mathbb{N}^- \cup \{(0,0)\} \ni (0,n) \mapsto (0,n+1) \in \mathbb{N}^- \cup \{(0,0)\}$.
Und $\mathbb{N}^+$ ist auch eine freie einstellige Algebra mit der Basis $\{(0,0)\}$ und der Abbildung $\alpha : \mathbb{N}^+ \ni (n,0) \mapsto (n+1,0) \in \mathbb{N}^+$. Es gibt daher einen Morphismus $f_1 : (\mathbb{N}^- \cup \{(0,0)\}) \to (B, \beta^{-1})$ mit $f_1((0,0)) = b$. Genauso gibt es einen Morphismus $f_2 : (\mathbb{N}^+, \alpha) \to (B, \beta)$ mit $f_2((0,0)) = b$.
Beh.: Die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} f_1(z) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^- \\ f_2(z) \text{ falls } z \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

der die gewünschte Bedingung erfüllt. □

Bew.: Sei $z \in \mathbb{N}^-$. Dann ist $z = (0,n)$ mit $n \geq 1$ und $\alpha(z) = (0, n-1) \in \mathbb{N}^- \cup \{(0,0)\}$. $z = (0,n) = (0, n-1+1) = \alpha^{-1}((0,n-1))$. Daher ist

$$f(z) = f_1(\alpha^{-1}(0,n-1)) = \beta^{-1}(f_1(0,n-1)) = \beta^{-1}(f(\alpha(z))).$$

Daher ist
$f(\alpha(z)) = \beta(f(z))$.
Ist $z \in \mathbb{N}^+$, so ist $z = (n,0)$ und es ist $f(\alpha(z)) = f((n+1),0) = f_2(\alpha(z)) = \beta(f(z))$. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.
Sei $g : \mathbb{Z} \to B$ eine weiterer solcher Morphismus mit $g((0,0)) = b$. Dann ist die Einschränkung von g auf $\mathbb{N}^+$ gleich f_2 und da g auch ein Morphismus bezüglich α^{-1} ist, ist $g/\mathbb{N}^-$ gleich f_1. Also ist $g = f$.
In Zukunft werden wir die Elemente der Form $(0,n) n \in \mathbb{N}$ mit $-n$ bezeichnen und die Elemente der Form $(n,0)$ einfach mit n.

Folgerung 2.92. *Ist (B, β) eine Kette mit bijektivem β und gibt es zu jeder Kette (C, γ) mit bijektivem γ und jedem $b \in B$ und jedem $c \in C$ genau einen Morphismus $f : B \to C$ mit $f(b) = c$, so ist $\mathbb{Z} \cong B$.*

Es gibt genau ein $g : \mathbb{Z} \to B$ mit $g(0) = b$. Genauso gibt es genau ein $h : B \to \mathbb{Z}$ mit $h(b) = 0$. Andererseits ist $gh = Id_B$ der einzige Morphismus mit $Id(b) = b$. Daher ist $gh = Id_B$. Genauso folgt $hg = Id_{\mathbb{Z}}$. Damit folgt die Behauptung. □

[16] Es gilt wahrscheinlich auch die Umkehrung

Ich betrachte nun eine beliebige einstelligen Algebra (A, α) mit bijektiver Strukturabbildung. Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen Morphismus $\Phi(a) : \mathbb{Z} \to A$ mit $\Phi(a)(0) = a$ wegen Folgerung 2.92 Es gilt:

Satz 2.93. *Die Abbildung* $\Phi : A \ni a \mapsto \Phi(a) \in [\mathbb{Z}, A]$ *ist bijektiv und hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $\Phi(\alpha(a)) = \alpha \circ \Phi(a)$. *($\Phi$ ist ein Morphismus.)*
2. $\Phi(a)(1 + z) = \alpha(\Phi(a)(z))$

Die Umkehrabbildung von Φ ist die Auswertungsabbildung:

$$\Psi : [\mathbb{Z}, A] \ni f \mapsto f(0) \in A \tag{2.10}$$

Denn sei $a \in A$, so ist $\Psi(\Phi(a)) = \Phi(a)(0) = a$. Ist umgekehrt $f \in [\mathbb{Z}, A]$, so gibt es zu $\Psi(f) = f(0)$ genau einen Morphismus $\Phi(f(0))$ mit $\Phi(f(0))(0) = f(0)$. Dies ist der Morphismus f. Daher ist $\Phi \circ \Psi(f) = f$. Also ist Φ invertierbar. Zu 1. $\Phi(\alpha(a))(0) = \alpha(a) = \alpha \circ (\Phi(a)(0)) = (\alpha \circ \Phi(a))(0)$. Also ist $\Phi(\alpha(a)) = \alpha \circ \Phi(a)$. Zu 2. Gilt da $\Phi(a)$ ein Homomorphismus ist.

Folgerung 2.94. *Alle Morphismen* $(\mathbb{Z}, 1+) \to (\mathbb{Z}, 1+)$ *sind bijektiv.*

Da die Abbildung Φ bijektiv ist, muss nur gezeigt werden, dass alle Morphismen $\Phi(a), a \in \mathbb{Z}$ bijetiv sind. Es ist $\Phi(0)$ die Identität auf $\mathbb{Z}$. Sei

$$T = \{a | a \in \mathbb{Z} \Phi(a) \text{ ist bijektiv } \} \tag{2.11}$$

Sei $a \in T$. Also ist $\Phi(a)$ bijektiv. Damit $\Phi(1 + a) = (1+) \circ \Phi(a)$, wegen 2.93 $1+$ ist aber eine bijektive Abbildung auf $\mathbb{Z}$. Damit ist auch $\Phi(1 + a)$ bijektiv. Genau dasselbe folgt mit $1-$. Es folgt $T = \mathbb{Z}$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Es ist daher $\mathbb{Z}$ bezogen auf die Morphismenmenge endlich und koendlich. Jeder Morphismus ist schon bijektiv erst recht die injektiven Morphismen. Der bessere Begriff wäre sicher monoendlich und epiendlich.

Satz 2.95. *Die Abbildung*

$$p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto \Phi(a)(b) \in \mathbb{Z} \tag{2.12}$$

macht aus $\mathbb{Z}$ eine kommutative Gruppe.

Die Abbildung ist assoziativ: p ist in beiden Argumenten ein Morphismus. Für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $p(p(a,b),-) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der Morphismus mit $p(p(a,b),0) = p(a,b)$. Außerdem ist $p(a, p(b,-))$ auch ein solcher Morphismus mit $p(a, p(b,0)) = p(a,b)$. Also sind die beiden Morphismen gleich.
Das Inverse: Es ist jeder Morphismus $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bijektiv. Also ist für beliebiges $a \in \mathbb{Z}$ der Morphismus $\Phi(a)$ bijektiv. Daher gibt es zu beliebigem $a \in \mathbb{Z}$ ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $0 = \Phi(a)(b)$. Dieses $b \in \mathbb{Z}$ ist auch eindeutig bestimmt. 0 ist das Neutralelement.
Kommutativität: Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist $\Phi(a)(0) = \Phi(0)(a)$. $\Phi(0)$ ist die Identität. Sei

$$T = \{b | \Phi(a)(b) = \Phi(b)(a)\} \tag{2.13}$$

T ist genüber 1+ und der inversen Abbildung abgeschlossen. Daher folgt die Kommutativität. □

2.10 Der Satz von Schroeder Bernstein

Nochmal ein anderer Beweis. (Nicht so schön)

Bemerkung 9 Für eine Funktion $f : M \to M$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $f$ist injektiv.
2. Für jede nichtleere Familie $(A_i | i \in I)$ von Teilmengen von M gilt: $f(\bigcap A_i) = \bigcap f(A_i)$ □

Sei f injektiv. Sei $y \in f(\bigcap A_i)$. Dann gibt es ein $x \in \bigcap A_i$ mit $y = f(x)$. Es ist x in jedem A_i. Also ist $f(x)$ in jedem $f(A_i)$. Das heißt $f(x) \in \bigcap f(A_i)$. Daher enthält $\bigcap f(A_i)$ die Menge $f(\bigcap A_i)$. Bei dieser Überlegung wurde nicht benutzt, dass f injektiv ist.
Sei umgekehrt $y \in \bigcap f(A_i)$. Daher ist $y \in f(A_i)$ für jedes $i \in I$. Es gibt also $a_i \in A_i$ mit $y = f(a_i)$. Da f injektiv ist sind alle a_i etwa gleich a. Also ist $a \in \bigcap A_i$ und $y = f(a)$. Also ist $a \in f(\bigcap A_i)$. Insgesamt ist also $\bigcap f(A_i) = f(\bigcap A_i)$.
Es gelte umgekehrt die Durchschnittseigenschaft. Es sei $f(a) = f(b)$. Dann ist $f(\{a\} \cap f(\{b\})) = f(\{a\} \cap \{b\})$. Insbesondere ist $\{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$. Das heißt es ist $a = b$. □

Bemerkung 10 $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$ gilt für jede Funktion $f : M \to N$. □

Sei $y \in f(\bigcup A_i)$. Das heißt, es gibt ein $a_i \in A_i$ mit $y = f(a_i)$. Also $y \in f(A_i)$ und daher $y \in \bigcup f(A_i)$. Sei $y \in \bigcup f(A_i)$. Dann ist $y \in f(A_i)$ für ein $i \in I$. Daher ist $y \in f(\bigcup A_i)$. Daraus ergibt sich die Behauptung □

Lemma 1 *Sei $F : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$ eine Abbildung mit $F(\bigcap A_i) = \bigcap F(A_i)$ für jede Familie $(A_i | i \in I)$ und $A_i \subset M$. Dann hat F einen Fixpunkt.* □

Wir betrachten die Folge

$$M \supset F(M) \supset F^2(M) \ldots$$

Sei $A = \bigcap\limits_{n \geq 0} F^n(M)$. Dann ist $F(A) = \bigcap\limits_{n \geq 0} F^{n+1}(M) = \bigcap\limits_{n \geq 1} F^n(M) = A$. Also ist A ein Fixpunkt. □

Satz 2.96 (Bernstein). [17] *Wenn die Menge M injektiv in die Menge N und N injektiv in die Menge M abgebildet werden kann, so gibt es eine Bijektion von M nach N.*

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ die vorausgesetzten Injektionen. Wir betrachten die Abbildung $F(A) = M \setminus g(N \setminus f(A))$, $F : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$.

Ist $g(N \setminus f(A)) = M \setminus A$, dann ist $F(A) = M \setminus (M \setminus A) = A$. Also ist A ein Fixpunkt von F. Gibt es einen solchen Fixpunkt, so kann man leicht eine bijektive Abbildung finden. Und zwar

$$h(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in A \\ n \text{ falls } x = g(n) \text{ für ein } n \in N \setminus f(A) \end{cases}$$

Diese Abbildung ist sicher injektiv. Denn sei $y \in f(A)$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $y = f(x)$. Ein weiteres $x' \in A$ kann es nicht geben, da f injektiv ist. Höchstens gibt es ein $x' \in M \setminus A$ mit $h(x') = y$. Da aber $x' \in M \setminus A = g(N \setminus f(A))$ ist, ist $h(x') = n = y \in f(A)$. Dies geht nicht weil $n \in N \setminus f(A)$.

[17] Dieser Satz wurde zuerst von Dedekind bewiesen

h ist sicher auch surjektiv. Denn ist $b \in f(A)$, so endet bei b auf jeden Fall ein Pfeil. Andernfalls ist $b \in N \setminus f(A)$. Dann ist aber $b = h(g(b))$ und also in der Bildmenge von h.
Wir zeigen nun, dass F die Voraussetzungen des Hilfsatzes 1 erfüllt. Sei dazu $(A_i | i \in I)$ eine Familie von Untermengen von M. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
F(\bigcap A_i) &= M \setminus g(N \setminus f(\bigcap A_i)) \\
&= M \setminus g(N \setminus \bigcap f(A_i)) \text{ wegen 9} \\
&= M \setminus g(\bigcup (N \setminus f(A_i))) \text{ de Morgan} \\
&= M \setminus \bigcup g(N \setminus f(A_i)) \\
&= \bigcup (M \setminus g(N \setminus f(A_i))) \\
&= \bigcap F(A_i)
\end{aligned}$$

Also ist die Behauptung bewiesen. □

3 Magmen

3.1 Definition Beispiele

Wenige Begriffe in der Mathematik sind elementarer als die Verknüfung. Die Addition zweier Zahlen ergibt ihre Summe. Die Multiplikation ihr Produkt. Untrennbar sind die ersten Wurzeln des Rechnens mit natürlichen Zahlen und das Messen von Größen mit den Gestzen der Verknüpfung verbunden. Die ältesten uns überlieferten Dokumente aus der Mathematik der Ägypter und Babylonier belegen: Sie hatten schon ein vollständig ausgebildetes System des Rechnens mit natürlichen Zahlen > 0, mit rationalen Zahlen > 0 mit Längen und Flächen. Obwohl sich die erhaltenen Texte nur mit expliziten Zahlen befassen, lassen sie keinen Zweifel daran zu, dass sie die volle Allgemeinheit der benutzten Regeln kannten. Geschickt manipulierten sie Gleichungen ersten und zweiten Grades. Wir wollen den Begriff der Verknüpfung allgemein fassen. Mit vielen menschlichen Tätigkeiten ist es so. Lange können wir schon laufen bevor wir uns Gedanken darüber machen, wie schwierig es ist, auf zwei Beinen das Gleichgewicht zu halten. Oder Kinder lernen singen bevor sie die zugehörige Harmonielehre kennen lernen.
Aber wieder befreien wir uns von den uns gut bekannten Verknüpfungen „+“ und „·“. Dadurch gewinnen wir wieder eine große Freiheit.

Definition 35. Sei A eine Menge und α eine Abbildung $\alpha : A \times A \to A$. Das Paar (A, α) heißt dann Magma oder Gruppoid oder auch Verknüpfungsgebilde.

Beispiele:

17. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ sind Magmen. Dasselbe gilt für $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$,$(\mathbb{Z}, -)$.
18. Ist X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge, so ist $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \ni (A, B) \mapsto A \cup B$ eine Verknüpfung. Entsprechendes gilt für den Durchschnitt.
19. Ist $(A_i|\alpha_i)$ eine Familie von Magmen, so wird

$$\prod_{i \in I} A_i \ni ((a_i), (b_i)) \mapsto (\alpha_i(a_i, b_i)) \in \prod_{i \in I} A_i$$

zu einem Magma. Sind alle $A_i = A$, so erhält man das Magma A^I.

20. Es sei $A = \{0, 1\}$. Die Verknüpfung sei durch die folgende Tafel gegeben:

|	0	1
0	1	1
1	1	0

In dieser Verknüpfung heißt das Verknüpfungszeichen | Schefferscher Strich. Sie wird oft mit `nand` bezeichnet.

```
  (defun nand(a b)
   (if (and (= 1 a) (= 1 b)) 0
       1))
(nand  (nand 0 0) 0) 1
(nand (nand 0 1) 1) 0
(nand (nand 1 0))
(nand  1 (nand 1 1)) 1
(nand 0 0) 1
(nand 1 1) 0
(nand (nand 0))
```

Wir werden bald sehen: Aus ihr kann man sämtliche zweistelligen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zusammenbauen. So ist zum Beispiel:

```
(defun und(a b)
 (nand (nand a b) (nand a b))
)
(und 0 0) 0
```

Aufgaben:

23. Konstruiere mit `nand` die oder Funktion.

```
      (defun nota (a)
       (nand a a)
      )
(nota 0) ==> 1
     (defun oder (a b)
      (nota (und (nota a) (nota b)))
     )
```

Geht das Einfacher?

3.2 Freies Magma

Definition 12 Ein Magma $(F, \circ)$ heißt frei, mit Basis $X \subset M$, wenn es zu jedem Magma $(B, \circ)$ und jeder Abbildung $X \xrightarrow{f} B$ genau einen Morphismus

$F \xrightarrow{f^*} B$ gibt mit $f^*(x) = x$ für alle $x \in X$. Das heißt folgendes Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "f^*"] \\ B & \end{tikzcd}$$

□

Satz 3.1. *Zu jeder Menge X gibt es ein freies Magma $F(X)$ mit Basis X. Dieses freie Magma ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

3.3 Mehrstellige Funktionsalgebren

Definition 36. Das Paar (A, α) heißt n–stellige Funktionsalgebra, wenn A eine Menge und $\alpha : A^n \to A$ eine Funktion ist. $U \subset A$ heißt gegenüber α abgeschlossen, wenn $\alpha(U^n) \subset U$ ist.

Bemerkung 11 Der Durchschnitt von Mengen, die gegenüber α abgeschlossen sind, ist gegenüber α abgeschlossen. □

Sei $(U_i | i \in I)$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen. und $\vec{u} \in (\bigcap_{i \in I} U_i)^n$. Da jedes U_i abgeschlossen ist ist $\alpha(\vec{u}) \in U_i$ für alle i. Daher ist $\alpha(\vec{u}) \in \bigcap_{i \in I} U_i$.□

Es gibt zu jeder Teilmenge $E \subset A$ eine kleinste Obermenge, welche abgeschlossen gegenüber α ist. Sie heißt die von E erzeugte Unteralgebra. Ich bezeichne sie mit $[E]$. Ein Beispiel, welches für das weitere interessant ist liefert der folgende Satz:

Satz 3.2. *Die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto \frac{a+b+1}{2} \cdot (a + b) + b \in \mathbb{N}$ ist bijektiv.*

Ich sollte zunächst sagen, wie ich auf diese Funktion gekommen bin. Betrachten wir dazu das folgende Gitternetz. Auf jeder Diagonalen ist die Summe der Koordinaten konstant. Und zwar bei der 0ten Diagonale 0 bei der 1ten 1 und bei der 10ten 10. Auf der $n$ten Diagonalen sind $n + 1$ Punkte.

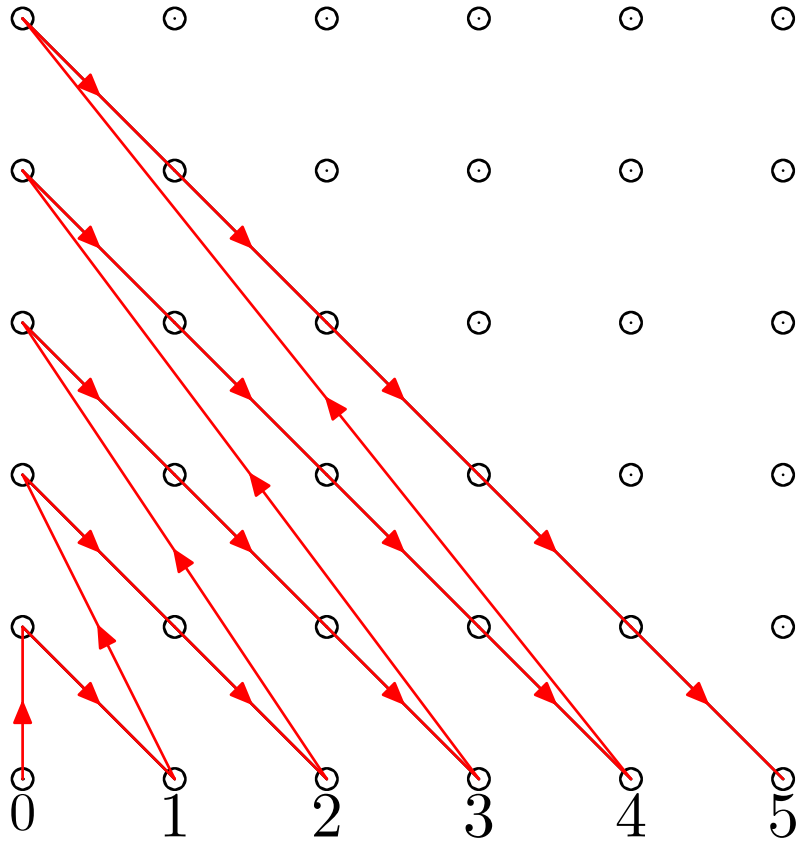


Abb. 3.1: Gitter

f ist injektiv: Sei $f(a,b) = f(a',b')$.

1.Fall $a+b = a'+b'$. Aus der Definition der Funktion folgt: $b = b'$ und daher ist $a = a'$. Also folgt die Behauptung.

2. Fall $a+b' < a+b$:. Dann ist $a'+b'+1 \leq a+b$ und $a'+b' \leq a+b-1$. Natürlich ist $b' \leq a'+b' < a+b$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f(a',b') &= \frac{a'+b'+1}{2} \cdot (a'+b') + b' \\ &< \frac{a+b}{2} \cdot (a+b-1) + a + b \end{aligned}$$

Nun gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2}(a+b-1)+(a+b) &\leq \frac{a+b+1}{2}(a+b)+b \\
&= f(a,b) \\
\frac{a+b}{2}(a+b-1)+a &\leq \frac{a+b+1}{2}\cdot(a+b) \\
\frac{a+b+1}{2}\cdot(a+b)-\frac{a+b}{2}\cdot(a+b-1)-a &\geq 0 \\
\frac{a+b}{2}\cdot(a+b+1-a-b+1)-a &\geq 0 \\
0 &\leq a+b-a
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion injektiv. Bleibt zu zeigen, dass sie surjektiv ist. Es ist daher zu zeigen: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $f(a,b) = n$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine größte Dreieckszahl $d(m)$, mit $m \leq n$. Für die nächste Dreieckszahl gilt: $d(m+1)-d(m) = \frac{m+2}{2}\cdot(m+1)-\frac{m+1}{2}\cdot m = m+1$. Also lässt sich n schreiben: $n = d(m) + b$ mit $b \leq m$. Sei $a = d(m) - b$ Also $a + b = m$ und $n = d(a,b) + b = f(a,b) = n$. Also ist die Abbildung surjektiv. □

Mit diesen Verknüpfungen wird $\mathbb{N}$ zu einem Magma. Beh: Das Magma $\mathbb{N}$ wird bezüglich dieser Verknüpfung von 0 und 1 erzeugt.
Der Satz kann stark verallgemeinert werden. Dazu:

Satz 3.3. *Sei (A, α) eine freie einstellige Algebra mit Basis E. Dann ist $(A \times A, \beta)$ eine einstellige Algebra mit Basis $E \times E$. Dabei ist*

$$\beta : A \times A \ni (a,b) \mapsto \begin{cases} (b, \alpha(a)) & \textit{falls } b \in E \\ (\alpha(a), \alpha^{-1}(b)) & \textit{falls } b \notin E \end{cases}$$

β ist sicher wohldefiniert und β ist injektiv. □

Es fehlt der Rekursionssatz für freie Magmen.

4 Relationen und Graphen

4.0.1 Definition und Beispiele

Definition 37. Ist A eine Menge, so heißt jede Korrespondenz $\alpha \subset A \times A$ Relation von A nach A. Ein anderer Name ist gerichteter Graph. Das Paar (A, α) heißt auch einstellige Relationsalgebra. Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt abgeschlossen gegenüber der Relation α genau dann, wenn $\alpha \circ U \subset U$ ist.

Satz 4.1. *Sei U eine Teilmenge der einstelligen Relationsalgebra (A, α).*

1. *Ist U gegenüber α abgeschlossen, so ist $\alpha \circ U$ abgeschlossen.*
2. *Der Durchschnitt α–abgeschlosssener Mengen ist abgeschlossen.*

Zu 1.: Es ist $\alpha \circ U \subset U$. Daher ist $\alpha \circ (\alpha \circ U) \subset \alpha \circ U$. Das wurde behauptet. Zu 2.: Sei $(U_i | i \in I)$ eine Familie von α–abgeschlossenen Teilmengen von A. Dann ist $\alpha \circ U_i \subset U_i$ für alle $i \in I$. Damit ist $\alpha \circ (\bigcap_{i \in I} U_i) \subset \bigcap_{i \in I} \alpha \circ U_i \subset \bigcap_{i \in I} U_i t \square$

Satz 4.2. *Enthält die einstellige Relationsalgebra (A, α) eine Teilmenge U, so gibt es eine kleinste α–abgeschlossenen Teilmenge, die U enthält.*

A selber ist abgeschlossen gegenüber α. Also gibt es eine gegenüber α abgeschlossenen Menge, die U enthält. Dann ist

$$\bigcap \{V | U \subset V \text{ und } V \alpha\text{–abgeschlossen}\}$$

die kleinste solche Menge.

Definition 38. Sei $U \subset A$. Die kleinste Teilmenge, welche U enthält und gegenüber α abgeschlossen ist, wird von U erzeugte Relationsunteralgebra genannt. Ich bezeichne sie mit $[U]$

Man kann sich $[U]$ von unten konstruktiv nähern. Dazu definiert man induktiv: $\alpha^0 \circ U := U$ und $\alpha^{n+1} \circ U := \alpha \circ (\alpha^n \circ U)$

Satz 4.3. *Es ist* $[U] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha^i \circ U =: D$.

Die rechte Seite der Gleichung ist gegenüber α abgeschlossen. $\alpha^n \circ U$ ist die Menge der Punkte, die durch α von U aus erreichbar sind. Es sei $a \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha^i \circ U$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \in \alpha^n \circ U$. Ist $b \in A$ mit $(a, b) \in \alpha$, so ist $b \in \alpha^{n+1} \circ U \subset D$. Also enthält D die Menge $[U]$. Umgekehrt ist $\alpha^n \circ U \subset [U]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $D \subset [U]$. □

Satz 4.4. *Für jede Teilmenge $U \subset A$ gilt $\alpha \circ [U] = [\alpha \circ U]$*

Es ist sicher $\alpha \circ [U]$ als Bild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Also enthält $\alpha \circ [U]$ die Menge $[\alpha \circ U]$. Es ist $\alpha \circ U \subset [\alpha \circ U]$. Durch Induktion zeige ich, dass $\alpha \circ [U] \subset [\alpha \circ U]$ ist. Sei

$$T = \{c | c \in [U] \text{ und } \alpha \circ \{c\} \subset [\alpha \circ U]\}.$$

Sicherlich ist $U \subset T$. Sei $c \in T$. Das bedeutet $\alpha \circ \{c\} \subset [\alpha \circ U]$. Da $[\alpha \circ U]$ gegenüber α abgeschlossen ist, ist $\alpha \circ (\alpha \circ \{c\}) \subset [\alpha \circ U]$. Das hinwiedreum bedeutet $\alpha \circ \{c\} \subset T$. Die Menge T ist also gegenüber α abgeschlossen. Das heißt $T = [U]$. Damit folgt die Behauptung. □

Satz 4.5. *Sei $\alpha : A \to A$ eine injektive Relation. Für $a, b \in A$ gilt: $[a] \subset [b]$ oder $[b] \subset [a]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$*

Seien $a, b \in A$, $[a] \not\subset [b]$ und $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Insbesondere ist $a \notin [b]$, da sonst $[a] \subset [b]$. Wäre $[a] \setminus [b]$ abgeschlossen gegenüber α so wäre $[a] \cap [b] = \emptyset$. Daher gibt es ein $x \in [a]$ aber $x \notin [b]$. (Diese x liegt gewissermaßen an der Grenze.) Daher gibt es ein $c \in A$ mit $(x, c) \in [b]$. (Von einem $x \in [a]$ weist ein Pfeil nach $[b]$) Ist $c = b$, so ist $[b] \subset [a]$ und wir sind fertig. Andernfalls ist wegen Satz 4.3 $c \in \alpha \circ [b]$. Es gibt daher ein $y \in [b]$ mit $(y, c) \in \alpha$. Es war $(x, c) \in \alpha$. Daher ist $x = c$. Das widerspricht $x \notin [b]$. □

4.0.2 Transitive Relationen

Satz 4.6. *Für eine Relation $r \subset A \times A$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1. *$r \circ r \subset r$.*
2. *Für alle $a, b, c \in A$ gilt: Ist $(a, b) \in r$ und $(b, c) \in r$, so ist $(a, c) \in r$.*
3. *Die Abbildung $\Phi(r) : A \ni a \mapsto [a] = \{x | (a, x) \in r\} \in \mathfrak{P}(A)$ hat die folgende Eigenschaft: Für alle $a \in A$ und alle $b \in \Phi(r)(a)$ ist $\Phi(r)(b) \subset \Phi(r)(a)$.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $r \circ r \subset r$, $(a,b) \in r$ und $(b,c) \in r$. Dann ist $(a,c) \in r \circ r \subset r$. Daher ist $(a,c) \in r$.
2. $\Longrightarrow$3. Sei $a \in A$ und $b \in \Phi(r)(a)$. Das heisst $(a,b) \in r$. Ist $y \in \Phi(r)(b)$, so ist $(b,y) \in r$. Daher ist $(a,y) \in r$. Dies heißt $y \in \Phi(r)(a)$. Also ist $\Phi(r)(b) \subset \Phi(r)(a)$.
3. $\Longrightarrow$1. Sei $(a,c) \in r \circ r$. Zu zeigen ist, dass $(a,c) \in r$ ist. Es gibt ein $b \in A$ mit $(a,b) \in r$ und $(b,c) \in r$. Daher ist $b \in \Phi(r)(a)$ und $c \in \Phi(r)(b) \subset \Phi(r)(a)$. Also ist $(a,c) \in r$. □

Definition 39. Eine Relation $r \subset A \times A$ heißt transitiv, wenn $r \circ r \subset r$ ist.

Satz 4.7. *Ist $r \subset A \times A$ eine Relation, so gibt es eine kleinste Relation $TH(r)$, die r enthält und die transitiv ist. Diese Relation $TH(r)$ heißt transitive Hülle von r.*

Es muss nur gezeigt werden: Der Durchschnitt transitiver Relationen ist transitiv. Dies ist einfach. □

Satz 4.8. *Sei (A,α) eine einstellige Relationsalgebra und r die transitiv reflexive Hülle von α. Ist $E \subset A$, so ist $[E] = r \circ E$*

Die reflexiv transitive Hülle von α ist $r = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha^i$. Sei $c \in r \circ E$, so gibt es $e \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $(e,c) \in \alpha^n$. Dann ist $c \in [E]$. Also ist $r \circ E \subset [E]$. Andererseits ist $\alpha \circ (r \circ E) = (\alpha \circ r) \circ E \subset r \circ E$. Also ist $r \circ E$ gegenüber α abgeschlossen und $E \subset r \circ E$. Es folgt die Behauptung. Insbesondere ist auch $[E] = r \circ [E]$. Denn es ist $r \circ [E] = [r \circ E] = [E]$. □

Folgerung 4.9. *Ist r eine transitive reflexive Relation auf A so ist die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen.*

Die abgeschlossenen Mengen bilden daher eine Topologie.
Ein paar Bemerkungen: Ist $E \subset A$ eine Teilmenge, so kann man $[E]$ so deuten: $[E]$ ist die Menge der Punkte, die man von E ausgehend auf Wegen in α erreichen kann. Die Zusammenhangskomponente. Da $[E]$ abgeschlossen gegenüber α ist führt kein Pfeil aus α aus $[E]$ heraus. Der Name abgeschlossen besteht also zu Recht. Die α Tür ist zu.

15. März 2017

Definition 40. Sei (A, α) eine einstellige Relationsalgebra. $a, b \in A$. Eine Folge $a_0, a_1, \ldots a_n$ mit $a_0 = a$ und $a_n = b$ heißt Weg von a nach b, wenn für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ $(a_i, a_{i+1}) \in \alpha$ ist.

Satz 4.10. *Sei $E \subset$ eine einstellige Relationsalgebra. Es ist $b \in [E]$ genau dann, wenn es einen Weg von einem $e \in E$ nach b gibt.*

Sei r die transitive Hülle von α. Es ist $r = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha^i$. Ist $b \in [E] = r \circ E$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b \in \alpha^n \circ E$. Das heißt es gibt $e \in E$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(e, b) \in \alpha^n = \alpha \circ \alpha^{n-1}$. Also gibt es ein a_{n-1} mit $(e, a_{n-1}) \in \alpha^{n-1}$ und $(a_{n-1}, b) in \alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Weg von e nach a_{n-1}. Das war zu zeigen. □

$[E]$ ist also die Menge der von E aus erreichbaren Punkte (durch Wege in α). Übrigens ist ein Stadtplan mit Einbahnstraßen eine solche Relation.

Satz 4.11. *Sei (A, α) eine einstellige Relationsalgebra mit injektivem α, die von ihrem Anfang erzeugt wird. Dann gibt es zu jedem $b \in A$ genau einen Weg, von einem Anfangselement nach b.*

Durch Induktion nach der Länge des Weges der von einem Anfangselement nach b führt. Tatsächlich gibt es einen Weg $e = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ mit einem $e \in E$. Bei b enden keine zwei Pfeile. Wenn man bei b ankommt muss man vorher in a_{n-1} gewesen sein. Von E nach a_{n-1} gibt es aber nur einen einzigen Weg. Darus ergibt sich die Behauptung. □

In der folgenden Relation gibt es durchaus mehr Wege

e	e	a	b
a	b	c	c

Folgerung 4.12. *Sei (A, α) eine einstellige Relationsalgebra mit injektivem α und A werde von seinem Anfang erzeugt. Dann ist $A = \bigcup_{e \in E} [e]$. Dabei sind für $e \neq h$ $[e]$ und $[h]$ elementfremd.*

Sei $b \in A$. Dann gibt es ein $e \in E$ und genau einen Weg von e nach b. Das heiß $A = \bigcup [e]$. Zu zeigen ist, dass diese Vereinigung disjunkt ist. Angnommen es ist $x \in [e_1] \cap [e_2]$ mit verschiedenen e_1 und e_2. Dann gibt es einen Weg von e_1 nach x und einen Weg von e_2 nach x. Das geht nicht, da e_1 und e_2 verschieden Anfangselemente sind. □

4.0.3 Halbordnung

Abb. 4.1: Baum auf dem Mäuseberg

Definition 41. Eine Relation $\leq$ auf H heißt Halbordnung, wenn gilt:

1. Für alle $a \leq a$. Die Relation ist reflexiv.
2. $\leq$ ist transitiv. Das heißt für alle $a, b, c \in H$ gilt: Ist $a \leq b$ und $b \leq c$, so ist $a \leq c$.
3. Für alle $a, b \in H$ gilt: Ist $a \leq b$ und $b \leq a$, so ist $a = b$.

Das Paar $(H, \leq)$ heißt halbgeordnete Menge.
Beispiele:

21. Die Identität ist auf jeder Menge eine Halbordnung.
22. $\mathbb{N}$ ist halbgeordnet wegen 2.67.
23. Ist H eine halbgeordnete Menge und X eine beliebige Menge, so ist die Menge

$$[X, H] := \{f | f \colon X \to H\}$$

durch $f \leq g$ genau dann, wenn für alle $x \in H$: $f(x) \leq g(x)$ gilt, halbgeordnet.
Sicher ist $f \leq f$ für alle $f \in [X, H]$. Außerdem ist die Relation transitiv. Denn ist $f \leq g$ und $g \leq h$, so ist für alle $x \in X$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Daher ist für alle $x \in X$: $f(x) \leq h(x)$. Das heißt $f \leq h$.

24. Ist M eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ durch die Inklusion halbgeordnet.

In einem natürlichen Baum gibt es oberhalb eines Knotens weitere Knoten. Aus dem Stamm erwachsen Äste, aus Ästen weitere Äste, Zweige und Blätter. An oberster Stelle, dies braucht nicht die höchste Stelle zu sein, erscheinen Knospen. Sie sind in der Halbordnung die maximalen Elemente.
Ist $V \subset H$ Teilmenge einer halbgeordneten Menge, so heißt ein $m \in V$ minimal in V, wenn für alle $a \in V$ mit $a \leq v$ gilt $a = v$. Ein Element $m \in V$ heißt maximal, wenn für alle $v \in V$ mit $m \leq v$ schon $v = m$ gilt.

Definition 42. Eine Relation $r \subset H \times H$ heißt connex, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in r$ oder $(b, a) \in r$ oder $a = b$. Eine Teilmenge $K \subset H$, die connex ist heißt Kette in der Halbordnung. Eine Teilmenge $A \subset H$ heißt Antikette, wenn für alle $a \neq b \in A$ gilt: $a \not\leq b$

Hinweise:

5. Wieviel Antiketten hat eine Menge mit n Elementen?

Ist M eine beliebige Menge, so ist $\mathfrak{P}(M)$ mit der Mengeninklusion eine halbgeordnete Menge.

Definition 13 Eine halbgeordnete Menge heißt fundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge ein minimales Element enthält.

Satz 4.13. *Für eine halbgeordnete Menge sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *H ist fundiert.*
2. *Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{N} \to H$ mit $f(n+1) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jede absteigende Kette bricht in H ab.*

2. $\Longrightarrow$1. Angenommen H enthält eine nichtleere Teilmenge V ohne minimales Element. Für jedes a aus V ist daher die Menge $V_a = \{x|x < a, x \in V\}$ nicht leer. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Funktion $\beta : V \to V$ mit $\beta(a) \in V_a$ für alle $a \in V$. Ich wähle ein bestimmtes $a \in V$ aus. (V, β) ist eine einestellige Algebra. Nach dem Rekursionssatz von Dedekind 2.41 gibt es genau ein $f : \mathbb{N} \to V$ mit $f(n+1) = \beta(f(n)) < f(n)$. Dies widerspricht der Voraussetzung.
1. $\Longrightarrow$2. Sei $f : \mathbb{N} \to H$ eine Funktion mit $f(n+1) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann kann die Menge $V = \{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$ kein minimales Element haben. □

Es gilt die „duale“ Version des Satzes.

Satz 4.14. *Für eine halbgeordnete Menge sind äquivalent:*

1. *Jede Teilmenge U von H hat ein (mindestens eins) maximales Element.*
2. *Es gibt keine streng monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{N} \to H$.*

1. $\Rightarrow$ 2.: Angenommen es gibt eine streng monoton wachsende Funktion $f : setN \to H$. Dann kann $f(\mathbb{N})$ kein maximales Element haben.
2.$\Rightarrow$1.: Angenommen es gebe eine Teilmenge U ohne maximales Element. Dann ist für jedes $a \in U$ die Menge $U(a) := \{u|a < u\} \neq \emptyset$. Nach dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Funktion $\beta\colon U \ni a \mapsto \beta(a) \in U$ mit $\beta(a) \in U(a)$. Insbesondere ist $a < \beta(a)$ für alle $a \in U$. Mit β wird U zu einer einstelligen Algebra. Daher gibt es nach dem Rekursionssatz von Dedekind eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to U$ mit $f(n+1) = \beta(f(n)) > f(n)$. Das widerspricht der Voraussetzung. □

Bei den Sätzen 4.13 und 4.14 wurde das Auswahlaxiom1.2.6 verwendet. Die Sätze spielen in der Modultheorie eine Rolle. Dort erscheinen sie als Kennzeichnung von artinschen und noetherschen Moduln.

Satz 4.15. *Sei (A, α) eine einstellige Relationsalgebra mit injektivem α. Die Menge der Anfänge E erzeuge A. Dann definiert man folgendermaßen eine fundierte Halbordnung auf A: $a \leq b :\Longleftrightarrow [b] \subset [a]$.*

Die so definierte Relation ist reflexiv, denn sicher ist $a \leq a$. Außerdem ist sie transitiv. Denn $a \leq b$ und $b \leq c$ beinhaltet $[b] \subset [a]$ und $[c] \subset [b]$. Das bedeutet $[c] \subset [a]$ und daher $a \leq c$. Es bleibt zu zeigen, dass die Relation antisymmetrisch ist. Sei also $a \leq b$ und $b \leq a$. Daher ist $[b] \subset [a]$ und $[a] \subset [b]$. Also $[a] = [b]$ □

Definition 43. $x \in M$ heißt Fixpunkt der Funktion $f : M \to M$, wenn $f(x) = x$ ist.

Aufgaben:

24. Wieviel bijektive Funktionen einer Menge mit n Elementen gibt es, die keinen Fixpunkt haben?

Definition 44. Sei $(H, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Eine Abbildung $f\colon H \to H$ heißt extensiv (nach Wikipedia), wenn für alle $x \in H$ $x \leq f(x)$ gilt.

Beispiele:

25. Die Identität ist extensiv.
26. Sei $H = \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto [x] + 1$, wobei $x =$ größte ganze Zahl $\leq x$ ist. Dann ist f extensiv.
27. Sei A eine Menge $\alpha\colon A \to A$ eine Funktion. Dann ist die Abbildung $F\colon \mathfrak{P}(A) \ni B \mapsto B \cup \alpha(B) \in \mathfrak{P}(A)$ extensiv. Ist E eine Teilmenge von A, so ist die von E erzeugte einstellige Unteralgebra von A ein Fixpunkt dieser Abbildung.
28. Sei $f\colon [0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in [0, 1]$. Dann ist f extensiv. Denn es ist $x^2 \leq x$ genau dann, wenn $x \leq 1$ ist.
29. Hat eine halbgeordnete Menge ein maximales Element a, so muss a Fixpunkt sein. Da $a \leq f(a)$ und a maximal ist, muss $a = f(a)$ sein.
30. Betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ni x \mapsto \frac{2x+1}{x} \in \mathbb{R}$. Für $x > -1$ sind äquivalent:
    a) $x \leq f(x)$.
    b) $x^2 - x - 1 < 0$.
    c) $f(x)^2 - f(x) - 1 < 0$.

15. März 2017

$1 \iff 2.$

$$\frac{2x+1}{x+1} > x \iff \frac{2x+1-x(x+1)}{x+1} > 0$$
$$\iff \frac{-x^2+x+1}{x+1} > 0 \iff x^2 - x - 1 < 0$$

$2. \iff 3.$ Wir haben:

$$\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 - \frac{2x+1}{x+1} - 1 < 0$$
$$\iff (2x+1)^2 - (2x+1)\cdot(x+1) - (x+1)^2 < 0$$
$$\iff x^2 - x - 1 < 0$$

Folgerung 4.16. *Ist $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{2x+1}{x+1} \in \mathbb{R}$ so ist die Menge $H = \{x | x^2 - x - 1 < 0\}$ gegenüber f abgeschlossen und es ist f eine Extension auf dieser Menge.*

Es sei $x \in H$. Dann ist $x \leq f(x)$. Also ist $f(x)^2 - f(x) - 1 < 0$. Daher ist $f(x) \in H$. Und daher wieder $f(x) \leq f^2(x)$. Dies war zu zeigen. □

Definition 45. Sei $f\colon H \to H$ eine extensive Abbildung. Ein $a \in H$ heißt extremal, wenn für alle $x < a$ gilt $f(x) \leq a$.

Beispiele:

31. Bei der Identität ist jedes $a \in H$ extremal.
32. Ist $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto [x] + 1$, so ist ein $a \in \mathbb{R}$ genau dann extremal, wenn $a \in \mathbb{Z}$ ist. Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $x < z$. Dann ist $[x] =$ größte ganze Zahl $\leq x < z$. Also ist $[x] + 1 = f(x) \leq z$. Ist umgekehrt $a \in \mathbb{R}$ ein extremaler Punkt, so betrachte $[a] \leq a < [a] + 1$. Ist $[a] < a$, so ist $f(a) = [a] + 1 > a$. Also kann das nicht vorkommen. Daher ist $[a] = a$ und es ist $a \in \mathbb{Z}$.

Definition 46. Sei (H) eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette ein Supremum hat. Außerdem sei f eine extensive Abbildung. Und m ein minimales Element in H. Eine Teilmenge $N \subset H$ heißt zulässig (oder ein Kegel), wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. $m \in N$.
2. N ist f abgeschlossen.
3. Ist $K \subset N$ eine Kette, so ist $\sup(K) \in N$.

Die ganze Menge M ist zulässig. Sei $m \in M$ die Menge $\{x|m \geq x\}$ ist gegenüber f abgeschlossen. Wir können also annehmen, dass M ein Minimum hat. Es gilt:

Bemerkung 12 Der Durchschnitt zulässiger Mengen ist zulässig. □

1. Es ist sicher das Minimum m in jedem Durchschnitt zulässiger Mengen.
2. Der Durchschnitt von f abgeschlossenen Mengen ist auch f abgeschlossen.
3. Sei $(D_i|i \in I)$ eine Familie von zulässigen Mengen und $K \subset \bigcap_{i \in I} D_i$ eine Kette. Da jedes D_i zulässig ist, ist $sup(N) \in D_i$ für alle $i \in I$. Also ist $\sup(K) \in \bigcap_{i \in I} D_i$. □

Daher gibt es eine kleinste zulässige Menge

$$D = \bigcap \{N|N \subseteq M, N \text{ ist zulässig } \}$$

Bemerkung 13 Für jeden extremalen Punkt $a \in D$ gilt:

$$D(a) : := \{x|x \in D, x \leq a \text{ oder } f(a) \leq x\} = D$$

Das sind die Menge der Punkte, die unterhalb von a liegen oder oberhalb von $f(a)$. □

Ich zeige $D(a) \subset D$ ist eine zulässige Menge ein Kegel.

1. Es ist $m \leq a$. Daher ist 1 erfüllt.
2. $D(a)$ ist gegenüber f abgeschlossen. Sei $x \in D(a)$.
   a) etwa $x \leq a$. Ist $x < a$, so ist $f(x) \leq a$. Also ist $f(x) \in D(a)$. Ist $x = a$, so ist $f(x) = f(a)$. Also ist $f(a) \leq f(x)$ und daher wieder $f(x) \in D(a)$.
   b) Ist $f(a) \leq x$, so ist $f(a) \leq x \leq f(x)$. Daher ist $f(x) \in D(a)$. Daher ist $D(a)$ gegenüber f abgeschlossen..
3. Sei $K \subset D(a)$ eine Kette und $b = \sup(K) \in D$, da D zulässig. Sind alle $k \in K$ kleiner oder gleich a, so ist auch $b \leq a$ und damit in $D(a)$. Andernfalls gibt es ein $k \in K$ mit $f(a) \leq k$ (da $k \in D(a)$). Dann ist aber erst recht $f(a) \leq k \leq b$. Das heißt $b \in D(a)$. Daher ist $D(a)$ zulässig. D war aber die kleinste zulässige Menge. Daher ist $D(a) = D$. □

15. März 2017

Bemerkung 14 Jedes $a \in D$ ist extremal. □

Sei E die Menge der extremalen Elemente aus D.

1. Sicherlich ist $m \in E$, denn für alle $x < m$, (solche gibt es nicht) ist $f(x) \leq m$.

2. E ist gegenüber f abgeschlossen. Dazu ist zu zeigen: Mit a ist auch $f(a)$ extremal. Sei dazu $x < f(a)$ und $x \in D = D(a)$. Dann ist $x \leq a$ oder $f(a) \leq x$. Die zweite Möglichkeit ist nach Voraussetzung nicht der Fall. Also ist $x < a$ oder $x = a$. Im ersten Fall ist $f(x) \leq a \leq f(a)$. Daher ist $f(x) \leq f(a)$. Im zweiten Fall ist $f(x) = f(a)$ und daher $f(x) \leq f(a)$. Es ist also E gegenüber f abgeschlossen.

3. Sei $K \subset E$ eine Kette und $k = \sup(K)$. Zu zeigen ist, dass auch k extremal ist. Sei dazu $x \in D$ und $x < k$. Angenommen $f(a) \leq x$ für alle $a \in K$. Dann ist $a \leq f(a) \leq x$ für alle $a \in K$. Das hieße x ist obere Schranke der Kette K. k ist kleinste obere Schranke widerspricht dem. Also gibt es ein $a \in K$ mit $f(a) \not\leq x$. Da aber $x \in D = D(a)$ ist muss $x \leq a$ sein.
   - Ist $x = a$, so gibt es ein a' aus der Kette mit $a' > a$, denn sonst wäre $a = k$. Aber $x < k$ widerspricht dem. Also ist $x < a'$. Daher ist $f(x) \leq a' \leq k$.
   - Ist $x < a$, so ist $f(x) \leq a \leq k$.

Also ist k extremal und damit $k \in E$. Daher ist $E = D$. □

Satz 4.17 (Fixpunktsatz von Bourbaki 1950). *Sei M eine nichtleere habgeordnete Menge, in der jede nichtleere Kette ein Supremum hat. $f : M \to M$ eine Funktion mit $x \leq f(x)$ für alle $x \in M$. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Beh. 3.: In D lassen sich je zwei Elemente vergleichen. Seien dazu $x, y \in D$. x ist extremal. Also ist $D(x) = D$. Also ist $y \leq x$ oder $x \leq f(x) \leq y$. Also ist D eine Kette.
Beh.4: $b = \sup(D)$ ist der gewünschte Fixpunkt.
Bew: Es ist $b \leq f(b)$. Da aber $b \in D$ ist und $b = \sup(D)$ ist ist $f(b) \leq b$. Es folgt $b \leq f(b) \leq b$. Da die Relation $\leq$ antisymmetrisch ist folgt die Behauptung. $b = f(b)$. □

4.1 Konstruktion von Zahlmengen

4.1.1 Die ganzen Zahlen

In der Menge der Parre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ könnenwir paarweise addieren. Es gilt dann das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und Neutralelement ist $(0,0)$. Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erklären wir eine Relation: $(a,b) \sim (a',b') \iff a+b' = a'+b$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Die Reflexivität und Symmetrie sieht man sofort. Sei $(a,b) \sim (a',b')$ und $(a',b') \sim (a'',b'')$. Dann ist $a+b' = a'+b$ $a'+b'' = b'+a''$. Daher folgt $a+b''+b' = a'+b+b'' = (a'+b'')+b = b'+a''+b$. Daher ist $a+b'' = a''+b$. Also ist $(a,b) \sim (a'',b'')$.
Außerdem ist $\sim$ verträglich mit der Addition in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Das heißt: Ist $(a,b) \sim (a',b')$ und (c,d) beliebig, so ist $(a,b)+(c,d) \sim (a',b')+(c,d)$. Denn $(a,b) \sim (a',b')$, dann ist $a+b' = a'+b$ und daher $a+b'+c+d = a'+b+c+d$. Also ist $(a+c)+(b'+c) = (a'+d, +b+c)$. Das heißt $(a,b)+(c,d) \sim (a',b'+(c,d))$. Die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Auf $\mathbb{Z}$ erklären wir eine Addition:

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(a+c, b+d)] \tag{4.1}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Vertreters der Äquivalenzklasse.

Sei $(a,b) \sim (a',b')$ und (c,d) beliebig. ZU zeigen ist $(a+c, b+d) \sim (a'+c, b'+d)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a+c+b'+d = a'+c+b'+d \iff a+b' = a'+b \iff (a,b) \sim (a',b')$ ist. □

Es gilt das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz. Das Neutralelement bezüglich dieser Addition ist $[(0,0)]$. Jedes Element hat in $\mathbb{Z}$. Man sieht $[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, a+b)] = [(0,0)]$.

4.1.2 Die rationalen Zahlen

Sei $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Satz 4.18. *Die Relation $(a,b) \sim (a',b') \iff a \cdot b' = a' \cdot b$ definiert auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ eine Äquivalenzrelation.*

Die Relation ist sicher reflexiv und symmetrisch. Es bleibt nur zu überlegen, dass sie tansitiv ist. Sei also $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$. Dann gilt: $(a \cdot d = c \cdot b$ und $c \cdot f = e \cdot d)$. Es folgt $a \cdot d \cdot c \cdot f = c \cdot b \cdot e \cdot d$. Damit folgt $a \cdot f = b \cdot e$. Also ist $(a,b) \sim (e,f)$. Daher ist die Relatiopn transitiv. □

Definition 47. Die von (a, b) erzeugte Äquivalenzklasse wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Satz 4.19. *1. Auf $\mathbb{Q}$ erklären wir durch*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \tag{4.2}$$

eine Addition. Bezüglich dieser Addition wird $(\mathbb{Q}, +)$ zu einer kommutativen Gruppe. $\frac{0}{1}$ ist das Neutralelement. Man bezeichnet $\frac{0}{1}$ wieder mit 0.

2. Auf $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wird durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{4.3}$$

eine Multiplikation erklärt. Durch diese Multiplikation wird $\mathbb{Q}^*$ zu einer kommutativen Gruppe.

3. Es gilt das Distributivgesetz. Das heißt für alle $r, s, t \in \mathbb{Q}$ ist

$$r \cdot (s + t) := rs + rt \tag{4.4}$$

Man sagt $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper.

Zu 1.: Die Definition der Addition ist nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängig. Denn es gilt zu bestimmten $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} &= \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by} \\ \iff (ad + cb) \cdot by &= bd \cdot (ay + bx) \\ \iff adby + cbby &= bday + bdbx \\ \iff cy &= dx \end{aligned}$$

die letzte Zeile gilt, da $b \neq 0$ ist. Sie bedeutet, dass $(c, d) \sim (x, y)$ ist.
Zu 2. Die Definition der Multiplikation hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab. Setzen wir zunächst voraus, dass $a \neq 0$ ist.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} \\ \iff acby &= axbd \\ \iff cy &= xd \end{aligned}$$

Das bedeutet $(c, s) \sim (x, y)$. Ist $a = 0$, so ergibt sich stets ein Bruch der Form $\frac{0}{bd}$. Die sind aber alle äquivalent zu $\frac{0}{1} = 0$.
Zum Distributivgesetz: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) &= \frac{a}{b}(\frac{cf + ed}{df}) \\ &= \frac{acf + aed}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\end{aligned}$$

Das Element $\frac{1}{1}$ ist Neutralelement bezüglich der Multiplikation

4.2 Ordnungen

4.2.1 Das Zornsche Lemma

Satz 4.20 (Zornsches Lemma). *Sei H eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette ein Supremum hat. Dann hat H ein maximales Element*

Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann gibt es eine halbgeordnete Menge ohne maximales Element. Dann ist für alle $h \in H$

$$O(h) \colon = \{x | h < x\} \neq \emptyset$$

Nach dem Auswahlaxiom (siehe 1.2.6) gibt es eine Funktion

$$f \colon H \ni h \mapsto f(h) \in \bigcup_{h \in H} O(h) \text{ mit } f(h) \in O(h)$$

Also ist für alle $h \in H$ $h < f(h)$. Nach dem Fixpunktsatz von Bourbaki (siehe 4.17) hat f eine Fixpunkt $a \in H$. Das hieße $a = f(a)$. Dies widerspricht der Eigenschaft von f mit $h < f(h)$ für alle $h \in H$ □

In dem folgenden Satz wenden wir das Zornsche Lemma an.

Satz 4.21. *Eine Menge ist unendlich genau dann, wenn es eine injektive Funktion $\alpha \colon A \to A$ gibt, so dass (A, α) eine Freie einstellige Algebra ist.*

Sei

$$\mathfrak{B} : = \{(B, \beta) | B \subset A \text{ und } (B, \beta) \text{ ist eine freie einstellige Algebra } \}$$

$\mathfrak{B} \neq \emptyset$, da A unendlich ist. $\mathfrak{B}$ kann halbgeordnet werden durch:

$$(B_i, \beta_i) \leq (B_k, \beta_k) \iff E_i \subset E_k \text{ und } \beta_k / B_i = \beta_i$$

Sei $(B_i|i \in I)$ eine Kette in $\mathfrak{B}$ und $B^* = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ und $\beta* = \bigcup \beta_i$. Dann ist $\bigcup B_i$ erzeugt von $\bigcup E_i$. Denn sei $b \in B^*$. Es gibt ein $i \in I$ mit $b \in B_i = [E_i]$. Also ist $b \in [E]$. Nach dem zornschen Lemma gibt es ein maximales (B_m, β_m).
Beh. Es ist $B_m = A$.
Ich unterscheide 2 Fälle.
1. Fall: $A \setminus B_m$ ist endlich. $A \setminus B_m = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Wir wählen ein e aus der Basis von B_m und erklären:

$$\alpha : AA \ni a \mapsto \begin{cases} \beta_m(a) \text{ falls } a \in B_m \\ a_{k+1} \text{ falls } a = a_k \in B \setminus B_m \text{ und } k < n \\ e \text{ für } a = a_n \end{cases}$$

Dann ist (A, α) eine freie einstellige Algebra mit der Basis $E = (E_m \setminus \{e\}) \cup \{a_0\}$.
2. Fall $D = A \setminus B_m$ ist unendlich. Dann gibt es ein $\beta \colon D \to D$, welches injektiv aber nicht surjektiv ist. Sei $d \in D$ und $d \notin \beta(D)$. Wir erklären $B_m \cup [d]_\beta = A_0^*$.
$\alpha \colon B_m \cup [d]_\beta \ni a \mapsto \begin{cases} \beta_m(a) \text{ falls} a \in B_m \\ \beta(a) \text{ falls } a \in [d] \end{cases}$ α ist injektiv und $E \cup \{d\}$ ist eine Basis von (A_0^*, α). Das widerspricht der Maximalität von (B_m, β_m). Also ist $B_m = A$. □

4.2.2 Der Wohlordnungssatz

Eine linear geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element hat. Ist $(W, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und $a \in W$, so sei $I(a) = \{x | x \in W \text{ und } x < a\}$ der durch a definierte offene untere Abschnitt von W

Satz 4.22 (Wohlordnungsatz). *Jede Menge M lässt sich wohlordnen.*

Wir beweisen dies mit dem Zornschen Lemma (siehe 4.20). Sei

$$\mathfrak{Z} := \{(W, \leq) | \text{ wobei } W \subset M \text{ und } \leq \text{ eine Wohlordnung auf } W \text{ ist } \}$$

Es ist $\mathfrak{Z} \neq \emptyset$. Denn für $x \in M$ ist $(\{x\}|x = x) \in \mathfrak{Z}$. Auf $\mathfrak{Z}$ konstruieren wir eine Halbordnung, welche die Vorraussetzungen des zornschen Lemmas erfüllen. Wir erklären:

5 Ebene Strukturen

5.1 Flache Räume

5.1.1 Die beiden Potenzmengenfunktoren

Ist M eine Menge, so kann man die dazugehörige Potenzmenge $Pot(M) = \{U|U \subset M\}$ bilden. Ist $f : M \to N$ eine Abbildung und $U \subset M$, so ist $f(U) = \{n|\exists m \in M \wedge f(m) = n\}$ die Bildmenge von U. Zu f gehört also eine Abbildung : $Pot(f) : Pot(M) \ni U \mapsto f(U) \in Pot(N)$.

Satz 5.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{Me} \ni M &\mapsto Pot(M) \\ Mor(M,N) \ni f &\mapsto Pot(f) \in [Pot(M), Pot(N)] \end{aligned} \tag{5.1}$$

ist ein kovarianter Funktor.

Der Beweis ist einfach.
Ist eine Abbildung in zwei Argumenten gegeben, so kann man ein Element festhalten und erhält eine Abbildung in einem Argument. Genauer. Ist $\varphi : A \times B \to C$ eine Abbildung mit Mengen A, B, C, so definiert bei festem $a \in A$.

$$\varphi(a, -) : B \ni b \mapsto \varphi(a, b) \in C.$$

Wir haben also eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \Phi : [A \times B, C] &\to [B, C]) \in [A, [B, C]] \\ \varphi &\mapsto (A \ni a \mapsto \varphi(a, -) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ist umgekehrt $\alpha : A \to [B, C]$, so ist für alle $a \in A$, $\alpha(a)$ eine eindeutig bestimmte Abbildung aus $[B, C]$. zu jedem $b \in B$ ist daher $\alpha(a)(b)$ eindeutig bestimmt aus C. Wir haben daher eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \Psi : [A, [B, C]] &\to [A \times B, C] \\ \alpha &\mapsto (A \times B \ni (a, b) \mapsto \alpha(a)(b) \in C) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Satz 5.2. *Die Abbildungen Φ und Ψ sind invers zueinander. Die Familie $\Phi(A, B, C)$ ist ein funktorieller Homomorphismus.*

Sei $\varphi : A \times B \to C$. Es ist

$$\alpha := \Phi(\varphi) : A \ni a \mapsto (B \ni b \mapsto \varphi(a, b) \in C)$$

Dann ist also $\alpha(a) : B \ni b \mapsto \varphi(a, b) \in C$. Also ist $\alpha(a)(b) = \varphi(a, b)$. Daher ist $\Psi(\alpha)(a, b) = \alpha(a)(b) = \varphi(a, b)$. Daher ist $\Psi(\alpha) = \varphi$. Es ist also $\Psi\Phi =$Identität auf $[A \times B, C]$.
Nun berechne ich $\Phi\Psi$. Sei dazu $\alpha : A \to [B, C]$. Sei $\varphi = \Psi(\alpha)$. Dann ist $\varphi(a, b) = \alpha(a)(b)$. Das heißt $\phi(\varphi)(a) = \varphi(a, -)$. Also ist für alle $b \in B$: $\Phi(\varphi(a))(b) = \varphi(a, b) = \alpha(a)(b)$. Also ist $\Phi(\varphi)(a) = \alpha(a)$ und dies für alle $a \in A$. Daher ist $\Phi(\varphi) = \alpha$. Also ist $\Phi\Psi(\alpha) = \alpha$. Das heißt Ψ und Φ sind invers zueinander.
Nun zeige ich, dass Φ funktoriell im zweiten Argument ist. Sei daher $f : M \to N$ eine Abbildung. Zu zeigen ist dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc}
Mor(A \times B, C) & \xrightarrow{\Phi(A,M,C)} & Mor(A, Mor(M, C)) \\
\Big\uparrow [1_A \times f, C] & & \Big\uparrow [1_A, [f, C]] \\
Mor(A \times N, C) & \xrightarrow{\Phi(A,N,C)} & Mor(A, Mor(N, C))
\end{array}$$

Sei dazu zum Beginn der Diagrammjagd ein $\varphi \in Mor(A \times N, C)$ gewählt. □

5.1.2 Heiratssatz

Ich möchte hier den berühmten Heiratssatz beweisen. Einfach weil ich vermute, dass er mit meiner aufzubauenden Theorie sehr viel zu tun hat. Ich gehe von folgender Situation aus. Gegeben sind zwei elementfremde Mengen D die Damen und H die Herren. Wir suchen nach einer injektiven Funktion $f : D \to H$. Wir versuchen also die Damen zu verheiraten. Schön(??????) waren noch die Zeiten als der Vater dies einfach autoritär erledigen konnte. Aber zur mathematischen Erschwerung ist es seit geraumer Zeit üblich die Sympatien der Damen zu berücksichtigen. Das heißt jede Dame hat einen Freundeskreis unter den Herren. Nur innerhalb diese Freundeskreises dürfen wir sie verheiraten. Mathematisch bedeutet dies: Wir haben einen Funktion $F : D \to \mathfrak{P}(H)$

Definition 48. Eine Funktion $f : D \to H$ heißt mit der Funktion $F : D \to \mathfrak{P}(H)$ verträglich, wenn für alle $d \in D$ gilt:$f(d) \in F(d)$.

In unserem Kulturkreis, in dem Monogamie vorherrscht sind wir natürlich an injektiven Abbildungen $f : D \to H$ mit injektivem f interessiert. Nun soll jede Dame auch einen Herrn bekommen. Greifen wir daher etwa zwei Damen heraus, so müssen diese zusammen mindestens zwei Freunde haben. Um genauer darüber sprechen zu können Bezeichnungen: Ist $C \subset D$ eine Menge, so sei $F(C) = \bigcup_{c \in C} F(c)$ die Menge aller Freunde von Damen aus C. Dann muss natürlich für jede Teilmenge gelten: $|F(C)| >= |C|$.

Definition 49. Sei $F : D \to \mathfrak{P}(H)$. Wir sagen F erfüllt die Partybedingung, wenn für alle $C \subsetneq D$ gilt $|F(C)| >= |C|$.

Also eine Hochzeit aller Damen aus D ist nur möglich, wenn die Befreundungsfunktion die Partybedingung erfüllt.

Bemerkung 15 Ist $F : D \to \mathfrak{P}(H)$ eine Funktion, welche die Partybedingung erfüllt, dann gilt: Ist C eine echte Teilmenge von D mit $|F(C)| = |C|$, $D_1 = D \setminus C$ und $H_1 = H \setminus F(C)$, dann erfüllt
$F_1 : D_1 \to F(d) \setminus F(C)$ die Partybedingung. □

„Man kann eine Clique entfernen ohne die Partybedingung zu zerstören“

Angenommen das Gegenteil sei der Fall. Dann gibt es eine Teilmenge $D^* \subset D_1$ mit $|F_1(D^*)| < |D^*|$. Wir bilden $\overline{D} = D^* \cup C$. Dann ist $|\overline{D}| = |\overline{D^*}| + |C|$. Dann ist

$$\begin{aligned} |F(\overline{D})| &= |F(D^* \cup F(C))| \\ = |F(D^*) \setminus F(C) \cup F(C)| &= |F_1(D^*)| + |F(C)| \\ = |F_1(D^*)| + |C| &< |D^*| + |C| \\ &= |\overline{D}| \end{aligned}$$

Dies wiederspricht der Partybedingung. □

Satz 5.3 (Heiratssatz Hall 1935). *Seien D und H endliche Mengen. Dann sind für jede Funktion $F : D \to \mathfrak{P}(H)$ äquivalent:*

1. *Es gibt mindestens eine mit $F : D \to \mathfrak{P}(H)$ verträgliche injektive Funktion.*
2. *Es gilt die Partybedingung.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $H : D \to H$ eine mit $F : D \to \mathfrak{P}(H)$ verträgliche injektive Funktion. Dann folgt für jedes $C \subset D$:
$|F(C)| \geq \bigcup_{d \in C} \{h(d)\} = |C|$.
2. $\Longrightarrow$1. Ich beweise den Satz durch Induktion nach der Anzahl von D. Ist in D nur eine Dame. Die Dame muss ja wenigstens einen Freund haben um überhaupt heiraten zu können. Sei die Behauptung schon für alle natürlichen Zahlen kleiner als $|D|$ geklärt.

1. Fall Es gibt keine echte Teilmenge mit $|C| = |F(C)|$. Dann ist die Heiratsbedingung übererfüllt. Denn dann ist für alle $C \subsetneq D$: $|F(C)| \geq |C| + 1$. In dieser Situation soll der Zufall kuppeln. Beispielsweise wird Eva mit Adam verheiratet. Es ist $|F(Eva)| \geq |\{Eva\}| + 1$. Wir setzen voraus, dass Adam unter den Freunden von Eva ist. Adam ist nun nicht mehr zu haben. Sei $D' = D \setminus \{Eva\}$ und $H' = H \setminus \{Adam\}$ und $F' : D' \ni d \mapsto F(d) \setminus \{Adam\} \subset H'$.

Beh: F' erfüllt die Heiratsbedingung.

Bew: Sei $C' \subset D'$. Dann ist $|F'(C')| = |F(C') \setminus \{A\}| \geq |C'| + 1 - 1 = |C'|$. Also ist durch die Hochzeit von Adam und Eva die Partybedingung nicht zerstört worden. D' ist aber eine Menge mit kleinerer Anzahl. Es gibt also eine mit F' verträgliche Heirat h'. Sei $h(Eva) = Adam$ und $h(d) = h'(d)$ für $d \neq Eva$. h ist dann die gewünschte Heirat.

2.Fall Es gibt eine echte Teilmenge $C \subsetneq D$, die $|F(C)| = |C|$ erfüllt. $D_1 = D \setminus C$ und $H_1 = H \setminus F(C)$. Nach der Bemerkung vorher erfüllt D_1 und F_1 die Partybedingung. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher ein $f : C \to F(C)$ und ein $g : D_1 \to H_1$, welche verträglich mit der Funktion F sind. Sei

$$h(d) = \begin{cases} f(d) & \text{falls } d \in C \\ g(d) & \text{falls } d \in D \setminus C = D_1 \end{cases}$$

h erfüllt die Forderung. □

5.1.3 Flache Abbildungen

Definition 50. $\varphi : M^n \to Pot(M)$ heißt n-flache Abbildung, wenn für alle $\overrightarrow{a} \in M^n$ gilt: Für alle $\overrightarrow{b} \in \varphi(\overrightarrow{a})^n$ ist $\varphi(\overrightarrow{b}) \subset \varphi(\overrightarrow{a})$.

Wegen 4.6 sind die 1- flachen Abbildungen genau die transitiven Relationen.
Beispiele:

33. Ist M_R ein $R-$ Rechtsmodul ueber dem Ring R und $a \in M$, so ist die Abbildung

$$\varphi : M^n \ni < b_1, \ldots, b_n > \quad \mapsto \quad a + \sum_{i=1}^{n} (b_i - a)R \tag{5.4}$$

eine n flache Abbildung.

Seien $c_1, \ldots, c_n \in \varphi(M^n)$. Dann ist $c_i = a + (b_i - a) \cdot r_i$. Es ergibt sich: $\varphi(c_1, \ldots, c_n) = a + \sum\limits_{i=1}^{n} (a + (b_i - a) \cdot ri - a)R = a + \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a) \cdot r_i \cdot R \subset a + \sum (b_i - a)R$. □

34. Sei K der Körper der reellen Zahlen und E die euklidische Ebene. Wie wir aus der Geometrie der siebten Klasse wissen, haben je drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen einen Umkreis. Diesen Umkreis bezeichne ich mit $U(A, B, C)$. $\varphi : E \to Pot(E)$ sei nun die folgende Abbildung:

$$\varphi(A, B, C) := \begin{cases} U(A, B, C) & \text{falls } A, B, C \text{ nicht auf einer Geraden liegen} \\ \{A, B, C\} & \text{falls } A, B, C \text{ auf einer Geraden liegen} \end{cases} \tag{5.5}$$

1.Fall Die drei Punkte liegen nicht auf einer Geraden. Dann hat das Dreieck $\triangle ABC$ einen Umkreis $\varphi(A, B, C)$. Seien $X, Y, Z \in \varphi(A, B, C)$. Dann gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

- Die drei Punkte liegen auf einer Geraden. Das bedeutet übrigens, dass mindestens zwei von ihnen gleich sind. Dann ist $\varphi(X, Y, Z) = \{X, Y, Z\} \subset \varphi(A, B, C)$.
- Die drei Punkte liegen nicht auf einer Geraden. Dann ist aber der Umkreis von $\triangle XYZ$ derselbe wie der von $\triangle ABC$. Dies war zu zeigen

2.Fall Die drei Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden. Dann ist $\varphi(A, B, C) = \{A, B, C\}$ und die Behauptung folgt sofort. □

35. Dasselbe kann man für Parabeln machen. Wahrscheinlich wesenlich allgemeiner.

Aufgaben:

25. Gib ein Beispiel einer Funktion $\alpha : A \to A$ an, bei der die transitive Hülle des Funktionsgraphen kein Funktionsgraph ist.

26. Gib ein Beispiel einer Funktion an, bei der die transitive Hülle des Funktionsgraphen wieder ein Funktionsgraph ist.

27. Kann man die Funktionen einfach charakterisieren bei den die transitive Hülle des Funktionsgraphen wieder ein Funktionsgraph ist? ($\alpha^2 = \alpha$)

15. März 2017

Der Satz **??** gilt in einem gewissen Sinn allgemein. Jede Funktion

$$\varphi : M^n \to Pot(M)$$

ist mit einer Relation auf $M^n \times M$ verknüpft. Und zwar hat man die durch φ definierte Relation

$$(\overrightarrow{m}, a) \in R :\Longleftrightarrow\ a \in \varphi(\overrightarrow{m})$$

Satz 5.4. *$\varphi : M^n \to Pot(M)$ ist genau dann n-flach, wenn obige Relation die folgende Eigenschaft hat. Für alle $\overrightarrow{m} \in M^n$ gilt: Für alle $a_1, \ldots, a_n \in M$ gilt: Ist $(\overrightarrow{m}, a_i) \in R$ und $x \in M$ mit $(\overrightarrow{a}, x) \in R$, so ist $(\overrightarrow{m}, x) \in R$*

Sei $\varphi : M^n \to Pot(M)$ eine n- flache Abbildung, $\overrightarrow{m} \in M^n$ und $a_i \in M$ mit $(\overrightarrow{m}, a_i) \in R$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $a_i \in \varphi(\overrightarrow{m})$. Also ist $\varphi(\overrightarrow{a}) \subset \varphi(\overrightarrow{m})$. Besteht daher die Relation $(\overrightarrow{a}, x) \in R$, so ist $x \in \varphi(\overrightarrow{a}) \subset \varphi(\overrightarrow{m})$. Das heisst $x \in \varphi(\overrightarrow{m})$. Dies heißt hinwiederum $(\overrightarrow{m}, x) \in R$.
Habe umgekehrt R die erwähnten Eigenschaften. und sei $a_1, \ldots, a_n \in \varphi(\overrightarrow{m})$. Das heißt es ist $(\overrightarrow{m}, a_i) \in R$. Außerdem sei $x \in \varphi(\overrightarrow{a})$. Dann ist $(\overrightarrow{a}, x) \in R$. Daher ist $x \in \varphi(\overrightarrow{m})$. Dies bedeutet $\varphi(\overrightarrow{a}) \subset \varphi(\overrightarrow{m})$. Es ist daher φ ein n- flache Abbildung. □

Dieser Satz legt eine Fülle weiterer Beispiele nahe.
Beispiele:

36. Sei **F** die Menge aller aussagenlogischen Formeln. Dann kann man eine Relation erklären. Und zwar:

    $$(A, B, C) \in R :\Longleftrightarrow \text{ Die Formel } A \wedge B \to C \text{ ist aussagenlogich gültig.}$$

    Diese Relation hat die oben besprochen Eigenschaft.

    Denn seien C und D zwei aussagenlogische Formeln, so dass $A \wedge B \to C$ und $A \wedge B \to D$ aussagenlogisch gültig sind. Außerdem sei X eine Formel, so dass $\Phi(C \wedge D \to X)$ aussagenlogisch gültig ist. Ist Φ eine Belegung von **F** bei der $\Phi(A) = 1(w)$ und $\Phi(B) = 1$ ist, so ist wegen der Voraussetzung $\Phi(C \wedge D) = 1$. Daher ist wieder $\Phi(X) = 1$. Es ist also $A \wedge B \to X$ eine aussagenlogisch gültige Formel. □

37. Genau dieselbe Behauptung gilt, wenn man $\wedge$ durch $\vee$ ersetzt.

38. Ist V_K ein Vektorraum über dem geordneten Körper K so kann man sagen wann ein Punkt c zwischen zwei anderen liegt und zwar soll gelten: $(a, b, c) \in R \iff c = a \cdot \alpha + b \cdot (1 - \alpha)$ mit $\alpha \in [0, 1]$.

39. Sei $(H, \leq)$ ein Raum mit einer transitiven Relation. Ich erkläre eine Relation $(a, b, c) \in R :\Longleftrightarrow\ a \leq c \leq b$. Diese Relation hat die Eigenschaften des Satzes. Ist also im erweiterten Sinn transitiv.

    Sei $a \leq c \leq b$ und $a \leq d \leq b$. Weiterhin gelte $c \leq x \leq d$. Das heißt $a \leq c$ und $c \leq x$. Daher ist wegen der Transitivität $a \leq x$. Außerdem ist $x \leq d$ und $d \leq b$. Also ist $x \leq b$. Mithin $a \leq x \leq b$. Das heißt hinwiederum $(a, b, x) \in R$. Dies war zu zeigen. □

5.2 Unterstrukturen

Wichtig wie stets ist der Begriff der Unterstruktur. Ein Versuch hierzu: Wie ich vorher bemerkt habe, gehört zu jeder flachen Abbildung $\varphi : M^n \to Pot(M)$ eine transitive Relation $(\overrightarrow{m}, x) \in R(\varphi) \iff x \in \varphi(\overrightarrow{m})$. Bei der Suche nach einem geeigneten Begriff der Unterstruktur stösst man auf den folgenden Satz:

Satz 5.5. *Sei M ein flacher Raum. Dann sind folgende Eigenschaften einer Teilmenge $U \subset M$ äquivalent:*

1. *$\varphi(U^n) \subset Pot(U)$.*
2. *U ist gegenüber der Relation $R(\varphi)$ abgeschlossen.*

1. $\Longrightarrow$2. Seien $u_1, \ldots, u_n \in U$ und $x \in M$ derart, dass $(u_1, \ldots, u_n, x) \in R(\varphi)$ gilt. Dann ist $x \in \varphi(U_1, \ldots, u_n) \subset U$ wegen 1. Also ist $x \in U$. Die Menge U ist daher gegenüber der Relation $R(\varphi)$ abgeschlossen.
2.$\Longrightarrow$1. Sei U gegenüber der Relation $R(\varphi)$ abgeschlossen und $u_1, \ldots, u_n \in U$. Zu zeigen ist, dass $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \subset U$ ist. Sei dazu $x \in \varphi(u_1, \ldots, u_n)$, was bedeutet, dass $(u_1, \ldots, u_n, x) \in R(varphi)$ ist. Damit ist $x \in U$. Damit folgt die Behauptung. □

Definition 51. Es sei (M, φ) eine n- stellig. Eine Menge $U \subset M$ heißt Unterraum, wenn $\varphi(U^n) \subset Pot(U)$ ist.

Satz 5.6. *Der Durchschnitt von Unterräumen ist ein Unterraum.*

Sei $(U_i | i \in I)$ ein Familie von Unterräumen. $W = \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ und $w_1, \ldots w_n \in W$. Dann ist $w_1, \ldots, w_n \in U_i$ für alle $i \in I$. Also ist $\varphi(< w_1, \ldots, w_n >) \subset U_i$ für alle $i \in I$. Daher ist $\varphi(< w_1, \ldots, w_n >) \subset \bigcap\limits_{i \in I} U_i = W$. Daher ist W ein Unterraum. □

Folgerung 5.7. *Sei (M, φ) ein flacher Raum. und $U \subset M$. Dann gibt es einen kleinsten Unterraum $\overline{U}$, der U enthält. Dieser Unterraum heißt der von U erzeugte Unterraum.*

Definition 52. Ein Unterraum von M heißt endlich erzeugt, wenn es eine endliche Menge $E \subset M$ gibt mit $\overline{U} = E$. Ein fast ebener Raum heißt einfach, wenn es außer der leeren Menge keine echten Unterraum gibt.

Ist beispielsweise R eine transitive Relation (im üblichen Sinne) auf M, so bedeutet einfach: Von jedem Punkt der Menge ist jeder Punkt erreichbar. Zyklisch bedeutet: Es gibt einen Punkt, von dem alle erreichbar sind. (Wächterproblem Wieviele Wächter müssen aufgestellt werden damit alle zu bewachenden Punkte unter Kontrolle sind.)
Dem von der Menge U erzeugten Unterraum können wir uns auch von unten konstruktiv nähern. Dafür müssen wir unseren Begriff vom flachen Raum etwas einschränken. Wir verlangen zusätzlich $u_1 \ldots, u_n \in \varphi(< u_1, \ldots, u_n >)$.

Definition 53. Sei U eine Teilmenge von dem flachen Raum (A, α). $L(U) := \bigcup\limits_{\overrightarrow{u} \in U^n} \alpha(\overrightarrow{u})$.

Spricht man geometrisch, so bedeutet dies dass man alle möglichen Verbindungsstrecken (dreiecke ...) A von Punkten aus U zieht. Es gilt:

Satz 5.8 (Eigenschaften). *1. Ist $M \subset N$, so ist $L(M) \subset L(N)$.*

2. Es ist $M \subset L(M)$.

Der Beweis ist einfach.

Satz 5.9. *Ist (A, α) ein flacher Raum und ist $U \subset A$, so ist*

$$U = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} L^n(U)$$

Zunächst ist □

5.3 Homomorphismen

Definition 54. Seien (M, α) und (N, β) zwei n- flache Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt Homomorphismus , wenn folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\alpha} & Pot(M) \\ f^n \big\downarrow & & \big\downarrow Pot(f) \\ N^n & \xrightarrow{\beta} & Pot(N) \end{array}$$

Satz 5.10. *Ist U ein Unterraum von M und $f : M \to N$ ein Homomorphismus, so ist $f(U)$ ein Unterraum.*

Seien $y_1, \ldots, y_n \in f(U)$. Das heißt es gibt $u_1, \ldots, u_n$ mit $f(u_i) = y_i$. Es ist $\beta(< y_1, \ldots, y_n) = \beta(< f(u_1, \ldots, f(u_n)) >) = \beta \circ f^n(< u_1, \ldots, u_n >) = P(f)(\alpha(< u_1, \ldots, u_n >))$. Es ist $\alpha(< u_1, \ldots, u_n >) \in P(U)$, da U ein Unterraum ist, also eine Teilmenge von U etwa $W = \alpha(< u_1, \ldots, u_n >)$, $W \subset U$. Es ist $P(f)(W) = f(W) \subset f(U)$. Also ist $\beta(< y_1, \ldots, y_n >) = P(f)(W) \in P(f(U))$. Das heißt $f(U)$ ist ein Unterraum. □

Satz 5.11. *Seien M, N n- flache Räume und $f : M \to N$ ein Homomorphismus. Dann ist das Urbild eines Unterraums ein Unterraum.*

Seien $\alpha : M^n \to Pot(M)$ udn $\beta : N^n \to Pot(N)$ die Strukturabbildungen und $f : M \to N$ ein Homomorphismus. Das heißt das Diagramm 54 ist kommutativ. Sei V ein Unterraum von N. ZU zeigen ist, dass $U := f^{-1}(V)$ ein Unterraum ist. Das bedeutet nach Definition muss $\alpha(U^n) \subset Put(U)$ gelten. Sei dazu $u_1, \ldots, u_n \in U$. Zu zeigen ist, dass $\alpha(< m_1, \ldots, m_n >) \subset U = f^{-1}(V)$ ist. Da f ein Homomorphismus ist, ist $f(\alpha(< u_1, \ldots, u_n >)) = \beta(< f(u_1, \ldots, f(u_n)) >)$. Da $f(m_i) \in V$ für $i = 1, \ldots, n$ ist, ist $\beta(< f(u_1, \ldots, f(u_n)) >) \in \beta(V^n) \subset Pot(V)$, da V ein Unterraum ist. Daher ist $f(\alpha(< u_1, \ldots, u_n >)) \subset V$. Also ist $\alpha(\overrightarrow{u}) \subset f^{-1}(V)$. Dies war zu zeigen. □

Diese zwei Sätze deuten darauf hin, dass mein Begriff des Homomorphismus ein vernünftiger Begriff ist. Vielleicht etwas naheligender ist der folgende Begriff

Definition 55. Sei R eine Relation von M^n nach M und R' eine Relation von N^n nach N. Eine Abbildung $M \to N$ heißt Morphismus der Relationen genau dann, wenn für alle $\overrightarrow{m} \in M^n$ und alle $a \in M$ gilt: $(\overrightarrow{m}, a) \in R$, dann ist $f^n(\overrightarrow{m}, f(a)) \in R'$.

Satz 5.12. *Seien (M, α) und N, β n–flache Räume.*

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \{(\overrightarrow{m}, a) | a \in \alpha(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{m}) \in M^n \wedge a \in M\} \\ R_\beta &= \{(\overrightarrow{n}, b) | a \in \beta(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) \in N^n \wedge b \in N\} \end{aligned}$$

die zugehörigen Relationen. Dann sind für $f \colon M \to N$ äquivalent:

1. *f ist ein Relationsmorphismus.*
2. *Für alle $\overrightarrow{m} \in M^n$ ist: $f(\alpha(\overrightarrow{m})) \subset \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$.*

Sei f ein Morphismus der Relationen R_α und R_β. Zu zeigen ist: Für jedes $\overrightarrow{m} \in M^n$ ist $f(\alpha(\overrightarrow{m})) \subset \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$. Sei also $x \in \alpha(\overrightarrow{m})$. Dann ist $(\overrightarrow{m}, x) \in R_\alpha$. Daher ist $(f^n(\overrightarrow{m}), f(x)) \in R_\beta$. Das heißt $f(x) \in \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$. Also ist $f(\alpha(\overrightarrow{m})) \subset \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$.
Zur Umkehrung: Gelte $f(\alpha(\overrightarrow{m})) \subset \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$ für alle $\overrightarrow{m} \in M^n$. Es sei $(\overrightarrow{m}, x) \in R_\alpha$. Dann ist $x \in \alpha(\overrightarrow{m})$. Da $f(\alpha(\overrightarrow{m})) \subset \beta(f^n\overrightarrow{m})$ für alle $\overrightarrow{m} \in M^n$. Es sei $(\overrightarrow{m}, x) \in R_\alpha$. Dann ist $x \in \alpha(\overrightarrow{m})$. Da $f(\alpha(\overrightarrow{m})) \subset \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$ ist, ist $f(x) \in \beta(f^n(\overrightarrow{m}))$. Daher ist $(f^n(\overrightarrow{m}), f(x)) \in R_\beta$. Dies zeigt die Behauptung. □

Folgerung 5.13. *Jeder Homomorphismus $f : M \to N$ von n- flachen Räumen ist ein Morphismus der zugehörigen Relationen.*

Dies ist klar.
Die Umkehrung gilt nicht:

Bemerkung 16 Ein Relationsmorphismus ist im allgemeinen kein Homomorphismus flacher Räume. □

Ich betrachte $A = \{a, b, c, d\}$ und eine Funktion $\alpha : A \to Pot(A)$ mit der Wertetabelle:

a	b	c	d
$\{a, b, c, d\}$	$\{b, d\}$	$\{c, d\}$	$\{d\}$

Sei $B = \{1, 2, 3, 4\}$ mit $\beta : B \ni i \mapsto \{k | k >= i\} \in Pot(B)$. $f : A \to B$ die Abbildung mit der Wertetabelle:

a	b	c	d
1	2	3	4

Wie man sieht ist f sicher ein Morphismus der Relation. Es ist $\beta(f(b)) = \beta(2) = \{2, 3, 4\}$ Aber $f(\alpha(b)) = f(\{b, d\}) = \{2, 4\}$. Daher ist f kein Homomorphismus. An dem Beispiel sieht man auch dass das Bild eines Unterraums unter einem Relationsmorphismus kein Unterraum ist. □

Sei $f : A \to B$ eine Bijektion. □

Satz 5.14. *Ist $f : A \to B$ ein Homomorphismus flacher Räume. Ist f als Abbildung bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung ein Homomorphismus flacher Räume.*

Sei $f : A \to B$ eine Bijektion. Dann gibt es ein $g : B \to A$ mit $g \circ f = 1_A$. Und es ist $f \circ g = 1_B$. Weiterhin ist offensichtlich g^n die Umkehrabbildung von f^n. Zu zeigen ist, dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow g^n & & \downarrow P(g) \\ A^n & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array}$$

Sei dazu $\overrightarrow{b} \in B^n$. Dann gibt es dazu ein $\overrightarrow{a} \in A^n$ mit $\overrightarrow{b} = f^n(\overrightarrow{a})$. Man erhält

$$\begin{aligned} g(\beta(\overrightarrow{b})) &= g(\beta(f^n(\overrightarrow{a}))) \\ &= g(f(\alpha(\overrightarrow{a}))) = \alpha(\overrightarrow{a}) \\ &= \alpha g^n(\overrightarrow{b}) \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen □

Hinweise:

6. Ich sollte den Begriff des Homomorphiismus unabhängig von den flachen Räumen untersuchen.
7. Es ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ eine abelsche Gruppe. Jeder Abbildung $M^n \xrightarrow{\alpha} Pot(M)$ entspricht genau eine Abbildung $M^n \xrightarrow{\alpha^*} Hom(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ich sollte mich für solche α interessieren, bei denen α^* ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

5.4 Rekursion für Funktionsalgebren

Definition 56. Das Paar (A, α) heißt n-stellige Funktionsalgebra, wenn A eine Menge und $\alpha : A^n \to A$ eine Funktion ist. $U \subset A$ heißt Unteralgebra, wenn $\alpha(U^n) \subset U$ ist.

Zu jeder Teilemnege $E \subset A$ gibt es eine kleinste Unteralgebra, die E enthält. Diese Unteralgebra bezeichne ich mit $[E]$. Ich sage auch $[E]$ erzeugt die Unteralgbra $[E]$.

Satz 5.15. *Seien (A, α) und (B, β) n- stellige Funktionsalgebren. Sind $f, g : A \to B$ zwei Homomorphismen und ist $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$, so ist $f(v) = g(v)$ für alle $v \in [E]$.*

Ich bezeichne mit $f^*(\overrightarrow{v}) := (f(v_1, \ldots, f(v_n)))$. Nach Voraussetzung ist $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$. Sei

$$T = \{v | v \in A \wedge f(v) = g(v)\}.$$

Ich zeige: T ist eine Unteralgebra. Sie muss E enthalten. Dann muss aber auch $[E] \subset T$ sein. Sei $\overrightarrow{v} \in T^n$. Dann folgt: $f(\alpha(\overrightarrow{v})) = \beta(f^*(\overrightarrow{v})) = \beta(g^*(\overrightarrow{v})) = g(\alpha(\overrightarrow{v}))$. Also ist $\alpha(\overrightarrow{v}) \in T$. Damit ist T eine Unteralgebra.

6 lineare Algebra

Die Begriffe, Gruppe, Ring Körper und Vektorraum sind in jedem Algebralehrbuch erklärt. Insbesondere setzen wir in diesem Kapitel den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen voraus. Später soll er konstruiert werden. Das heißt wir weisen nach, dass es den Körper $\mathbb{R}$ gibt

6.1 Erster Blick

> Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren. (Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Descartes: Seite 139)

In grauer Vorzeit ordneten unsere klugen Vorfahren zum ersten Mal Orten Zahlen zu. So stellten die Römer auf dem Forum Romanum den goldenen Meilenstein auf. Dort trugen sie die Entfernungen zu den wichtigsten Orten des Reiches ein. Dies war eine Wertetabelle der Entfernungsfunktion. Diese Abbildung ist nicht injektiv. Aus den Zahlen konnte Marcus nicht auf die Orte zurückschließen. Gäbe es nur eine Straße, die von Rom ausgeht, so könnte man aus der Zahl den Ort bestimmen. Da es viele Straßen gibt muss jedem Ort

1. eine Straße, an der der Ort liegt und
2. die Entfernung, die er von Rom hat zugeordnet werden.

Es werden also mindestens zwei Abbildungen, Messungen benötigt um brauchbares Abbild der Ebene zu erhalten. Seit dem ausgehenden Mittelalter und er Renaissance werden Erdkarten mit einem Gitternetz überzogen um die Orientierung möglich zu machen. Belehrt von diesen Geographen und René Descartes wählen wir in der Ebene, was immer das sei, ein Achsenpaar, welches sich rechtwinklig schneidet. Den Schnittpunkt bezeichnen wir mit 0 und nennen ihn Ursprung. Die Achsen werden so als x und y oder x_1 und x_2 Achse bezeichnet, dass sie mathematisch positiv orientiert sind. Das heißt: Stellen wir uns auf den Nullpunkt und schauen in die Richtung der x-Achse, so müssen wir uns um 90^0 im Gegenuhrzeigersinn drehen, um schließlich in Richtung der positiven y- Achse zu schauen.

Beide Geraden werden als orientierte Zahlengeraden aufgefasst. Ist ein Punkt P der Ebene gegeben, so kann man von ihm Lote auf die x und y Achse fällen. Dort stehen die reellen Zahlen p_1 und p_2. Das geordnete Zahlenpaar (p_1, p_2) wird Ortsvektor von dem Punkt P genannt oder kürzer Vektor und $\vec{p}$ geschrieben. Genauso entspricht bei fest gewählten Achsen jedem Zahlenpaar $p = (p_1, p_2)$ genau ein Punkt der Ebene. Will man sich im Raum zurechtfinden, so muss zusätzlich die Höhe angegeben werden.
Durch diese Zuordnung fassen wir ebene geometrische Objekte als Teilmengen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x|y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ auf. Manche Bilder können gerechnet werden. Und Rechnungen können wir im wörtlichen Sinn betrachten. Räumliche Objekte können als Teilmengen des $\mathbb{R}^3 = \{(x|y|z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$ gedeutet werden. Wir wollen diese Methode etwas mit Inhalt füllen und ein paar Beispiele betrachten.

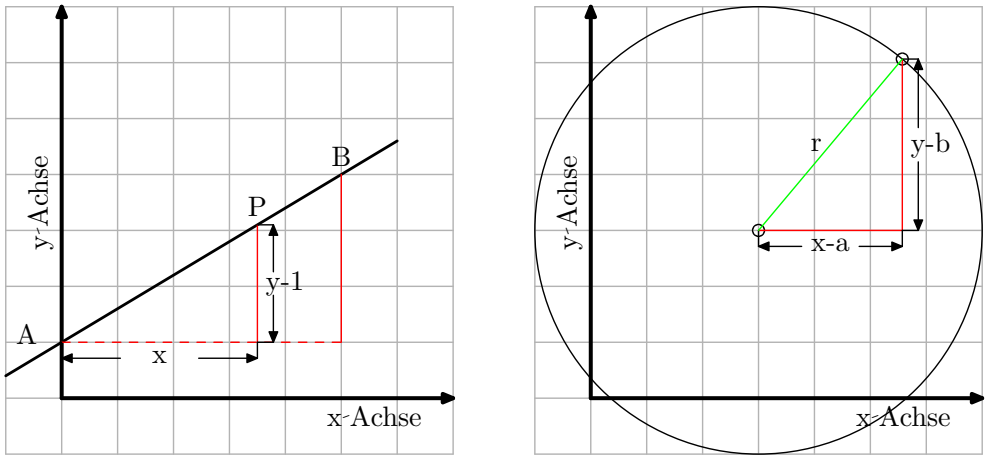


Abb. 6.1: Gerade und Kreis

Beispiele:

40. Betrachten wir die Gerade durch die Punkte $A(0|1)$ und $B(5|4)$. Wie kann man feststellen, ausrechnen , ob ein dritter Punkt $P(x|y)$ auf der Geraden liegt. Wir ziehen durch A eine Parallele zur x-Achse. Liegt P auf der Geraden durch A B, so muss der Strahlensatz gelten. Das heißt es gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{x} &= \frac{3}{5} \\ 5y - 5 &= 3x \\ 3x - 5y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Das heißt die Menge der Punkte, die auf unserer „wirklichen “ geraden Linie

liegen entspricht der Menge der Zahlenpaare, welche die Gleichung:

$$3x - 5y + 5 \quad = \quad 0$$

erfüllen. Was haben wir dadurch gewonnen? Wir haben ein Modell der Geraden. Ein Modell, mit dem wir und der Computer rechnen können. Ein Computer kann daher jetzt leicht entscheiden, ob ein Punktpaar auf der Geraden g liegt oder nicht. Durch die Modellierung von Punkte als Zahlenpaare können wir die Geometrie nun mit dem Werkzeugkasten der Arithmetik bearbeiten. Sie wird Rechnern und Computern zugänglich. Die Umkehrung ist aber auch nicht zu verachten. Im geometrischen, im Raum der Anschauung können wir nach Modellen für algebraische Strukturen suchen. Wir sind mutig und verallgemeinern obiges Ergebnis:

Definition 57. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dabei sollen a, b nicht beide zugleich 0 sein. Die Menge $g = \{(x|y)|ax+by+c = 0\}$ heißt Gerade. $ax+by+c = 0$ heißt Gleichung der Geraden.

Das Tripel $(a|b|c)$ ist durch die Punktmenge nicht eindeutig bestimmt. Multipliziert man die Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$ so gehört zur neuen Gleichung dieselbe Punktmenge.

Satz 6.1. *Sei $g = \{(x|y)|ax + by + c = 0\}$ und $h = \{(x|y)|a'x + b'y + c' = 0\}$. Dann sind äquivalent:*

a) $g = h$.

b) Es gibt ein $k \in \mathbb{R}$ mit $a' = k \cdot a$, $b' = b \cdot k$ und $c' = k \cdot c$.

2. $\Rightarrow$ 1. Dies ist klar. □

41. Betrachten wir wieder die Abbildung 6.1. Es ist ein Kreis um den Punkt (a, b) mit dem Radius r gezeichnet. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erkenne wir, das die Punkte des Kreises die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

erfüllen.

Aufgaben:

28. Erinnern Sie sich an die folgenden Aufgaben:
    a) Teile eine Strecke harmonisch in einem gegebenen Verhältnis r.
    b) Wie konstruiert man $\sqrt{14}$.
    c) Zeigen Sie: Im Dreieck teilt die innere und die äußere Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten.
29. Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q

a) $P(1|2)$, $Q(5|4)$.
b) $P(0|0)$, $Q(a|5)$
c) $P(a|b)$, $Q(1|1)$
d) $P(a|b)$, $Q(3a, 2b)$

30. Wie lauten die Gleichungen der Seiten des Dreiecks:
    a) $A(3|4)$, $B(5|6)$ und $C(1|8)$.
    b) $A(-2|-3)$, $B(6|1)$ und $C(0|3)$.
31. Gib den Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ an.
32. Löse allgemein: Gegeben sind zwei verschiedene Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$. Bestimme eine Gleichung der Geraden durch A und B.
33. Formuliere eine Bedingung wann zwei Geraden parallel sind.
34. Formuliere eine Bedingung, wann zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen.
35. Berechne allgemein den Mittelpunkt einer Strecke.
36. Zeige durch allgemeine Rechnung, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.
37. Eine Leiter stehe auf waagerechtem Boden und sei an eine vertikale Wand gelehnt. Was für eine Bahn beschreibt die mittlere Sprosse, wenn die Leiter abrutscht?

Satz 6.2. *Sind $A(x_0|y_0)$ $B(x_1|y_1)$ zwei verschiedene Punkte, so ist $g = \{(x|y)|(y_1 - y_0) \cdot x + (x_0 - x_1) \cdot y + x_1 y_0 - y_1 x_0 = 0\}$ die einzige Gerade durch A und B.*

6.2 Vektorräume

Wie sich der arithmetische Kalkül auf die Operationen der Geometrie bezieht

> Und gleich wie sich die gesamte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, das ja auch als eine Art der Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, dass sie auf Bekanntes führen, nichts anders zu tun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen.... Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Seite 139

Descartes scheint mir hier mutig auszudrücken, dass der algebraischen Struktur eine geometrische Struktur entsprechen muss. Der Rahmen in dem dies deutlich wird ist der Begriff des Vektorraums:

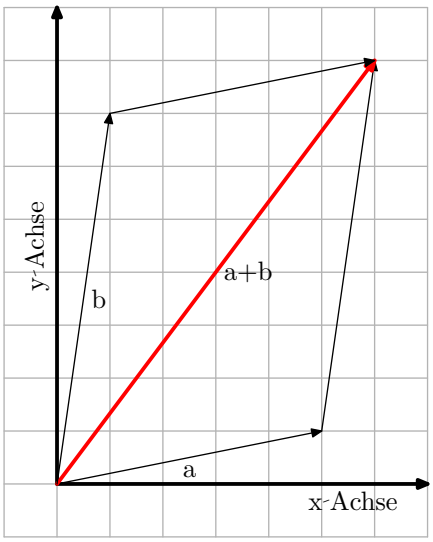


Abb. 6.2: Addition

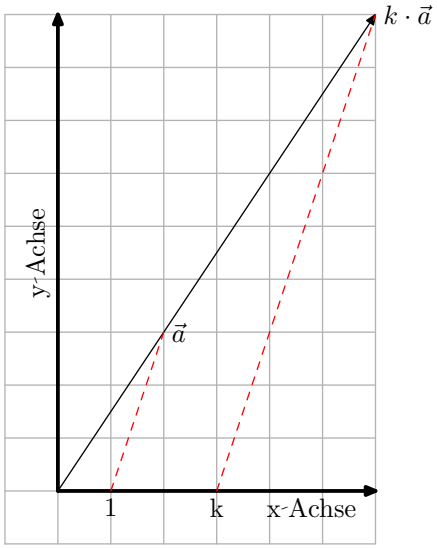


Abb. 6.3: Skalare Multiplikation

Definition 58. Sei K ein kommutativer Körper und V ein Menge. Außerdem seien $+$ und $*$ zwei Abbildungen:

$$+ : V \times V \ni (x, y) \mapsto x + y \in V$$
$$\cdot : V \times K \ni (x, k) \mapsto x \cdot k \in V$$

Das Tripel $(V, +, \cdot)$ heißt Vektorraum über dem Körper K, wenn folgendes gilt:

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
2. Für die Verknüpfungen $\cdot$ und $+$ gelten die folgenden Gesetze:
   a) Für alle $a, b \in V$ und alle $k \in K$ gilt: $(a + b) \cdot k = a \cdot k + b \cdot k$.
   b) Für alle $a \in V$ und $r, s \in K$ gilt: $a \cdot (r + s) = a \cdot r + a \cdot s$.
   c) Für alle $a \in V$ und alle $r, s \in K$ gilt: $a \cdot (rs) = (a \cdot r)s$.
   d) Für alle $a \in V$ gilt: $a \cdot 1 = a$.

Satz 6.3 (Rechenregeln). *1. Für alle $a \in V$ und alle $k \in K$ gilt: $0 \cdot k = 0$. $a \cdot 0 = 0$.*

2. Für alle $a \in V$ und alle $k \in K$ gilt: $(-a) \cdot k = a \cdot (-k) = -a \cdot k$.

Zu 1. Es ist $(0) \cdot k = (0 + 0) \cdot k = 0 \cdot k + 0 \cdot k$. Daher ist $0 \cdot k = 0$.
Zu 2. Genauso. □

15. März 2017

Sei in den folgenden Beispielen K ein beliebiger kommutativer Körper. Wem diese Allgemeinheit zu unheimlich ist, denke hier stets an die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Es wird dadurch aber nichts einfacher.
Das für uns wichtigste Beispiel ist:

Definition 59. $K^n := \{(x_1, \ldots, x_n\}|x_i \in K\}$ $\vec{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ heißt Vektor aus K^n und x_i ist seine $i$te Koordinate.

Für $n > 3$ gibt es keine unmittelbare anschauliche Interpretation mehr, aber wichtige Beispiele. Man stelle sich etwa ein Warenlager vor, in dem n Artikel geführt werden. Der augenblickliche Stand des Lagers wird durch ein geordnetes n Tupel beschrieben. Die Zahl x_i gibt an, wieviel vom $i$ten Artikel vorrätig ist. Falls x_i negativ ist, so sagt x_i wieviel bestellt werden muss.
Wir erklären auf K^n eine Addition.

Definition 60. $\vec{x}, \vec{y} \in K^n$. $\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n)$.

Im Falle des K^2 oder K^3 hat diese Addition eine anschauliche Bedeutung: $\vec{x}+\vec{y}$ ist die Diagonale, in dem von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramm.

Satz 6.4. $(K^n, +)$ *ist eine kommutative Gruppe.*

Man rechnet die Behauptung einfach nach.

Definition 61. Sei $r \in K$ und $\vec{x} \in K^n$. $r \cdot \vec{x} := (rx_1, \ldots, rx_n)$.

Man multipliziert also jede Koordinate mit der reellen Zahl r. Im Falle K^2 oder K^3 ergibt sich die altbekannte zentrische Streckung am 0 Punkt. Reden wir im algebraischen Zusammenhang von einem Element des K^n, so bezeichnen wir es als einen Vektor. Andernfalls, wenn mehr im geometrischen Sinne gesprochen wird, so sprechen wir auch von Punkten. Gemeint ist beidemal dasselbe.

Satz 6.5. *Es gilt:* K^n *ist mit den obigen Verknüpfungen ein Vektorraum*

Der Beweis besteht wieder im einfachen Nachrechnen.
Beispiele:

42. Ist X eine beliebige Menge so wird $Abb(X, K)$ zu einem Vektorraum. Die Addition zweier Funktionen ist auf folgende Weise definiert: $f + g : X \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in K$. Die Multiplikation mit einem Körperelement ist definiert: $f \cdot k : X \ni x \mapsto f(x) \cdot k \in K$. Ich bezeichne $abb(X, K)$ auch mit K^X.

43. In K^X bilden die Abbildungen für die $f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x \in X$ ist, selber wieder einen Vektorraum. Man sagt dies ist ein Unterraum. Ich bezeichne ihn mit $K^{(X)}$. .

Aufgaben:

38. Eine Folge heißt Fibonaccifolge, wenn für alle $n \geq 2$ gilt: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.
    a) Berechne die ersten 10 Glieder der Folge, wenn $f(0) = 4$ und $f(1) = 5$ ist.
    b) Zeige: Die Menge der Fibonaccifolgen bilden einen reellen Vektorraum.
    c) Seien f und g die folgenden Fibonaccifolgen: $f(0) = 1, f(1) = 0$ und $g(0) = 0, g(1) = 1$. Berechnen Sie jeweils die ersten 10 Glieder.
    d) Für die Fibonaccifolge h sei $h(0) = 2$ und $h(1) = 3$. Zeige $h = 2 \cdot f + 3 \cdot g$
    e) Zeige allgemein: Ist h eine beliebige Fibonaccifolge, so gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $h = f \cdot \alpha + g \cdot \beta$.

6.3 Geraden in V

Definition 62. Seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in V$ gegeben. Das geordnete Paar $(\vec{a}, \vec{b})$ heißt Pfeil von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$. Ein Pfeil definiert einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{b} - \vec{a}$.

In der Zeichnung begehen wir nun folgende „Schlampigkeit“. Es wird $\vec{b} - \vec{a}$ an den Pfeil von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ geschrieben. Eigentlich dürfte eine Vektorbezeichnung nur an einem Pfeil mit dem Anfang in $\vec{0}$ stehen.

Definition 63. Sei $V \ni \vec{b} \neq \vec{0}$. $g = \{\vec{x} | \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{b}, s \in K\} =: \vec{a} + K \cdot \vec{b}$ heißt Gerade durch $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

Die Geraden durch den Nullpunkt haben die Form $\vec{b} \cdot K$. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ heißen linear abhängig, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden durch den Nullpunkt liegen. Sie heißen linear unabhängig, wenn sie auf keiner gemeinsamen Geraden durch den Nullpunkt liegen.

Satz 6.6. *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.*
2. *Für alle $r, s \in K$ gilt: Ist $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ so ist $r = s = 0$. Die Null ist nur auf triviale Weise als Summe von Vielfachen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar.*
3. *Für alle $r, s, r', s' \in K$ und alle $\vec{x} \in V$ gilt: Ist $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b} = r'\vec{a} + s'\vec{b}$, so ist $r = r'$ und $s = s'$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Sei $\vec{0} = r\vec{a} + s\vec{b}$. Angenommen es ist $r \neq 0$. Dann kann man die Gleichung nach $\vec{a}$ auflösen und es ergibt sich: $\vec{a} = \frac{-s}{r}\vec{b}$. Also ist $\vec{a} \in \vec{b}K$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf keiner gemeinsamen Geraden durch den Nullpunkt liegen. Der Rest des Beweises sei Übung. □

Wir können jetzt leicht angeben, welche algebraische Bedeutung Parallelität hat.
Zwei Pfeile $(\vec{a}, \vec{b})$ und $(\vec{c}, \vec{d})$ heißen parallel, wenn $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{d} - \vec{c}$ linear abhängig sind. Seien $\vec{b}$ und $\vec{d}$ zwei Vektoren $\neq \vec{0}$. Die beiden Geraden $g = \vec{a} + K\vec{b}$ und $h = \vec{c} + K\vec{d}$ heißen parallel genau dann, wenn $\vec{b}$ und $\vec{d}$ linear abhängig sind.

Satz 6.7. *Seien $\vec{0} \neq \vec{a}, \vec{b} \in V$. Dann gilt:*

1. *Ist $g = \vec{a} + K\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus g beliebig, so ist $g = \vec{c} + K\vec{b}$. Die Gerade g kann in jedem ihrer Punkte angeheftet werden.*

2. *$g = \vec{a} + K\vec{b} = \vec{c} + K\vec{d} = h$ genau dann, wenn g und h einen gemeinsamen Punkt haben und g und h parallel sind.*

Zu 1.: Da $\vec{c} \in g$ ist, gibt es ein $k \in K$ mit $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b} \iff \vec{a} = \vec{c} - k \cdot \vec{b}$. Sei nun $\vec{x} \in \vec{c} + K\vec{b}$. Dann gibt es ein $s \in K$ mit $\vec{x} = \vec{c} + s\vec{b} = \vec{a} + k\vec{b} + s\vec{b} = \vec{a} + (k+s)\vec{b} \in \vec{a} + K\vec{b} = g$. Also ist $\vec{c} + K\vec{b} \subset \vec{a} + K\vec{b}$. Ist umgekehrt $\vec{x} \in \vec{a} + K\vec{b}$, also $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{b} = \vec{c} - k\vec{b} + s\vec{b} = \vec{c} + (s-k)\vec{b} \in \vec{c} + K\vec{b}$. Also ist auch $\vec{a} + K\vec{b} \subset \vec{c} + K\vec{b}$. Daher ist $\vec{a} + K\vec{b} = \vec{c} + K\vec{b}$.
Zu 2.: Seien zunächst die beiden Geraden gleich. Dann haben g und h sicher einen gemeinsamen Punkt. Es sind $\vec{c}$ und $\vec{c} + \vec{d} \in g$. Also ist $\vec{c} = \vec{a} + r\vec{b}$ und $\vec{c} + \vec{d} = \vec{a} + s\vec{b}$. Also ist $\vec{d} = (s - r)\vec{b}$. Also sind $\vec{d}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.
Zur Umkehrung:
Sei $\vec{u}$ ein gemeinsamer Punkt. Wegen Teil 1. des Satzes ist $g = \vec{u} + K\vec{b} = \vec{u} + K(k\vec{d}) = \vec{u} + K\vec{d} = h$. □

Folgerung 6.8. *Durch zwei Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es genau eine Gerade g und zwar $g = \vec{a} + K(\vec{b} - \vec{a})$. Sie heißt Zweipunkteform der Geradengleichung.*

Zunächst ist $\vec{} = \vec{a} + 0 \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ und es sind $\vec{b} = \vec{a} + 1 \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ beide aus g. Ist h eine weitere solche Gerade, dann ist h von der Form $h = \vec{a} + K\vec{c}$. Da $\vec{b} = \vec{a} + k \cdot \vec{c}$ mit $k \neq 0$ ist, ist $\vec{c} = \frac{1}{k} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ und also $h = \vec{a} + K(\vec{b} - \vec{a})$. □

Unsere abstrakten Geraden haben also die gleiche Eigenschaft wie unsere altbekannten geometrischen Geraden. Sie ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt.

Folgerung 6.9. *Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $\vec{a}$ gibt es genau eine parallele Gerade durch den Punkt.*

Dies sei Übung. □

Satz 6.10. *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die Vektoren $(\vec{b} - \vec{a})$ und $(\vec{c} - \vec{a})$ linear abhängig sind.*

Liegt $\vec{c}$ auf der geraden durch $\vec{a}, \vec{b}$, dann ist $\vec{c} = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a})$. Also ist $\vec{c} - \vec{a} = s \cdot (\vec{b} - \vec{a}$. Daher sind $(\vec{c} - \vec{a})$ und $(\vec{b} - \vec{a})$ linear abhängig. Die Umkehrung ist klar. □

In den folgenden Aufgaben ist der Körper K stets die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird.
Aufgaben:

39. Untersuchen Sie ob sich folgende Geraden schneiden. Berechnen Sie wenn möglich den Schnittpunkt.
    a) $g : \vec{x} = (2|1) + r(3|3)$, $h : \vec{x} = (10|0) + r(2|4)$.
    b) $g : \vec{x} = (3|0|5) + r(4|0| - 6)$, $h : \vec{x} = (9|0|7) + r(4|0|5)$.
    c) $g : \vec{x} = (3|0|9) + r(0|0|1)$, $h : \vec{x} = (9|0|7) + s(2|0| - 1)$.
40. a) Gegeben ist im K^2 ein Quadrat mit den Seitenlängen 2 ein Eckpunkt liegt im Nullpunkt, ein anderer auf $(2|0)$. Stellen Sie die Gleichungen der Diagonalen auf. Berechnen Sie den Schnittpunkt.
    b) Ein gleichseitiges Dreieck ist gegeben mit der Kantenlänge 3. Ein Eckpunkt liegt im Nullpunkt. Der andere liegt bei $(3|0)$. Stellen Sie die Gleichungen der Seitenhalbierenden auf. Berechnen Sie den Schnittpunkt.
41. Wie lauten die Gleichungen der Koordinatenachsen im K^3 in Parameterdarstellung.
42. Gegeben ist $g = (1|0|3) + K(4|4| - 6)$. Untersuchen Sie ob folgende Punkte auf g liegen. $\vec{p} = (1|0|3)$. $\vec{q} = (7|6| - 6)$.
43. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?
    a) $\vec{a} = (8| - 4)$, $\vec{b} = (-4|2)$.
    b) $\vec{a} = (2|0|6)$, $\vec{b} = (10|0|3)$.
    c) $\vec{a} = (6|1|5)$, $\vec{b} = (36|6|30)$.
44. Untersuchen Sie die folgenden Geraden auf Parallelität beziehungsweise Gleichheit.
    a) $g = (3|5,5| - 1) + K(4| - 3|6)$ und $h = (13| - 2|14) + K(-6|4,5| - 9)$.
    b) $g = (2|8|0) + K(0| - 2|5)$ und $h = (1|4|0) + K(0|0,4| - 1)$.

c) $g = (-1|6|0) + K(-3|2|-1)$ und $h = (2|4|1) + K(3|2|-1)$.

45. Von einem Dreieck sind die Seitengeraden gegeben. $g = (5|5|2) + K(2|4|2)$, $h = (1|1|-3) + K(2|0|3)$ und $k = (2|-9|1) + K(3|10|2)$. Berechnen Sie die Eckpunkte.

46. Beweisen Sie vektoriell:
    a) In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.
    b) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm.
    c) In jedem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt.

47. Geben Sie die Parameterform der Geraden an, die durch $(1|2|3)$ geht und parallel zu der Geraden $g = (1|-7|3) + K(1|-2|1)$ ist. Schneidet diese Gerade die $x_1 - x_2$–Ebene? Wenn ja wo?

6.4 Das natürliche Skalarprodukt

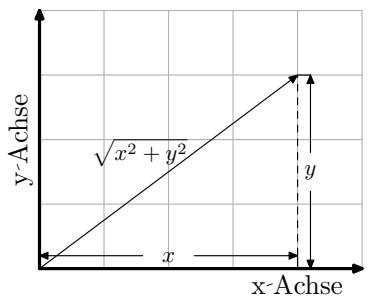


Abb. 6.4:

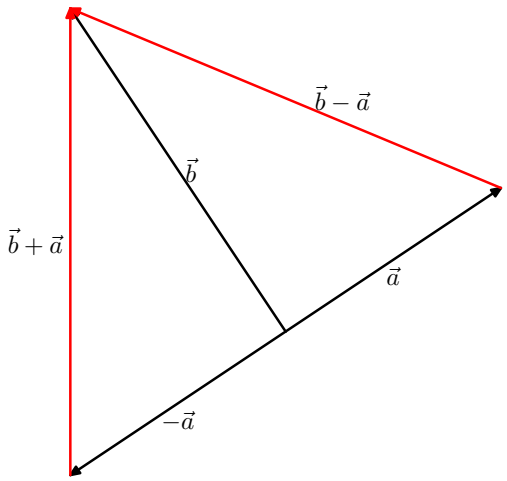


Abb. 6.5:

In diesem Abschnitt sei der Körper K stets der Körper der reellen Zahlen.

Definition 64. Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Die Zahl $||\vec{x}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ heißt Norm oder Betrag von $\vec{x}$.

Satz 6.11. *Es gilt:*

1. $||\vec{x}|| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.
2. *Für alle* $r \in \mathbb{R}$ *ist:* $||r \cdot \vec{x}|| = |r| \cdot ||\vec{x}||$.
3. *Für alle* $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *gilt:* $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$. *Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung.*

Die ersten beiden Eigenschaften sind leicht nachzurechnen. Die Dreiecksungleichung ist schwieriger einzusehen. Sie ergibt sich später aus der sogenannten Ungleichung von Cauchy, Schwarz.
Mit Hilfe des Betrages können wir erklären, was es bedeutet, dass zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Wie wir aus der Elementargeometrie wissen, ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Seitenhalbierende der Basis zugleich Mittelsenkrechte der Basis. Oder wenn der Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf dem Vektor $\vec{b}$ steht, so kann man das Dreieck in der Figur 6.5 zeichnen. Daraus ergibt sich ein algebraisches Kriterium für Senkrechtstehen. Diese algebraische Definition ist nun unabhängig von der geometrischen Anschauung.

Satz 6.12. *Im* $\mathbb{R}^n$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $||\vec{b} + \vec{a}|| = ||\vec{b} - \vec{a}||$.
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2 \\
\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= 0
\end{aligned}$$

Definition 65. Sei $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ heißt Skalarprodukt der Vektoren.

Satz 6.13 (Eigenschaften des Skalarproduktes). *Es gilt:*

1. $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$. *(Kommutativgesetz)*

2. $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b}$. *Distributivgesetz.*
3. $(r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$.
4. $\vec{a} \circ \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$.
5. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$.

Zum Beweis muss man die Behauptungen einfach nachrechnen.

Definition 66. Wir sagen $\vec{a}$ ist orthogonal zu $\vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt. In Zeichen: $\vec{a} \perp \vec{b}$. Ist U eine Menge, so heißt $U^\perp := \{\vec{x} | \vec{u} \circ \vec{x} = 0 \text{ für alle } \vec{u} \in U\}$, der zu U gehörende Orthogonalraum.

Satz 6.14. *Sei U eine Menge. Dann gilt:*

1. *Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{x} \in U^\perp$ ist $r \cdot \vec{x} \in U^\perp$.*
2. *Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in U^\perp$ ist $\vec{x} + \vec{y} \in U^\perp$.*

Erfüllt eine Untermenge des $\mathbb{R}^n$ die beiden Eigenschaften 1. und 2. dieses Satzes, so heißt diese Untermenge Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Beispiele:

1. Es sei $n = 3$ und $U = \{\vec{0}\}$. Dann ist $U^\perp = \mathbb{R}^3$.
2. Sei $U = \{(1|1|-1)\}$. Dann ist $U^\perp = (1|0|1)\mathbb{R} + (0|1|1)\mathbb{R}$.
3. $U = \{(1|1|-1), (0|1|1)\}$. Dann ist $U = (-1|1|0)\mathbb{R}$. Dies ist eine Gerade durch den Ursprung.

Definition 67. Sei $\vec{a}$ ein Vektor $\neq \vec{0}$. Der Vektor $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ heißt Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$. Jeder Vektor auf der Geraden $\vec{a}\mathbb{R}$ lässt sich als Vielfaches des Einheitsvektors schreiben.

Projektion von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$.

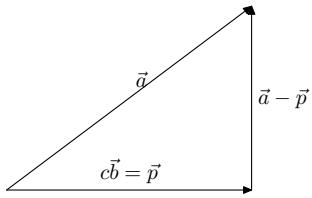


Abb. 6.6: Projektion

Gesucht ist ein Vektor $\vec{p}$, der die Richtung von $\vec{b}$ hat , so dass $\vec{a}-\vec{p}$ senkrecht auf $\vec{p}$ steht. Es muss also gelten: $\vec{p}=c\cdot\vec{b}$ und $\vec{p}\circ(\vec{b})=0$. Es gilt also

$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{b}c)\circ\vec{b} &= 0\\ c &= \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\vec{b}\circ\vec{b}}\\ \vec{p} &= \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\vec{b}\circ\vec{b}}\cdot\vec{b} \qquad (6.1)\end{aligned}$$

Lässt man sich im $\mathbb{R}^2$ von der Zeichnung leiten, so erhält man: $|\vec{p}| = |\vec{a}|\cdot\cos(\alpha) = |\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\vec{b}\circ\vec{b}}|\cdot||\vec{b}||$. Oder, wenn man das Vorzeichen der Cosinus Funktion mit berücksichtigt so erhält man:

$$\vec{b}\circ\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha). \qquad (6.2)$$

Diese Gleichung, die im $\mathbb{R}^2$ sicher gültig ist, motiviert uns nun einen Winkel im R^n zu definieren. Nun nimmt aber die Cosinusfunktion nur Werte zwischen -1 und 1 an. Folgende Ungleichung ist also für unser Definitionsvorhaben sehr wichtig:

Satz 6.15 (Ungleichung von Cauchy). *Für alle $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ gilt:*

$$|\vec{a}\circ\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.

$(\vec{a}+x\vec{b})\circ(\vec{a}+x\vec{b})\geq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Das heißt: $\vec{a}\circ\vec{a}+(2\cdot\vec{a}\circ\vec{b})x+(\vec{b}\circ\vec{b})x^2\geq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Diese quadratische Funktion hat also höchstens eine Nullstelle. Das heißt die Diskriminante ist ≤ 0. Also ist $4(\vec{a}\circ\vec{b})^2-4(\vec{b}\circ\vec{b})\cdot(\vec{a}\circ\vec{a})\leq 0$. Wir erhalten $|\vec{a}\circ\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. □

Folgerung 6.16 (Dreiecksungleichung). $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}+\vec{b}|$ *für alle $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.*

Es ist $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\circ(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\circ\vec{b}+2\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{b}\leq|\vec{a}|^2+2|\vec{a}\circ\vec{b}|+|\vec{b}|^2\leq|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$. Hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Mit der Ungleichung von Cauchy und Schwarz haben wir jetzt die Möglichkeit, zu erklären, was der Winkel zwischen zwei Vektoren ist. Und zwar ist

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \leq \quad 1 \tag{6.3}$$

Also gibt es genau eine Zahl α zwischen 0 und π, mit $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Diese Zahl bezeichnet man als Winkel zwischen den Vektoren.
Aufgaben:

48. Berechne $\vec{a} \circ \vec{b}$ für folgende Vektoren.
    a) $\vec{a} = (2|-1), \vec{b} = (-1|1)$.
    b) $\vec{a} = (-1|-2|3), \vec{b} = (-1|3|4)$.
49. Welche der folgenden Vektorpaare sind orthogonal?
    a) $\vec{a} = (1|-1|1), \vec{b} = (2|1|5)$
    b) $\vec{a} = (-5|2|7), \vec{b} = (-1|3|4)$.
50. Bestimme zu folgenden Mengen U die zugehörige Orthogonalmenge.
    a) $U = \{(5|-1|3)\}$.
    b) $U = \{(-1|1|1), (3|1|2)\}$.
51. Beweise: In einem Rombus schneiden sich die Diagonalen senkrecht.
52. Schneiden sich in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht, dann ist das Parallelogramm ein Rombus.
53. Beweise den Satz des Thales vektoriell.
54. Gegeben ist das folgende Dreieck mit den Ortsvektoren: $\vec{a} = (4|2|1), \vec{b} = (6|4|-1), \vec{c} = (5|-3|-2)$.
    a) Berechne sämtliche Winkel im Dreieck.
    b) Berechne den Flächeninhalt.
55. a) Zeige: Sind zwei Vektoren orthogonal und $\neq \vec{0}$, so sind sie linear unabhängig.
    b) Zeige allgemeiner: Sind $\vec{a}_1, \ldots, \ldots \vec{a}_n$ Vektoren, die paarweise orthogonal sind, und sind $c_1, \ldots, c_n$ Zahlen mit $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \vec{a}_i = \vec{0}$, so ist $c_1 = \ldots c_n = 0$.
56. Berechnen Sie in den folgenden Fällen die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die senkrechten Projektionen von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$ und umgekehrt.
    a) $\vec{a}(2|-1), \vec{b} = (-1|1)$.
    b) $\vec{a} = (2|-1|5), \vec{b} = (-1|1|1)$.

c) $\vec{a} = (r|3| - 1), \vec{b} = (2r| - 3|7)$.

57. Für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aus dem $\mathbb{R}^n$ gelten folgende Beziehungen:
    a) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.
    b) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b}$.
    c) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$. Zeigen Sie diese Gleichungen und deuten Sie die Gleichungen geometrisch.
58. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ seien drei Vektoren mit $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{c}$. Ist dann notwendigerweise $\vec{b} = \vec{c}$?
59. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras, den Höhensatz und den Kathetensatz vektoriell.
60. $\vec{a}, \vec{b}$ seien Vektoren $\neq \vec{0}$. Dann ist $\vec{a}$ genau dann orthogonal zu $\vec{b}$, wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $|\vec{a} + c\vec{b}| \geq |\vec{a}|$. Was hei t dies geometrisch?
61. Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ die Gerade $g = (5|1) + (1|2)\mathbb{R}$.
    a) Stelle die Gleichung der Geraden auf, die auf g senkrecht steht und durch den Nullpunkt geht.
    b) Welchen Abstand hat der Nullpunkt von g?
    c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks zwischen den Koordinatenachsen und der Geraden g?
    d) Welchen Winkel schlie t g mit der x Achse beziehungsweise der y Achse ein? Wie lang sind die Seitenhalbierenden?
    e) Berechnen Sie den Mittelpunkt des Umkreises.
62. Gegeben ist die Punktmenge $M = \{(x|y)|3x + 5y = 7; x, y \in \mathbb{R}\}$
    a) Zeige: M ist eine Gerade g.
    b) Die Gerade soll an der x Achse gespiegelt werden. Welche Geradengleichung entsteht?
    c) Die Gerade soll am Punkt $P(4|4)$ gespiegelt werden. Was ist ihr Spiegelbild?
    d) Welchen Abstand hat $Q(3| - 2)$ von der Geraden?
63. Zeige allgemein:
    a) Die Punktmenge $M = \{ax + by + c|a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}$ stellt eine Gerade dar.
    b) Berechne allgemein den Abstand der Geraden vom Nullpunkt.
64. Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g = (1|1|6) + (3| - 1|2)\mathbb{R}$.
    a) Fälle vom Nulpunkt das Lot vom Punkt $\vec{p} = (1|1|1)$ auf g. Wie weit ist $\vec{p}$ von g entfernt?
    b) g soll senkrecht auf die $x - y$ Ebene projeziert werden. Die Projektion sei h. Welche Entfernung hat h vom Nullpunkt?

c) Die Gerade g soll an der $x-y$ Ebene gespiegelt werden. Wie groß ist der Winkel zwischen g und ihrem Spiegelbild?

d) Welche Punkte von g haben vom Nullpunkt den Abstand 10?

65. Gegeben sind die Geraden $g = (5|-3|4) + (2|-1|2)\mathbb{R}$ und $h = (0|2|-5) + (3|-1|4)\mathbb{R}$.

    a) Zeigen Sie: Die Geraden haben keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel. Sie sind also windschief.

    b) Berechnen Sie einen Vektor, der auf beiden Geradenrichtungen senkrecht steht.

    c) Welchen Abstand haben die Geraden?

Wo liegen alle Punkte, die vom Ursprung den Abstand 5 haben?. Dies ist sicher der Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 5, also $K(\vec{0}, 5)$. Man überlegt sich, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dass $K(\vec{0}, 5) = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x^2 + y^2 = 5\}$. Hat der Mittelpunkt des Kreises M die Koordinaten $(x_0|y_0)$, so ist die Kreislinie um M mit Radius R also $K(M, r) = \{\vec{x}|\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. Dies ergibt sich wieder aus dem Satz des Pythagoras, oder einfach aus $|\vec{x} - \vec{m}| = r$. Aufgaben:

66. Zeige: Der Punkt (x, y) liegt genau dann auf dem $K((2|\frac{-3}{2}), \frac{7}{2}$, wenn er die folgende Gleichung erfällt: $x^2 + y^2 - 4x + 3y - 6 = 0$.

67. Wo liegen die Punkte $(x|y)$ für die $x^2 + y^2 > 36$ und $(x-2)^2 + (y+3)^2 < 64$ gilt?

68. Die Punkte der Menge K mögen die folgende Gleichung erfüllen. Zeige: K ist ein Kreis. Berechne den Mittelpunkt und den Radius des Kreises.

    a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.

    b) $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 70 = 0$.

    c) $2x^2 + 2y^2 + x - 7y = 0$.

69. Berechne die Entfernungen der Mittelpunkte für die beiden Kreise:

    a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0$

    b) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 24 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 29 = 0$.

70. Bestimme Mittelpunkt und Radius für den Umkreis des Dreiecks:

    a) $A(-2|3), B(0|-3), C(4|1)$.

    b) $A(-3|-1), B(3|-2), C(2|1)$.

71. Wir untersuchen die Menge der Punkte $\mathbb{M}$, welche die folgende Bedingung erfüllen:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

    Es sei $D = b^2 + c^2 - 4ad$. Zeige:

a) Ist $D < 0$, so ist $\mathbb{M} = \emptyset$.
b) Ist $D = 0$, so enthält $\mathbb{M}$ genau einen Punkt.
c) Ist $D > 0$, so ist $\mathbb{M}$ ein Kreis. Welchen Mittelpunkt hat er und welchen Radius?

72. Bestimme den zu dem Kreis $5x^2 + 5y^2 + 24x - 32y - 9 = 0$, welcher
    a) die x Achse berührt.
    b) Durch den Nullpunkt geht.
    c) Durch den Punkt $A(|1|2)$ geht.

73. Zeige, dass die Gerade $y = 5 - 2x$ Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = 5$ ist (Hat nur einen Schnittpunkt mit dem Kreis). Berechne den Berührpunkt und weise nach, dass die Verbindungsstrecke: Mittelpunkt– Berührpunkt senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden steht.

6.5 Ebenen

6.5.1 Ebenen im K^n

Zwei Bleistifte werden von einem Punkt aus in verschiedenen Richtungen des Raumes gespreizt. über die Bleistifte kann man einigermaßen stabil ein Blatt Papier legen. Mathematischer bedeutet das: Durch zwei verschieden gerichtete Geraden durch den Nullpunkt gibt es genau eine Ebene durch den Nullpunkt. Um dies auf den K^n zu übertragen, muss der Begriff der Ebene zunächst geeignet definiert werden.

Definition 68. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b} \in K^n$, dann heißt $U = \vec{a}K + \vec{b}K = \{\vec{a}r + \vec{b}s | r, s \in K\}$ der von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannte Unterraum. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig, so heißt $\vec{a}K + \vec{b}K$, die von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannte Ebene durch den Nullpunkt.

Satz 6.17. *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in K^n$ und $U = \vec{a}K + \vec{b}K$. Dann gilt:*

1. *Für alle $\vec{y}, \vec{x} \in U$ ist $\vec{x} + \vec{y} \in U$.*
2. *Für alle $x \in U$ und alle $r \in K$, ist $\vec{x}r \in U$.*

Man fasst diese Eigenschaften zusammen, wenn man sagt: U ist ein Unterraum von K^n.

Der Beweis ist eine einfache Übung. □

Satz 6.18. *Seien $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig und $\vec{c} \in U = \vec{a}K + \vec{b}K$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.*
2. *$U = \vec{a}K + \vec{b}K$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Es ist $\vec{c} \in U$. Also ist $\vec{c} = \vec{a}s + \vec{b}r$. Wäre $r = 0$, so wären $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear abhängig. Also kann man die Gleichung nach $\vec{b}$ auflösen. $\vec{b} = \frac{1}{r}(\vec{c} - \vec{a}s) \in \vec{a}K + \vec{c}K$. Also ist $\vec{b}K \subset \vec{a}K + \vec{c}K$. Damit ist aber auch $\vec{a}K + \vec{b}K \subset \vec{a}K + \vec{b}K$. Die umgekehrte Inklusion gilt sowieso und damit ergibt sich die Gleichheit. 2. $\Rightarrow$ 1. Dies sei Übung. □

Folgerung 6.19. *Ist $U = \vec{a}K + \vec{b}K$ eine Ebene durch den Nullpunkt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\vec{c}, \vec{d}$ sind linear unabhängig.*
2. *$U = \vec{c}K + \vec{d}K$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Da $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig sind können nicht beide von $\vec{a}$ abhängen. Wir dürfen also $\vec{a}$ und $\vec{c}$ als linear unabhängig annehmen. Also ist nach dem Satz vorher $U = \vec{a}K + \vec{c}K$. Nun benutzen wir die lineare Unabhängigkeit von $\vec{c}$ und $\vec{d}$ und abermals den Satz. Dann ist $U = \vec{c}K + \vec{a}K = \vec{c}K + \vec{d}K$. Das wurde behauptet.
2.$\Rightarrow$ 1. Übung. □

Definition 69. Seien $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig und $\vec{a} \in K^n$. Die Punktmenge $\{+\vec{x} | \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}r + \vec{c}s, r, s \in K\}$ heißt die von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Ebene durch $\vec{a}$. Diese Form der Ebenengleichung nennt man Parameterform der Ebene, oder auch Punkt- Richtungsform der Ebene . $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind die Richtungsvektoren und $\vec{a}$ der Punkt. Jede Ebene definiert auf folgende Weise eine eindeutig bestimmte Ebene durch den Nullpunkt. Sei $E = \vec{a} + \vec{b} \cdot K + \vec{c} \cdot K$ $E_0 := \{\vec{x} - \vec{a} | \vec{x} \in E\} = \vec{b}K + \vec{c}K$. Zwei Ebenen heißen parallel, wenn die zugehörigen Nullpunktsebenen gleich sind.

Satz 6.20. *Sei $E = \vec{a} + \vec{b}K + \vec{c}K$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\vec{u} \in E$.*

2. $E = \vec{u} + \vec{b}K + \vec{c}K$.

1. folgt 2.
Es sei $\vec{u} \in E$. Dann ist $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}r + \vec{c}s$. Also ist $\vec{a} = \vec{u} - \vec{b}r - \vec{c}s$. Also folgt für ein beliebiges $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}v \in E$. $\vec{x} = \vec{u} + \vec{b}(t-r) + \vec{c}(v-s)$. Das heißt $\vec{x} \in \vec{u} + \vec{b}K + \vec{c}K$. Die umgekehrte Inklusion folgt genauso. Wir können also die Ebene in jedem ihrer Punkte anheften.
2. folgt 1. Dies ist selbstverständlich. □

Satz 6.21. *Durch drei Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, die nicht auf einer Geraden liegen geht genau eine Ebene und zwar $E = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})K + (\vec{c} - \vec{a})K$. Dies ist die Dreipunkteform der Ebene.*

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen sicherlich auf der Ebene E. Es sei $H = \vec{d} + \vec{f}K + \vec{g}K$ eine weitere Ebene mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in H$. Dann ist $E_0 = (\vec{b} - \vec{a})K + (\vec{c} - \vec{a})K$ und $H_0 = \vec{f}K + \vec{g}K$. Und es ist $\vec{a} = \vec{d} + \vec{f}r_1 + \vec{g}s_1$, $\vec{b} = \vec{d} + \vec{f}r_2 + \vec{g}s_2$. Daher ist $\vec{b} - \vec{a} \in H_0$. Genauso liegt $\vec{c} - \vec{a} \in H_0$. Da $(\vec{b} - \vec{a})$ und $(\vec{c} - \vec{a})$ linear unabhängig sind, denn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen nicht auf einer Geraden, daher $E_0 = (\vec{b} - \vec{a})K + (\vec{c} - \vec{a})K = H_0$. Also ist $H = \vec{d} + \vec{f}K + \vec{g}K = \vec{a}K + H_0 = \vec{a} + E_0 = E$. □

Satz 6.22. *Äquivalent sind folgende Aussagen.*

1. *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig.*
2. *Für alle $r, s, t \in K$ gilt: Ist $\vec{a}r + \vec{b}s + \vec{c}t = \vec{0}$, so ist $r = s = t = 0$. Der Nullvektor ist nur auf eine einzige Art als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar.*
3. *Für alle $\vec{x} \in K^n$ gilt: Ist $\vec{x} = \vec{a}r + \vec{b}s + \vec{c}t = \vec{a}r' + \vec{b}s' + \vec{c}t'$, so ist $r = r'$, $s = s'$ und $t = t'$.*

Wiederholen Sie den entsprechenden Satz über die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren und beweisen Sie: 1.$\Rightarrow$ 2.$\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2.
Zu 2.$\Rightarrow$ 1. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ müssen linear unabhängig sein, wegen dem entsprechenden Satz über die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren. Ist also eine Ebene durch den Nullpunkt gegeben, die $\vec{b}$ und $\vec{c}$ enthält, so ist $E_0 = \vec{b}K + \vec{c}K$, wären $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, so wäre $\vec{a} \in E_0$. das hieße $\vec{a} = \vec{b}r + \vec{c}s$ und also $\vec{0} = \vec{a}1 - \vec{b}r - \vec{c}s$ und $1 \neq 0$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit, die in 2. verlangt ist. □

Wir können nun leicht entscheiden, wann 4 Punkte auf einer Ebene liegen.

Satz 6.23. *Vier Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ liegen in einer Ebene genau dann, wenn $(\vec{b} - \vec{a}), (\vec{c} - \vec{a})$, und $(\vec{d} - \vec{a})$, linear abhängig sind.*

Seien zunächst $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aus der Ebene $E = \vec{a} + E_0$, wobei E_0 eine Ebene durch den Nullpunkt ist. $\vec{a}$ darf als Anheftpunkt genommen werden, da $\vec{a}$ aus der Ebene ist. Es ist $\vec{b} \in E$. Daher ist $\vec{b} = \vec{a} + \vec{f_1}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{f_2}$ und $\vec{d} = \vec{a} + \vec{f_3}$. Dabei sind $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ und $\vec{f_3} \in E_0$. Also ist $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{a}$ und $\vec{d} - \vec{a} \in E_0$. Das bedeutet aber, dass diese drei Vektoren linear abhängig sind.
Nun zur Umkehrung: Es gibt eine Ebene durch den Nullpunkt E_0 mit $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{a}$ und $\vec{d} - \vec{a} \in E_0$. Daher sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d} \in E = \vec{a} + E_0$. □

Satz 6.24. *Sei V ein Vektorraum und a,b,c drei linear unabhängige Vektoren und U=aK+bK+cK der von a,b,c erzeugte Unterraum. Für ein d in U sind äquivalent:*

1. *d,b,c sind linear unabhängig.*
2. *U = dK + bK +cK*

1. folgt 2.: Es ist $d = a\alpha + b\beta + c\gamma$ Es ist $\alpha \neq 0$, da die drei Vektoren d, b, c linear unabhängig sind. Daher ist $a = d + b(-\beta') + c(-\gamma')$. Es ist $dK + bK + cK$ Teilmenge von $aK + bK + cK$ Sei umgekehrt $X = ar + bs + ct$ in U. Dann ist $x = d + b(\beta') + c(-\gamma') + bs + ct$ in $dK + bK + cK$. □

Folgerung 6.25. *Seien a, b, c linear unabhängige Vektoren und $U = aK + bK + cK$. Sind $d, e, f \in U$ drei Vektoren, so sind äquivalent:*

1. *d, e, f sind linear unabhängig.*
2. *$U = dK + eK + fK$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Mindestens einer der drei Vektoren d, e, c ist von den Vektoren b, c linear unabhängig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass dies d ist: Dann ist nach Satz 6.24 $U = dK + bK + cK$. Von den Vektoren e und f ist mindestens einer von d und c linear unabhängig. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass dies e ist. Nach Satz 6.24 folgt wieder $U = dK + eK + cK$. f ist aber von d, e unabhängig. Daher folgt $U = dK + eK + fK$. Dies war zu zeigen.
2. $\Rightarrow$ 1. Ist leicht. □

Die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in K^3$ sind sicher linear unabhängig, wie man leicht sieht. Sie liegen nicht auf einer gemeinsamen Ebene durch den Nullpunkt. Sind also $\vec{a}, \vec{b} \in K^3$ gegeben, so liegt mindestens einer der Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nicht in $\vec{a}\mathbb{R} + \vec{b}\mathbb{R}$.
Andererseits gilt:

Satz 6.26. *Seien*
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in K^3$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sind linear unabhängig.*
2. $\vec{a}K + \vec{b}K + \vec{c}K = K^3$. *Die drei Vektoren bilden eine Basis des* $\mathbb{R}^3$.

6.6 Basis Dimension

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V_K ist ein Unterraum, wenn mit $a, b \in V$ und $k \in K$ auch $a - b$ und $a \cdot k \in V$ sind. Ich bezeichne diese Situation durch $U \hookrightarrow V_K$.

Satz 6.27.
1. *Eine Teilmenge U des Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum, wenn U gegenüber der skalaren Multiplikation und der Addition abgeschlossen ist.*
2. *Der Durchschnitt von Unterräumen ist eine Unterraum.*
3. *Zu jeder Teilmenge $A \subset V_K$ gibt es einen kleinsten Unterraum, der A enthält.*
4. *Sind $U, W \hookrightarrow V_K$, so ist $U \cap W$ der größte Unterraum von V, der in U und in W enthalten ist.*
5. *Sind $U, W \hookrightarrow V$ so ist die Menge $U + V = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ ein Unterraum. Es ist der kleinste Unterraum, in dem U und W enthalten sind.*

Unter einer *Linearkombination aus A* versteht man jede endliche Summe $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i k_i$ mit $k_i \in K$ und $a_i \in A$. Eine solche Linearkombination heißt *trivial* wenn alle $k_i = 0$ sind.

Satz 6.28. *Der kleinste Unterraum von V_K, der A enthält, ist die Menge der Linearkombinationen aus A. Er heißt der von A erzeugte Unterraum. Wir bezeichnen ihn mit $[A]$.*

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen den Vektorräumen heißt Homomorphismus, wenn

- Für alle $a, b \in V$ gilt: $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
- Für alle $a \in V$ und alle $k \in K$ gilt: $f(ak) = f(a)k$.

Ist $f : V \to W$ ein Homomorphismus, so heißt $f^{-1}(0)$ der Kern von f $f(V)$ heißt Bild f.

Satz 6.29. *Die Identität ist ein Homomorphismus und die Verkettung von Homomorphismen ist ein Homomorphismus.*

Sind U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V so ist die Menge $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ein Untervektorraum. Sie heißt die Summe der Untervektorräume. Es ist der kleinste Unterraum, der U_1 und U_2 enthält. Ist außerdem $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ so heißt $U_1 + U_2$ direkte Summe von U_1 und U_2. Sie wird $U_1 \oplus U_2$ geschrieben.

Satz 6.30. *Zu jedem Unterraum $U \hookrightarrow V$ gibt es einen Unterraum $W \hookrightarrow V$ mit $U \oplus W = V$.*

Sei $\mathbf{W} = \{W | W \hookrightarrow V \text{ mit } W \cap U = \{0\}\}$. Diese Menge ist halbgeordnet. Ist $(W_i | i \in I)$ eine Kette in $\mathbf{W}$, so ist auch $\bigcup\limits_{i \in I} W_i \in \mathbf{W}$. Also besitzt $\mathbf{W}$ ein maximales Element W^*. Es ist $U \oplus W^* = V$. Angenommen es gäbe ein $v \notin W^* \oplus U$. Dann wäre $vK \oplus W^* \cap U = \{0\}$ im Widerspruch zur Maximalität von W^*. $\square$

Folgerung 6.31. *ZU jedem Unterraum $U \hookrightarrow V$ gibt es ein $f : V \to U$ mit $Id_U = f \circ \iota$.*

Satz 6.32. *Zu jedem Vektorraum V gibt es eine Familie $(v_i | i \in I)$, derart dass $V = \bigoplus\limits_{i \in I} v_i K$.*

6.7 Projektive Geometrie

6.7.1 Perspektive

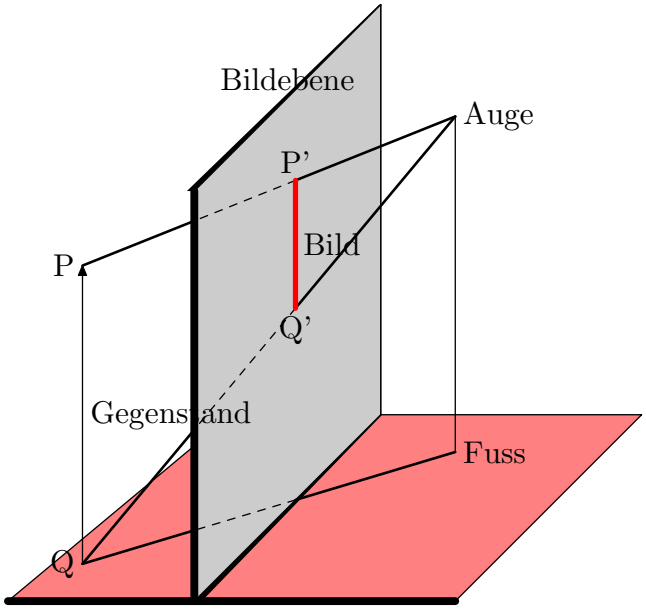


Abb. 6.7: Perspektive

Sei E eine Ebene die durch die Gleichung $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ bestimmt ist. $\vec{a}$ sei der Augpunkt, der nicht in der Ebene ist. Ist $\vec{p} \neq \vec{a}$ so definieren die beiden Punkte eine Gerade $g = \vec{a} + (\vec{p} - \vec{a}) \cdot K$. Falls es einen Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen gibt, so erfüllt dieser Punkt $\vec{p}'$

$$\vec{p}' = \vec{a} + (\vec{p} - \vec{a}) \cdot r \text{ mit } r \in K \tag{6.4}$$

die Gleichung der Ebene. Es ist daher:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ (\vec{a} + (\vec{p} - \vec{a}) \cdot r - \vec{b}) &= 0 \\
r &= \frac{\vec{n} \circ (\vec{b} - \vec{a})}{\vec{n} \circ (\vec{p} - \vec{a})} \\
\vec{p}' &= \vec{a} + (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{\vec{n} \circ (\vec{b} - \vec{a})}{\vec{n} \circ (\vec{p} - \vec{a})}
\end{aligned}$$

Das heißt für $\vec{n} \circ (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ gibt es keinen Bildpunkt.

Satz 6.33. *Ist $\vec{n} \neq 0$, und H der Orthogonalraum von $\vec{n}$, so definiert* **??** *eine Abbildung $f : V \setminus H \to V$, mit folgender Eigenschaft. Sind $\vec{p}, veca_1 \dots \vec{a_n} \notin H$ und liegt $\vec{p}$ in dem von $\vec{a_1}$ bis $\vec{a_n}$ erzeugten affinen Unterraum, so liegt $f(\vec{p})$ in dem von den $f(\vec{a_1}) \dots f(\vec{a_n})$ erzeugten affinen Unterraum.*

Ich vereinfache zunächst die Gleichung **??**, indem ich den Fall betrachte, das $\vec{a} = 0$ ist. Außerdem ist es keine Einschränkung, wenn ich $\vec{n} \circ \vec{n} = 1$ voraussetze. Dann vereinfacht sich die Gleichung **??** zu

$$f(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \frac{1}{\vec{n} \circ \vec{p}}. \tag{6.5}$$

Die $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ mögen also einen affinen Raum aufspannen, wobei alle nicht in der Hyperebene H, dem Orthogonalraum von $\vec{n}$ liegen. Es gelte $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a_i}\alpha_i$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ \vec{p} &= \sum_{i=1}^{n} (\vec{n} \circ \vec{a_i})\alpha_i \\
f(\vec{p}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \frac{\alpha_i \vec{n} \circ \vec{a}_i \alpha_i}{\vec{n} \circ \vec{a}_i \alpha_i} \right) \cdot \frac{1}{\vec{n} \circ \vec{p}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\vec{a}_i) \frac{\alpha_i \vec{n} \circ \vec{a}_i \alpha_i}{\vec{n} \circ \vec{p}} && (6.6) \\
& && (6.7)
\end{aligned}$$

Die Summe der Koeffizienten bei den $\vec{a}_i$ ist 1. Daraus ergibt sich die Behauptung.

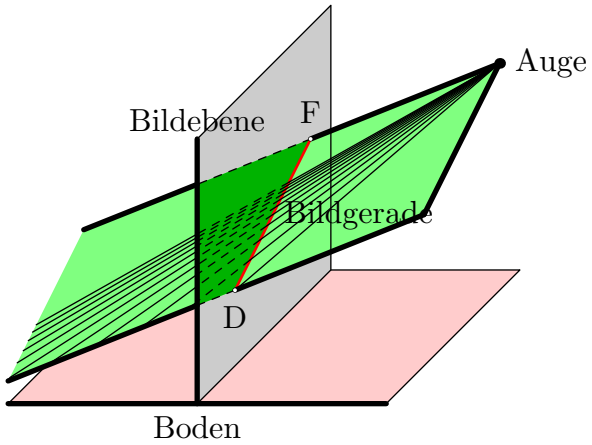


Abb. 6.8: Bild einer Geraden

Betrachten wir nun die allgemeine Gleichung, so sieht man, dass sie sich aus mehreren Abbildungen zusammensetzt. $\vec{p} \to \vec{p} - \vec{a} \xrightarrow{*} (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{1}{\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a})} \to f(\vec{p})$. Bei der Abbildung $*$ habe ich oben gezeigt, dass sie affine Unterräume in solche abbildet. Alle anderen Teilabbildungen machen dies sowieso. Also bildet die Gesamtabbildung einen affinen Unterarm auf einen affinen Unterraum ab. Dabei vergrößert sich die Dimension nicht. □

Folgerung 6.34. *Das Bild einer Geraden ist eine Gerade.*

Ich setze fürs weitere voraus, dass der Augpunkt der Nullpunkt ist und $\vec{n}$ der Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildhyperebene. Die Abbildungsgleichung **??** lautet dann:

$$f(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \frac{\vec{n} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{p}} \tag{6.8}$$

Sei $g = \vec{a} + \vec{b}K$ eine Gerade. Für $\vec{x} \in g$ ergibt sich: $\vec{x}(t) = \vec{a} + \vec{b} \cdot t$ mit $t \in K$. Berechnet man den Grenzwert für $t \to \infty$ so ergibt sich: $\lim\limits_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{b} \cdot \frac{\vec{n} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{b}}$

Folgerung 6.35. *Sind $\vec{a} + \vec{b}K$ und $\vec{c} + \vec{b}K$ parallele Geraden, so haben die Trägergeraden der zugehörigen Bildmengen den gemeinsamen Punkt $\vec{b} \cdot \frac{\vec{n} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{b}}$. Dieser Punkt heißt Fluchtpunkt. Kurz: Parallele Geraden haben den gleichen Fluchtpunkt. Er liegt auf der Geraden durch den Augpunkt parallel zur Gegenstandsgeraden.* **??**

Ist $\mathbf{A} = \vec{a} + U$ ein affiner Unterraum, wobei U ein beliebiger Unterraum ist, und ist $g = \vec{a} + \vec{u}K$ eine beliebige Gerade in diesem affinen Unterraum, so ist

$\vec{u} \cdot \frac{vecn \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{u}}$ der zugehörige Fluchtpunkt. Er liegt natürlich in der Bildhyperebene. Ich bezeichne mit $\mathbf{B} = \vec{n} + H$ die Bildhyperebene.
Behauptung: $U \cap \mathbf{B} =$ Menge der Fluchtpunkte von Geraden aus $\mathbf{A}$.

Ist $\vec{u} \in U \cap \mathbf{B}$, so ist $\vec{n} \circ (\vec{u} - \vec{n}) = 0$. Also ist $\vec{n} \circ \vec{u} = \vec{n} \circ \vec{n}$. Also ist $\vec{u} \cdot \frac{\vec{n} \circ \vec{u}}{\vec{n}^2} = \vec{u}$. Also ist $\vec{u}$ tatsächlich Fluchtpunkt einer Geraden aus dem affinen Raum $\mathbf{A} = \vec{a} + U$. □

Die Punkte aus H werden nicht abgebildet. Ist $g = \vec{a} + vecbK$ eine Gerade, so wird der Schnittpunkt mit H nicht abgebildet. Er erfüllt die Bedingung: $\vec{n} \circ (\vec{a} + \vec{b} \cdot k) = 0$. Also ist $k = -\frac{\vec{n} \circ \vec{a}}{\vec{n} \circ \vec{b}}$. Der nicht abgebildete Punkt der Geraden g ist also:

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}\frac{\vec{n} \circ \vec{a}}{\vec{n} \circ \vec{b}} \tag{6.9}$$

Dieser Punkt heißt Verschwindungspunkt der Geraden g.

Folgerung 6.36. *Der Augpunkt, der Fluchtpunkt, der Schnittpunkt mit der Bildebene und der Verschwindungspunkt bilden ein Parallelogramm.*

Sei $\vec{d}$ der Schnittpunkt mit der Bildebene. Die Gerade kann geschrieben werden $g = \vec{d} + \vec{b} \cdot K$. Der Verschwindungspunkt ist $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}\frac{\vec{n} \circ \vec{a}}{\vec{n} \circ \vec{b}}$ Also ist $\vec{d} - \vec{v} = \vec{b}\frac{\vec{n} \circ \vec{a}}{\vec{n} \circ \vec{b}}$. Also ist $\vec{d} - \vec{v}$ parallel zu $\vec{f}$, wenn $\vec{f}$ der Ortsvektor des Fluchtpunktes ist. $\vec{d} - \vec{f} = \vec{d} - \vec{b}\frac{\vec{n} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{b}}$. $\vec{d}$ liegt nach Voraussetzung in der Bildebene, die durch $\vec{n}$ geht und parallel zu H ist. Also ist $\vec{n} \circ \vec{d} - \vec{n} = 0$ und daher ist $\vec{n} \circ \vec{d} = \vec{n} \circ \vec{n}$. Es ist also $\vec{d} - \vec{f} = \vec{v}$. Die Figur ist also ein Parallelogramm. □

6.8 Angeordnete algebraische Strukturen

6.8.1 Angeordnete Gruppen

Angeordnete Monoide

Wir reden nur von kommutativen Monoiden. Diese können additiv geschrieben werden.

Definition 70. $(M, +, \leq)$ heißt halbgeordneter oder prägeordneter Monoid genau dann, wenn $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge ist und für alle x, y, $z \in M$ gilt: $x \leq y$, dann ist $x + z \leq y + z$.

Beispiele:
1. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind die wichtigsten halbgeordneten Monoide.
2. $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist bezüglich der Teilbarkeitsrelation ein halbgeordneter Monoid.
3. In jedem Modul ist der Untermodulverband ein halbgeordneter Monoid.
4. M sei eine prägeordnete Halbgruppe und I eine Menge. Dann ist M^I eine prägeordnete Halbgruppe mit der Definition:
$< m_i > \leq < n_i > \iff \forall i \in I : m_i \leq n_i$
5. Sei I eine wohlgeordnete Menge und M ein prägeordneter Monoid. M^I kann lexikographisch geordnet werden durch: $< m_i > \leq < n_i > \iff$ Es gibt ein $i \in I$, so dass für alle $k < i$ gilt: $m_k = n_k$ und $m_i \leq n_i$. Dadurch wird tatsächlich M^I zu einer prägeordneten Halbgruppe. Denn sei $< z_i > \in M^I$ beliebig und $< m_i > \leq < n_i >$. Dann gibt es ein $k \in I$, so dass für alle $i < k$ gilt: $m_i = n_i$ und $m_k \leq n_k$. Also ist für alle $i < k$: $m_i + z_i = n_i + z_i$ und $m_k + z_k \leq n_k + z_k$.

Satz 6.37. *In einer prägeordneten Gruppe sind äquivalent:*

1. $x \leq y$.
2. *Für alle* $z \in G$ *gilt:* $x + z \leq y + z$.
3. $0 \leq y - x$.
4. $-y \leq -x$.

Definition 71. Eine Abbildung zwischen prägeordneten Halbgruppen
$f : M \to N$ heißt monoton wachsend oder ordnungstreu, wenn für alle x, $y \in M$ gilt: $x \leq y$, dann ist $f(x) \leq f(y)$.

Insbesondere ist also die Abbildung $G \ni x \mapsto -x \in G$ monoton fallen.

6.8.2 Angeordnete Körper

Angeordnete Ringe

Definition 72. Sei R ein kommutativer Ring und P eine Teilmenge von R. R heißt halbgeordneter Ring bezüglich der positiven Menge P genau dann, wenn folgendes gilt:

P1 $P + P \subset P$

P2 $P \cdot P \subset P$.

P3 $P \cap (-P) = \{0\}$.

Bemerkung 17 Eine Teilmenge $P \subset R$ erfülle P1 und P2. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. P ist eine positive Menge.
2. Für alle $a, b \in P$ gilt: $a + b = 0$ genau dann, wenn $a = b = 0$ ist. □

1. $\Longrightarrow$2. Seien $a, b \in P$ mit $a + b = 0$. Dann ist $a = -b \in P \cap (-P) = \{0\}$. Daher ist $a = b = 0$.
2.$\Longrightarrow$1. Sei $a \in P \cap (-P)$. Dann ist $a = -b$ für ein $b \in P$. Also ist $a + b = 0$ und daher $a = b = 0$. □

In jedem kommutativen Ring ist $\{0\}$ eine positive Menge. Das wichtigste Beispiel eines halbgeordneten Ringes ist $\mathbb{Z}$. In diesem Ring ist $\mathbb{N}$ eine positive Menge.
Sei R ein kommutativer Ring und $t(R) = \{x | \exists z \in \mathbb{Z} \text{ mit } x \cdot z = 0\}$ der $\mathbb{Z}$–Torsionsuntermodul von R. Dies ist eine Untergruppe von R. Es gilt:

Satz 6.38. *Ist P in R eine positive Menge, so ist $P \cap t(R) = \{0\}$*

Sei $x \in P \cap t(R)$. Wegen 72 P1, ist $x \cdot n \in P$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt ein $z \neq 0$ mit $x \cdot z = 0$. Ist etwa $z < 0$, so ist $-z > 0$ und $x \cdot (-z) = -xz = 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf daher angenommen werden, dass $z \in \mathbb{N}$ ist. Also ist $n > 1$. Es folgt $x \cdot (n - 1) = x \cdot n - x = -x \in P \cap (-P)$. Daher ist $-x = 0$ und damit ist $x = 0$. Dies war zu zeigen. □

Beispiele:

1. In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist $P = \{(a, b) | a \geq 0\}$ keine positive Menge. In 72 ist natürlich P1 und P2 erfüllt aber P3 nicht, denn $(0, 1) \in P \cap (-P)$
2. Aber in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist $P = \{(a, b) | a \geq 0 \text{ und } b \geq 0\}$ eine positive Menge. Wieder ist P1 und P2 klar. Ist $(a, b) \in P \cap (-P)$, so ist $(a, b) = -(c, d)$ mit positiven a, b, c, d. Dann ist $a + c = b + d = 0$. Daher ist $a = b = c = d = 0$.

Folgerung 6.39. $1 \cdot \mathbb{N}$ *ist in R genau dann eine positive Menge, wenn $char(R) = 0$ ist.*

Ist $1 \cdot \mathbb{N}$ eine positive Menge, so ist $1 \cdot \mathbb{N} \cap t(R) = \{0\}$.
Zur Umkehrung: Die Eigenschaften 2. und 3. der Definition 72 sind von $1 \cdot \mathbb{N}$ selbstverständlich erfüllt. Sei $1 \cdot n \in P \cap (-P)$. Daher ist $n = -m$ mit $m \in P = 1 \cdot \mathbb{N}$. Daher ist $n + m = 0$ Das geht aber nicht für $n, m \neq 0$, da die Charakteristik des Ringes $= 0$ ist. Daher ist $P \cap (-P) = 0$. □

Bemerkung 18 Ist $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $P \subset R$ eine positive Menge. Dann sind äquivalent:

1. $f(P)$ ist eine positive Menge.
2. Für alle $a, b \in P$ gilt: Ist $a + b \in P$, so sind a und b in P. □

1.$\Longrightarrow$2. Sei $a, b \in P$ mit $a + b \in Ke(f)$. Es ist $f(a + b) = 0$ genau dann, wenn $f(a) = -f(b)$ ist. Da $f(P)$ eine positive Menge ist und $f(a) \in P \cap (-P)$ ist, ergibt sich das $f(a) = 0$ ist. Genauso folgt $f(b) = 0$.
2. $\Longrightarrow$1. Es ist sowieso $f(P) + f(P) \subset f(P)$ und $f(P) \cdot f(P) \subset f(P)$, da f ein Homomorphismus ist. Zu zeigen bleibt die Eigenschaft P3. Sei $x \in f(P) \cap f(-P)$. Also ist $x = f(a) = f(-b)$. Daher ist $f(a + b) = 0$ und damit $a + b \in Ke(f)$. Daher ist $a, b \in Ke(f)$. Daher ist $f(a) = 0 = f(b)$. Also ist $x = 0$. Das heißt $f(P) \cap f(-P) = 0$. □

Folgerung 6.40. *Ist $f : R \to S$ ein Homomorphismus und $P \cap Ke(f) = 0$, so ist $f(P)$ eine positive Menge. Also erhalten insbesondere injektive Homomorphismen positive Mengen.*

Wir sind natürlich an möglichst großen positiven Mengen interessiert.

Satz 6.41. *Zu jeder positiven Menge P gibt es eine maximale positive Menge P^+, die P enthält. Da insbesondere $\{0\}$ eine positive Menge ist enthält jeder Ring maximal positive Mengen.*

Sei $\mathcal{P} = \{P' | P \subset P' \text{ positiv}\}$. $\mathcal{P}$ ist nicht leer, da P selber in $\mathcal{P}$ ist. Sei $(P_k | k \in K)$ eine Kette in $\mathcal{P}$ und $P^* = \bigcup_{k \in K} P_k$. P^* ist eine positive Menge. Denn sind $a, b \in P^*$, so gibt es ein $k \in K$ mit $a, b \in P_k$. Da P_k eine positive Menge ist, ist $a + b$ und $a \cdot b \in P_k \subset P^*$. Sei $a \in P^* \cap (-P^*)$. Dann gibt es $a, b \in P^*$, so dass $a = -b$ ist. Es gibt also ein P_k mit $a, b \in P_k$. Daher ist $a \in P_k \cap (-P_k)$. Da P_k eine positive Menge ist, ist $a = 0$. □

Beispiel: Sei $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Sicher ist P gegenüber Additionen und Multiplikationen abgeschlossen. Auch ist $P \cap (-P) = \{0\}$ wie man sieht.

Beh.: P ist maximal.
Sei etwa $P \subsetneqq P'$. Also gibt es ein$(a, b) \in P'$ aber $(a, b) \notin P$. Das heißt $b < 0$. Es ist $-b > 0$. Also ist $(-a, -b) \in P \subset P'$. Damit ist $(-a, -b) \in P' \cap (-P')$. Dies ist ein Widerspruch zu der Eigenschaft, dass P' eine positive Menge ist. Also ist P maximal.

Definition 73. Sei (R, P) ein halbgeordneter Ring. Wir erklären:
$a \leq b \iff b - a \in P$.

Satz 6.42. *Für einen halbgeordneten Ring (R, P) gilt:*

1. *Für alle $a \in R$ ist $a \leq a$.*
2. *Für alle a, b und $c \in R$ gilt: Ist $a \leq b$ und $b \leq c$, so ist $a \leq c$. Das ist das Transitivitätsgesetz.*
3. *Ist $a \leq b$ und $b \leq a$, so ist $a = b$.*

Zu 1.: Es ist $a - a \in \{0\} = P \cap (-P) \subset P$. Also $a \leq a$.
Zu 2.: $a \leq b$ Damit $b - a \in P$. Und $b \leq c$, daher ist $c - b \in P$. Aus diesen Tatsachen zusammen folgt: $c - a = (c - b) + (b - a) \in P$.
Zu 3.: $b - a \in P$ und $(a - b) = -(b - a) \in P$. Damit ist $(b - a) \in (-P)$ und also $(b - a) \in P \cap (-P) = \{0\}$. Das heißt: $b = a$. □

Wir sagen auch $(R, \leq)$ ist ein halbgeordneter Ring.

Satz 6.43. *Sei (R, P) ein halbgeordneter Ring. Dann gilt:*

1. *Für alle $a \leq b$ und alle $c \in R$ ist $a + c \leq b + c$.*
2. *Für alle $a, b \in R$ mit $a \leq b$ und für alle $c \in P$, ist $a \cdot c \leq b \cdot c$. Ungleichungen dürfen mit positiven Zahlen multipliziert werden.*

Der Beweis ist sehr einfach.

Satz 6.44. *Sei R ein halbgerordneter Ring mit der positiven Menge P. Äquivalent sind.*

1. *$R = P \cup (-P)$.*
2. *Für alle $a, b \in R$ gilt: $a \leq b$ oder $b \leq a$.*

1.$\Longrightarrow$2. Seien $a, b \in R$. Dann ist $a - b \in P$ oder $a - b \in (-P)$. Also ist $a \leq b$ oder $b \leq a$.
2. folgt 1. Sei $a \in R$. Dann ist $a \leq 0$ oder $0 \leq a$. Also $a \in P \cup (-P)$. □

Definition 74. Gilt eine der Aussagen des Satzes, so heißt (R, P) oder $(R, \leq)$ ein linear geordneter Ring.

Beispiele: Wir hatten schon gesagt, dass $\mathbb{Z}$ ein total geordneter Ring ist.

Satz 6.45. *In einem geordneten Ring ist ist für alle $x \neq 0$ $x^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$.*

Ist $x > 0$ so ist alles klar. Andernfalls ist $x < 0$. Daher ist $-x > 0$ und also ist $(-x) \cdot (-x) = x^2 > 0$. Die Behauptung mit 1 folgt, da 1 ein Quadrat ist. □

Ist R ein kommutativer Ring, so hat man den natürlichen Ringhomomorphismus

$$\rho : \mathbb{Z} \ni z \mapsto z \cdot 1.$$

Folgerung 6.46. *Ist $(R, <)$ ein total geordneter Ring, so ist $char(R) = 0$.*

Satz 6.47. *Sei R ein geordneter Integritätsring und S eine multiplikative Menge in dem Ring. S enthalte nicht die 0. Dann ist $S^{-1}R$ ein geordneter Ring. Als positive Menge wählt man die Menge der Brüche, bei denen Zähler und Nenner gleiches Vorzeichen haben.*

Wir müssen zeigen, dass die Menge der positiven Elemente gegenüber Addition und Multiplikation abgeschlossen sind. Beides sind aber leicht zu zeigende Tatsachen. Genauso leicht ist zu beweisen, dass $R = P \cup (-P) \cup \{0\}$ gilt. □

Der Quotientenkörper eines geordneten Integritätsrings ist also ein geordneter Körper. Noch ein Beispiel zum Schluss. Sei R ein geordneter Integritätsring mit
$P = \{f | f \in R[X]$ Der höchste Koeffizient von f ist $> 0\}$. Dann wird der Polynomring zu einem geordneten Ring mit der positive Menge P. In diesem Ring ist X größer als jedes $r \in R$. Es gibt also unendlich große Elemente.

Der Betrag

Sei K ein angeordneter Körper.

Definition 75. Für jedes $x \in K$ erklären wir:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.10}$$

15. März 2017

Satz 6.48. *Es gilt:*

1. *Für alle* $x \in K$ *ist* $0 \leq |x|$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$.
3. *Für alle* $x \in K$ *ist* $x \leq |x|$.
4. *Für alle* $x, y \in K$ *ist* $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
5. *Für alle* $x, y \in K$ *ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$. *Diese Ungleichung heißt Dreiecksungleichung.*

Zu 1. Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$. Damit ergibt sich die Behauptung. Die Eigenschaten 2., 3. und 4. sind klar.
Zu 5. 1. Fall: $x + y < 0$. In dieser Situation gibt es zwei Unterfälle zu unterscheiden.
1.1 $x < 0$ und $y < 0$, das heißt $(-y) \leq 0$. Es folgt: $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$.
1.2 $x < 0$ und $0 \leq y$. Dann ist: $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + 0 \leq |x| + |y|$.
2. Fall: $0 < (x + y)$. Dieser Fall ist jetzt leicht. □

Aufgaben: Aufgaben:

74. Sei K ein angeordneter Körper. Beweise:
    a) $a < b < c < d$, dann ist $0 < c - b < d - a$.
    b) $0 < b, 0 < a$ und $a^n < b^n$, dann ist $a < b$.
    c) $a < x < b$, dann gibt es $s, t \in K$ mit $0 < s$ und $0 < t$ und $1 = s + t$ und $x = sa + tb$.
75. a) Zeige: In einem linear angeordneten Körper ist für alle $x \neq 0$ $0 < x^2$.
    b) Für welche $x \in K$ ist $x^2 > x$?
    c) Für welche $x \in K$ ist $x^2 < x$?
76. Sei K ein angeordneter Körper. Beweise:
    a) $|a| < b \iff -b < a < b$.
    b) $|x - x_0| < \delta \iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
    c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

6.8.3 Erweiterungen von geordneten Körpern

Definition 76. Sei K ein total geordneter Körper. Das heißt es ist $P \cup (-P) = K$. Die positive Menge von K bezeichne ich mit K^+. Sei E eine Körpererweiterung von K selber ein angeordneter Körper. Dei Ordnungsstruktur von E definiert eine Erweiterungsstruktur, wenn $K^+ = K \cap E^+$ ist. Ich kürze das ab indem ich sage E ist eine ordentliche Erweiterung vvon K.

Satz 6.49. *Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung. K total geordneter Körper. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *$K \subset E$ ist eine ordentliche Erweiterung.*
2. *Für alle $p_1, \dots p_n \in K^+$ und alle $x_1, \dots x_n \in E$ gilt: Ist $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = 0$, so ist $p_1 x_1 = \dots p_n x_n = 0$.*
3. *(-1) ist nicht Summe von Elementen der Form px^2 mit $p \in K^+$ und $x \in E$.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = 0$. Für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ erhalten wir: $-p_i x_i^2 = \sum\limits_{k \neq i} p_k x_k^2$. Die linke Seite der Gleichung ist in $-P$. Die rechte Seite der Gleichung ist P. Daher ist $p_i \cdot x_i^2 \in P \cap (-P)$. Also ist $p_i x_i^2 = 0$ und damit, da E ein Körper ist, $p_i \cdot x_i = 0$.
2. $\Longrightarrow$3. Sei $-1 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^2$ mit $p_i \in K^+$. Daher ist $0 = \sum p_i x_i^2 + 1$. Also ist $p_i x_i = 0$ und $1 = 0$. Das ist ein Widerspruch.
3. $\Longrightarrow$2. Sei $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^2$. Angenommen $p_i x_i \neq 0$ für ein i. Dann ist $-p_i x_i^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} -p_i x_i^2 &= \sum_{k \neq i} p_k \cdot x_k^2 \\ -1 &= \sum_{k \neq i} \frac{p_k}{p_i} \left(\frac{x_k}{x_i} \right)^2 \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.
2. $\Longrightarrow$1. Ich definiere auf E eine positive Menge P, welche die Menge aller positiven Zahlen aus K enthält. Dann ist soogar $P \cap K = K^+$. Denn würde P ein negatives Element $-a \in K^-$ enthalten, so wäre $-a \in P$ und $a = -(-a) \in K^+ \subset P$. Dies steht im Widerspruch zum Ordnungsaxiom $P \cap (-P) = \{0\}$. Um P zu definieren betrachten wir die folgende Menge:

$$P_0 = \{\sum p_i x_i^2 | p_i \in K^+ \text{ und } x_i \in E\}.$$

Es ist $P_0 + P_0 \subset P_0$ und $P_0 \cdot P_0 \subset P_0$. Zu zeigen bleibt, dass $P_0 \cap P_0 = \{0\}$ ist. Nach den früheren Überlegungen ist also P_0 in einer maximal positiven Menge enthalten. Aus dem folgenden Lemma ergibt sich, dass E bezüglich dieser maximal positiven Teilmenge wirklich linear geordnet ist.

Lemma 2 *Ist E ein Körper un P ein maximal positive Teilmenge, die alle Quadrate aus E enthält dann gilt: st $x \in E$, so ist x oder $-x \in E$.* □

Sei etwa $x \in E$ und $x \notin P$. Wir betrachten die Menge $P' = P - xP = \{p - qx | p, q \in P\}$. Da $0 \in P$ ist, ist auch $0 \in P' = P - xP$ und $P \subset P'$. Die Einheit 1 ist ein Quadrat, daher in P und somit in P'. Also ist $-x \in P'$. Ich zeige nun: P' ist eine positive Menge. Da aber P schon maximal positiv war, folgt:$P = P'$.
Es ist $P' + P' = (P - xP) + (P - xP) = (P + P) - x(P + P) = P - xP$. Also ist das erste Ordnungsaxiom erfüllt. Weiter ist: $P' \cdot P' = (P - xP) \cdot (P - xP) = P + x^2P - xP^2 - xP^2 \subset P - xP$. Also das zweite Ordnungsaxiom ist auch erfüllt. Zu zeigen bleibt: $P' \cap (-P') = \{0\}$.
Sei dazu $p - x1 = -(r - xs) = -r + xs$ mit $p, q, r, s \in P$. Es folgt: $x \cdot (q + s) = p + r$. Wäre $q + s \neq 0$, so wäre $x = (\frac{1}{q+s})^2 \cdot (q + s) \cdot (p + r) \in P$. Dies ist aber nicht der Fall. Also ist $q + s = 0$. Dann ist aber auch $p + r = 0$ und damit $p = r = 0$ und $q + s = 0$, daher $q = s = 0$. Also ist P' eine positive Menge. Da P maximal ist, ist $P' = P$. Also ist $-x = 0 - x \cdot 1 \in P$. Das war behauptet. □

Folgerung 6.50 (Theorem von Artin Schreier). *E sei ein kommutativer Körper. Äquivalent sind:*

1. *Auf E lässt sich eine Ordnungsstruktur erklären, die E zu einem angeordneten Körper macht.*

2. *Für alle $x_1, \ldots, x_n$ aus E gilt: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ so ist $x_1 = x_2 = \cdots = 0$.*

Otto Schreier, „Algebarische Konstruktion reeller Körper“ 1. $\Longrightarrow$2. Dies ist nach dem Satz 6.49 klar.
2.$\Longrightarrow$1. Aus der Bedingung folgt, dass E die Chararkteristik 0 hat. Also ist $\mathbb{Q}$ ein Unterkörper von E. Sei $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = 0$ mit $p_i \in \mathbb{Q}^+$ und $x_i \in E$. Wir können die Gleichnung mit dem Hauptnenner multiplizieren. Also können wir vorausetzen, dass in der Summe sämtliche p_i natürliche Zahlen sind. Das heißt $p_i \cdot x_i^2 = x_i^2 + \ldots x_i^2$. Dabei steht x_i^2 p_i-mal als Summand da. Das heißt die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = 0$$

ist nchts anderes als eine Summe von Quadraten. Nach Vorausetzung sind dann alle $x_i = 0$. Wegen dem Tehorem 6.49 ist E eine ordentliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Damit ist E erst recht ein geordneter Körper. □

Folgerung 6.51. *Sei E eine Erweiterung des geordneten Körpers K. Ein Element $x \in E$ ist positiv in jeder Erweiterungsstruktur von K genau dann , wenn $x = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2$, $p_i \in K^+$ und $x_i \in E$.*

2. $\Longrightarrow$1. Sei $x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$ mit $p_i \in K^+$ und P irgend eine positive Menge durch die E zu einem geordneten Körper wird, so dass E eine ordentliche Erweiterung von K wird. Die p_i sind alle positiv und auch die x_i^2. Also ist auch x positiv.
1. $\Longrightarrow$2. Angenommen $x \notin P_0 = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 | p_i \in K^+ \wedge x_i \in E\}$. Es gibt irgend eine maximal positive Menge P mit $x \notin P$. Dann ist $-x \in P$. Dann ist aber x in dieser Erweiterungsstruktur nicht positiv.

6.8.4 Algebraische Erweiterung geordneter Körper

Definition 77. Sei K ein angeordneter Körper. Das Poynom $f \in K[X]$ wechselt das Vorzeichen genau dann, wenn es $a, b \in K$ gibt mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Satz 6.52. *Sei K ein geordneter Körper und f ein untzerlegbares Polynom über K. Wechselt f das Vorzeichen, so hat der Körper $K[X]/(f)$ eine Ordnungsstruktur, die mit der von K verträglich ist.*

Durch Induktion nach dem Grad von f. Für $n = 1$ ist $K = E$ und es ist nichts zu beweisen. Sei die Behauptung richtig bis $n-1$. Angenommen es gebe ein unzerlegbares Polynom, welches der Behauptung des Satzes widerstreitet. Dann gibt es wegen Satz 6.49 Polynome f_i und $p_i \in K^+$ mit

$$1 + \sum_{i \in I} p_i f_i(X)^2 \quad = \quad 0 \bmod f(X) \tag{6.11}$$

Ich darf annehmen, dass die f_i höchstens den Grad $n-1$ haben. Man kann ja die Gleichung durch $f(X)$ mit Rest dividieren. Aus der Gleichung 6.11 folgt:

$$1 + \sum_{i \in I} p_i f_i(X)^2 \quad = \quad h(X) \cdot f(X) \tag{6.12}$$

Dabei ist $h \neq 0$ und hat höchstens den Grad $n-1$, denn der Gesamtgrad der linken Seite ist höchstens $2n-2$. Es ist $h(a) \cdot f(a) > 0$ und $h(b) \cdot f(b) > 0$. Da f das Vorzeichen wechselt muss auch h das Vorzeichen wechseln.

Beh: Irgend ein unzerlegbarer Faktor von h wechselt das Vorzeichen.
Bew: Ist h schon selbst unzerlegbar, so ist nichts zeigen. Andernfalls ist $h(X)$ Produkt von unzerlegbaren Polynomen. Von diesen muss mindestens eins das Vorzeichen zwischen a und b wechseln. Aus der Gleichung 6.12 folgt:

$$1 + \sum_{i \in I} p_i f_i(X)^2 \quad = \quad 0 \bmod (g(X)) \tag{6.13}$$

Damit hat $K[X]/g(X)$ keine Ordnungsstruktur, die mit der Ordnungsstruktur von K verträglich ist. Da g vom Grade $\leq n-1$ ist, widerspricht dies der Induktionsannahme. □

Satz 6.53. *Das Polynom $f(X) = X^2 - c$ wechselt das Vorzeichen über dem angeordneten Körper K genau dann, wenn $c > 0$ ist.*

Das Polynom wechsel das Vorzeichen. Dann gibt es ein $a \in K$ mit $a^2 - c < 0$. Dann ist $a^2 < c$. Da Quadrate in einem angeordneten Körper positiv sind ist auch $c > 0$.
Sei umgekehrt $c > 0$. Dann ist $f(0) = -c < 0$. Und es ist $f(c+1) = c^2 + 2 \cdot c + 1 - c = c^2 + c + 1 > 0$. Das Polynom wechsel also das Vorzeichen. □

Satz 6.54. *Das Polynom $f(X) = a \cdot X^2 + b \cdot X + c$ über dem angeordneten Körper K wechselt das Vorzeichen genau dann, wenn $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ ist. Die Zahl D heißt Diskriminante.*

f wechselt das Vorzeichen genau dann, wenn $\frac{1}{a} \cdot f(X)$ das Vorzeichen wechselt. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} f(X) &= X^2 + \frac{b}{a} X + \frac{c}{a} \\ &= \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Da $4a^2 > 0$ ist, ist $\frac{b^2-4ac}{4a^2} > 0$ genau dann, wenn $b^2 - 4ac > 0$ ist. Mit dem Satz 6.53 folgt die Behauptung. □

Satz 6.55. *Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ein Polynom über dem geordneten Körper K. Dann existiert ein Intervall, so dass für alle x außerhalb des Intervalls $f(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $a_n x^n$ hat.*

Ich zeige die Behauptung zunächst für ein normiertes Polynom $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + X^n$. $f(x)$ und x^n haben genau dann das gleiche Vorzeichen, wenn $\frac{f(x)}{x^n} = a_0x^{-n} + \cdots + 1 > 0$ ist.

$$\frac{f(x)}{x^n} = 1 + a_{n-1}x^{-1} + \ldots a_0x^{-n} \quad \geq \quad 1 - (|a_{n-1}||x|^{-1} + \cdots + |a_0||x|^{-n}) \tag{6.15}$$

Sei $M = \sup\{1, |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\}$ und $|x| > M$. Dann folgt

$$(|a_{n-1}|x|^{-1} + \cdots + a_0|x|^{-n}) \quad < \quad (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) \cdot M^{-1} < 1 \tag{6.16}$$

Also ist

$$1 - (|a_{n-1}||x^{-1}| + \cdots + |a_0||x^{-n}|) \quad > \quad 0 \tag{6.17}$$

Wegen 6.15 ist $\frac{f(x)}{x^n} > 0$. Das heißt $f(x)$ und x^n haben das gleiche Vorzeichen. Der Rest sei Übung. □

Folgerung 6.56. *Sei a ein positives Element eines geordneten Körpers. Der Körper der Wurzel hat eine Erweiterungsstruktur, die die Ordnung von K induziert.*

Das Resultat ist trivial, wenn a schon selbts ein Quadrat ist.Der andere Fall bleibt zu überlegen. Das Polynom $f(X) = X^2 - a$ wechselt das Vorzeichen. Denn $f(0) = -a < 0$. Es gibt ein M, so dass für $x > M$ $f(x)$ dasselbe Vorzeichen wie der höchste Koeffizient von f hat. Dieses Vorzeichen ist positiv. Damit folgt die Behauptung □

Definition 78. Die positive Lösung der Gleichung $x^2 - a = 0$ heißt $\sqrt{a}$. Es gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

6.8.5 Maximal geordnete Körper

Definition 79. Ein geordneter Körper K heißt maximal geordneter Körper, wenn für jede algebraische Körpererweiterung $K \subset E$ gilt: Ist E geordnet und die Ordnung von E mit der Ordnung von K verträglich, so ist $E = K$. Man nennt einen solchen Körper auch reell abgeschlossen

Satz 6.57. *Zu jedem Körper K gibt es eine algebraische Körpererweiterung $K \subset E$, so dass E ein maximal geordneter Körper ist.*

Sei Ω der algebraische Abschluss von K.

$$\mathfrak{N} = \text{ Menge der ordentlichen Erweiterungen von } K \text{ in } E$$

$\mathfrak{N}$ ist halbgeordnet durch die Beziehung $L \subset M$ und M ist ordentliche Erweiterung von L. Diese Halbordnung ist induktiv, wie man leicht sieht. Also gibt es ein maximales Element. □

Satz 6.58. *Sei f ein Polynom über dem reell abgeschlossenen Körper, welches zwischen a und b das Vorzeichen wechselt. Dann hat f eine Nullstelle zwischen a und b.*

Mindestens einer der irreduziblen Faktoren von f wechselt das Vorzeichen. Sei etwa h ein solcher irreduzibler Faktor, der das Vorzeichen wechselt. Dann hat die Körpererweiterung $K \subset L = K[X]/(h)$ eine Ordnungstruktur, die mit der Ordnungstruktur von K verträglich ist. Da K ein maximal geordneter Körper ist, ist der Grad von h gleich 1. Das Polynom h ist also linear und daher als Funktion monoton wachsend oder fallend. Da $h(a) \cdot h(b) < 0$ ist liegt die Nullstelle von h zwischen a und b. □

Satz 6.59. *In einem reell abgeschlossenen Körper hat jedes positive Elemen eine Quadratwurzel. Jedes Polynom ungeraden Grades hat in dem reel abgeschlossenen Körper eine Nullstelle.*

Ist $a > 0$ so wechselt das Polynom $X^2 - a$ das Vorzeichen. Also hat dieses Polynom eine Nullstelle. Ist $f(X)$ ein Polynom ungeraden Grades, so gibt es ein Intervall, so dass für alle a außerhalb des Intervalls $f(a)$ dasselbe Vorzeichen wie der Term mit dem höchsten Koeffizienten hat. Der wechselt das Vorzeichen. □

Satz 6.60 (Rolle). *Sei K ein reell abgeschlossener Körper und f ein Polynom mit $f(a) = f(b) = 0$ und $a < b$. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f'(c) = 0$*

Seien $a < b$ zwei Nullstellen so dass zwischen a und b keine weiteren Nullstellen von f liegen. Dann gilt: $f(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^l \cdot g(x)$, wobei g im Intervall $[a, b]$ niemals den Wert 0 annimmt. Das heisst g kann zwischen a und b nicht das Vorzeichen wechseln, da sonmst g zwischen a und b eine Nullstelle hätte. Daher haben $g(a)$ und $g(b)$ gleiches Vorzeichen. Ich nehme mal an, dass beide positiv sind. Es folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-a)^{k-1} \cdot (x-b)^{l-1} \cdot [k \cdot (x-b) \cdot g(x) + l \cdot \\ &\quad (x-a) \cdot g(x) + (x-a) \cdot (x-b) \cdot g'(x)] \end{aligned} \tag{6.18}$$

Den Term in den eckigen Klammern nenne ich $h(x)$. Es ist $h(a) = k\cdot(a.b)\cdot g(a) < 0$ und $h(b) = l \cdot (b-a) \cdot g(b) > 0$. Das Polynom h wechselt also zwischen a und b das Vorzeichen hat also dort eine Nullstelle. Damit hat f' eine Nullstelle zwischen a und b. □

6.8.6 Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper

Satz 6.61. *Sei K ein angeordneter Körper, in dem jedes positive Element ein Quadrat ist. Dann gilt:*

1. *Jedes Element aus $K[i]$ ist ein Quadrat.*
2. *Jedes Polynom zweiten Grades über $K[i]$ hat eine Wurzel in $K[i]$.*

Zu 1.
Zu 2. Ist $f(X) = aX^2 + bX + c$ ein Polynom über $K[i]$ so ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \iff \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2-4ac}{4c^2} \\ \iff \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4c^2} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Wegen der ersten Teilaussage des Satzes gibt es ein $d \in K[i]$ mit: $d^2 = \frac{b^2-4ac}{4c^2}$. Dann ist $x = d - \frac{b}{2a}$ eine Nullstelle des Polynoms. □

Satz 6.62 (Euler-Lagrange). *Sei K ein geordneter Körper. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Der Körper $K(i)$ ist algebraische abgeschlossen.*
2. *Der Körper K ist reell abgeschlossen.*
3. *Alle positiven Elemente in K sind Quadrate.*

6.9 Vektorräume über angeordneten Körpern

In diesem Kapitel sei K ein angeordneter Körper

6.9.1 Vektorräume über geordneten Körpern

Satz 6.63 (Ungleichung von Cauchy). *Sei V_K ein Vektorraum über dem linear geordneten Körper K und $\sigma : V \times V \ni (a, b) \mapsto \sigma(a, b) \in K$ eine positiv definite Bilinearform. Dann gilt:*

$$\sigma(a, b)^2 \leq \sigma(a, a) \times \sigma(b, b)$$

Es ist $\sigma(a + b \cdot x, a + b \cdot x) \geq 0 \quad \forall x \in K$. Das heißt es ist

$$\sigma(a, a) + 2 \cdot \sigma(a, b) \cdot x + \sigma(b, b) \cdot x^2 \quad \geq \quad 0 \quad \forall x \in K \tag{6.20}$$

Das Polynom $f(X) = \sigma(b, b) \cdot X^2 + 2 \cdot \sigma(a, b) \cdot X + \sigma(a, a))$ wechselt das Vorzeichen also nicht. Also ist $4 \cdot \sigma(a, b)^2 - 4\sigma(a, a)\sigma(b, b) \leq 0$ Daher ist $\sigma(a, b)^2 \leq \sigma(a, a) \cdot \sigma(b, b)$ □

Definition 80. K sei ein reell abgeschlossener Körper und V_K ein Vektorraum über K ist σ eine positiv definite Bilinearfor, so sei $|a| := \sqrt{\sigma(a, a)}$

Satz 6.64. *Die gerade definierte Funktion $|\quad| : V \to K$ hat die Eigenschaften einer Norm*

Insbesondere ist die Dreiecksungleichung zu zeigen. □

6.9.2 Konvexe Mengen

Im nächsten Paragrafen definiere ich Simplizes als konvexe Hülle von affin unabhängigen Punkten. Es sei $V = K^n$, wobei K ein angeordneter Körper ist.

Satz 6.65. *Für zwei Punkte $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und ein Punkt $\vec{p} \in V$ sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $r \in]0, 1[$ mit $\vec{p} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.*
2. *Es gibt $\alpha, \beta \in]0, 1[$ mit $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ und $\alpha + \beta = 1$.*

1. $\Longrightarrow$2. $\vec{p} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} - r \cdot \vec{a}$ mit $r \in]0, 1[$. Also ist $\vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$. Ist $\alpha = (1 - r)$ und $\beta = r$ so folgt die Behauptung.
2. $\Longrightarrow$1. Sei $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \quad \alpha, \beta \in]0, 1[$ und $\alpha + \beta = 1$. Daher ist $\alpha = 1 - \beta \in]0, 1[$. Also ist $\vec{p} = (1 - \beta) \cdot \vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{a} - \beta\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{a} + \beta(\vec{b} - \vec{a})$ mit $\beta \in]0, 1[$. □

Definition 81. Sind $\vec{a}, \vec{b} \in V$, so heißt

- $[\vec{a}, \vec{b}] := \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} | \alpha, \beta \in [0, 1] \text{ und } \alpha + \beta = 1\}$ die Strecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$.

- $]\vec{a},\vec{b}[:= \{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|\alpha,\beta \in]0,1[\text{ und } \alpha+\beta=1\}$ Inneres der Strecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$.

$U \subset V$ heißt konvex, genau dann, wenn für alle $\vec{a},\vec{b} \in U$ gilt: Die Strecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ ist Teilmenge von U

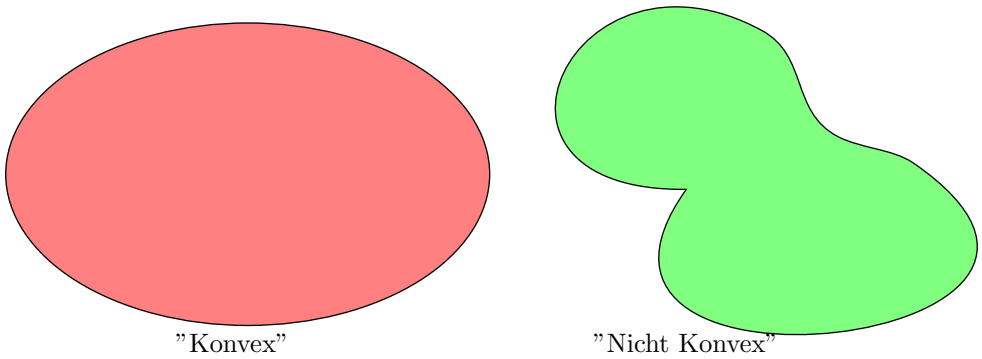


Abb. 6.9: Konvexe und nicht konvexe Figuren

Jede Gerade ist konvex. Jede Strecke ist konvex.

Satz 6.66. *1. Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex.*

2. Jede Teilmenge $U \subset V$ ist in einer kleinsten Teilmenge $K(U)$ enthalten. Diese Menge heißt konvexe Hülle.

Zu 1. Sei $(K_i|i \in I)$ eine Familie von konvexen Mengen und $\vec{a},\vec{b}$ Punkte aus $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$. Jedes K_i enthält die Strecke $[\vec{a},\vec{b}]$. Daher enthält $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ die Strecke $[\vec{a},\vec{b}]$. Der Durchschnitt der konvexen Mengen ist also konvex.
Zu 2. Der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die U enthalten ist die konvexe Hülle. □

Um sich Beispiele konvexer Mengen zu konstruieren ist der folgende Satz wichtig.

Satz 6.67. *Ist $f : A \to B$ ein Homomorphismus zwischen Vektorräumen, so gilt:*

1. Das Urbild konvexer Mengen ist konvex.

2. Das Bild konvexer Mengen ist konvex.

Zu 1.: Sei $U \subset B$ ein konvexe Menge. und $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \in f^{-1}(U)$. Außerdem sei $\vec{d} \in [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $\alpha + \beta = 1$ und $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}$. Da U konvex ist, ist $f(\vec{d}) = \alpha \cdot f(\overrightarrow{a_1}) + \beta \cdot f(\overrightarrow{a_2}) \in U$. Daher ist $\vec{d} \in f^{-1}(U)$.
Zu 2.: Sei $D \subset A$ eine konvexe Menge. Weiterhin sei $f(\overrightarrow{a_1})$ und $f(\overrightarrow{a_2}) \in f(D)$ und $\vec{x} = \alpha \cdot f(\overrightarrow{a_1}) + \beta \cdot f(\overrightarrow{a_2}) = f(\alpha \cdot \overrightarrow{a_1} + \beta \cdot \overrightarrow{a_2})$ ein Punkt der Verbindungsstrecke der Bildpunkte. Da D konvex ist, ist $\alpha \cdot \overrightarrow{a_1} + \beta \cdot \overrightarrow{a_2} \in D$. Daher ist $\vec{x} \in f(D)$.□

Definition 82. Sei $a \in K$. Die Menge $a, \infty := \{x | x \in K \wedge x \geq a\}$ heißt abgeschlossner oberer Abschnitt mit unterer Grenze a. Entsprechend heißt die Menge $]-\infty, a] := \{x | x \leq a \wedge x \in K\}$ abgeschlossener unetere Abschnitt mit a als oberer Grenze. Eine Teilmenge $A \subset K$ heisst Abschnitt, wenn es ein $a \in K$ gibt mit $[a, \infty[= A$ oder $]-\infty, a] = A$. Man spricht von einem offenen Abschnitt, wenn der Randpunkt a weggelassen wird. Ist $f : V \to K$ ein Funktional, so heisst das Urbild eines abgeschlossenen Abschnittes von K ein Halbraum.

Die konvexe Hülle von $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ist wie wir gerade gesehen habe die Strecke $[\vec{a}, \vec{b}]$. Um die konvexe Hülle dreier Punkte $\{A, B, C\}$, die nicht auf einer Geraden liegen und das Innere dieses Dreiecks zu bestimmen, lassen wir uns von der folgenden Vorstellung leiten. Wir ziehen alle möglichen Verbindungen von C zu einem Punkt der Strecke $[\vec{a}, \vec{b}]$. Liegt $\vec{p}$ auf einer solchen Verbindung, so liegt $\vec{p}$ in der konvexen Hülle. Diese Vorstellung ist mit anderen äquivalent.

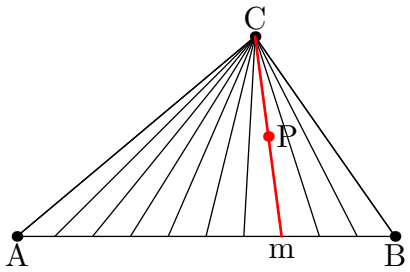


Abb. 6.10: Im Dreieck

Definition 83. Sei M eine nichtleere Teilmenge von V und $\vec{c}$ beliebig aus V. Die Vereinigung aller Strecken der Form $[\vec{c}, \vec{m}]$ mit $\vec{m} \in M$ heißt Kegel mit Spitze $\vec{c}$ und Basis M. Es ist also der Kegel $Keg(\vec{x}, M) = \bigcup_{\vec{m} \in M} [\vec{x}, \vec{m}]$.

Satz 6.68. *Die drei Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sollen nicht auf einer Geraden liegen. Für einen Punkt $\vec{p}$ sind äquivalent:*

1. *$\vec{p}$ liegt im Kegel $Keg(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.*

2. *Es gibt $r_a, r_b, r_c \in [0,1]$, $r_a + r_b + r_c = 1$ und $\vec{p} = \vec{a} \cdot r_a + \vec{b} \cdot r_c + \vec{c} \cdot r_c$.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $\vec{s}$ ein Punkt des Kegels $Keg(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$. Das heißt es gibt einen Punkt $\vec{m}$ auf der Strecke $[\vec{b}, \vec{c}]$, so dass $\vec{s}$ auf der Strecke $[\vec{a}, \vec{m}]$ liegt. Das heißt es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{s} &= \vec{a} \cdot t + \vec{m} \cdot (1-t); \quad t \in [0,1] \\
&= \vec{a} \cdot t + (\vec{b} \cdot l + \vec{c} \cdot (1-l)) \cdot (1-t); \quad l \in [0,1] \\
&= \vec{a} \cdot t + \vec{b} \cdot l \cdot (1-t) + \vec{c} \cdot (1-l)(1-t) \\
1 &= t + l \cdot (1-t) + (1-l) \cdot (1-t)
\end{aligned}$$

Mit $r_a = t$, $r_b = l \cdot (1-t)$ und $r_c = (1-l) \cdot (1-t)$. folgt die Behauptung 2.
2. $\Longrightarrow$1. Sei $\vec{p} = \vec{a} \cdot r_a + \vec{b} \cdot r_b + \vec{c} \cdot r_c$ mit $r_a, r_b, r_c \in [0,1]$ und $r_a + r_b + r_c = 1$. Ist $r_b + r_c = 0$, so ist $r_a = 1$ und $\vec{p} = \vec{a}$. Andernfalls ist

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \vec{a} \cdot r_a + (r_b + r_c) \cdot \left[\vec{b} \cdot \frac{r_b}{r_b + r_c} + \vec{c} \cdot \frac{r_c}{r_b + r_c} \right] \\
&= \vec{a} \cdot r_a + (r_b + r_c) \cdot \vec{m}
\end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{m}$ (der Term in eckigen Klammern) ein Punkt der Strecke $[\vec{b}, \vec{c}]$. Da $r_a + (r_b + r_c) = 1$ ist, ist $\vec{p} \in [\vec{a}, \vec{m}]$ Dies war zu zeigen. □

Folgerung 6.69. *Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so ist der Kegel mit Basis $[\vec{b}, \vec{c}]$ die konvexe Hülle von $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$*

Der Kegel $Keg(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ ist sicher Teilmenge der konvexen Hülle. Ich zeige, dass der Kegel konvex ist. Dann enthält er und ist also gleich der konvexen Hülle. Seien also

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \vec{a} \cdot r_a + \vec{b} \cdot r_b + \vec{c} \cdot r_c \\
\vec{q} &= \vec{a} \cdot s_a + \vec{b} \cdot s_b + \vec{c} \cdot s_c;
\end{aligned}$$

aus dem Kegel. Wegen dem Satz 6.68 lassen sich Elemente des Kegels so schreiben. Sei $\vec{x}$ ein Punkt der Verbindungsstrecke also $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \vec{p} \cdot t + \vec{q} \cdot (t-1) \\
&= \vec{a} \cdot (r_a t + s_a(1-t)) + \vec{b} \cdot (r_b t + s_b(1-t)) + \vec{c}(r_c t + s_c(1-t))
\end{aligned}$$

Man rechnet nun nach, dass die Summe der Koeffizienten von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gleich 1 ist. Alle Koeffizienten sind ≥ 0. Also ist $\vec{x}$ aus dem Kegel. □

Aufgaben:

77. Sei $\vec{a} \neq \vec{b}$ und $\vec{s}$ liege auf der Gerade durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{s} \neq \vec{b}$.
    a) Zeige: Es gibt genau eine Zahl $t(\vec{a}, \vec{s}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^+$ mit $\vec{s} - \vec{a} = t(\vec{a}, \vec{s}, \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{s})$. Diese Zahl heißt Teilverhältnis. $\vec{s}$ teilt die Strecke $[\vec{a}, \vec{b}]$ in diesem Verhältnis.
    b) $\vec{s}$ liegt genau dann im Innern der Strecke $[\vec{a}, \vec{b}]$, wenn $t(\vec{a}, \vec{s}, \vec{b}) > 0$ ist.
    c) Ist $r \in \mathbb{R}^+$, so gibt es genau einen Punkt $\vec{t}$ im Innern der Strecke $[\vec{a}, \vec{b}]$, der die Strecke in diesem Verhältnis teilt. Dieser Punkt heißt innerer Teilpunkt der Strecke i Verhältnis r.
    d) Erinnere dich wie man den Inneren Teilpunkt mit dem Strahlensatz konstruiert.
78. a) Im Punkt $\vec{a}$ sei ein Massenpunkt der Masse α und im Punkt $\vec{b}$ ein Punkt der Masse β. Wo ist der Massenmittelpunkt.
    b) In den drei Punkten $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind Massen der Größe α, β, γ, wo it der Massenmittelpunkt?
79. a) Zeige: Im K^2 ist die Menge $M = \{(x|y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ konvex.
    b) Zeige: Im K^2 ist die Menge $M = \{(x|y)|x^2 \leq y\}$ konvex.
80. Sei D ein Punkt im Innern eines Dreiecks $\triangle ABC$. Dann ist $\overline{AD} + \overline{DB} < \overline{AC} + \overline{CB}$.

7 Topologie der Geraden

„Es ist bekannt, dass die Ausführung der indirekten Operationen in der Analysis meist auf viel bedeutendere Schwierigkeiten stößt als die direkten; aber gerade dieser scheinbar unglückliche Umstand hat auf die Mathematik stets den günstigsten Einfluss gehabt. Nicht nur, dass die Besiegung dieser Schwierigkeiten, wenn sie möglich, immer einen eigentümlichen Reiz für den Mathematiker darbietet, sondern auch gerade die Fälle, in welchen dies mit den früher eingeführten Begriffen und Hilfsmitteln nicht möglich war, haben immer der weiteren Ausbildung der Mathematik ganz neue Felder eröffnet; so führen z.B. die Operationen der Subtraktion, Division und Wurzelausziehung auf die Begriffe der negativen, gebrochenen und imaginären Zahlen, von denen jeder das Gebiet der Mathematik so außerordentlich befruchtet hat. Ganz ähnlich verhält es sich nun auch in der höheren Analysis mit dem ihr zugrunde liegenden Begriff der Funktion, welcher sich anfangs nur auf die in der Elementarmathematik gelehrten Operationen (die ihnen entsprechenden Funktionen könnte man füglich Elementarfunktionen nennen) und auf deren Zusammenhang stützt. Die Differentialrechnung, der mächtigste Hebel zur Entwicklung der Theorie der Funktionen, findet in ihrer Ausführung keine Schwierigkeiten, d.h. das Differenzieren der aus den Operationen der Elementarmathematik gebildeten Funktionen führt wieder auf solche Funktionen. Dagegen ist es der umgekehrten Rechnungsart, welche in ihrer Gesamtheit die Integralrechnung bildet, nur in verhältnismäßig wenigen Fällen gelungen, dasselbe zu leisten; in den meisten ist es bisher nicht geglückt, oder vielmehr auch ganz unmöglich, die Integrale gegebener Funktionen mit Hilfe solcher..“ Soweit Richard Dedekind in seiner Dissertationsarbeit „ Über die Elemente der Theorie der eulerschen Integrale“ Fricke, Noether und Ore, *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke*, Seite 1

7.1 Folgen

7.1.1 Netze in angeordneten Körpern

Definition 84. • Eine halbgeordnete Menge $(I, \leq)$ heißt nach oben gefiltert, wenn es zu je zwei $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt, mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

- Eine halbgeordnete Menge $(I, \geq)$ heißt nach unten gefiltert, wenn es zu je zwei $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt, mit $i \geq k$ und $j \geq k$.

Beispiele: Beispiele:

44. $\mathbb{N}$ ist nach oben gefiltert.
45. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist nach oben gefiltert.
46. Ist K ein angeordneter Körper, so ist K nach oben gefiltert.
47. Ist $(X, \mathfrak{O})$ ein topologischer Raum, so ist der Umgebungsfilter eines Punktes $\mathfrak{A}(x)$ nach unten gefiltert.
48. Ist K ein angeordneter Körper, so ist die Menge $K^+ := \{k | k > 0, k \in K\}$ nach unten gefiltert.
49. Ist K ein angeordneter Körper, so ist die Menge K^+ auch nach oben gefiltert.
50. Sei $K = \mathbb{R}$ und $[a, b]$ ein Intervall. Eine Teilmenge $Z = \{x_0 = a < x_1 < \ldots, x_n = b\}$ heißt Zerlegung des Intervalls. Die Menge der Zerlegungen $\mathbf{Z}$ ist halbgeordnet durch die Inklusion. Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen und ist $Z_1 \subset Z_2$, so heißt Z_2 eine Verfeinerung von Z_1. Je zwei Zerlegungen besitzen eine gemeinsame Verfeinerung nämlich die Vereinigung.

Definition 85. Ist I eine filtrierende Menge und K ein angeordneter Körper, so heißt jede Funktion $f : I \to K$ ein Netz. Ein Netz f heißt schließlich positiv, wenn es ein $k \in I$ gibt, so dass für alle $i \geq k$ gilt: $f(i) > 0$.

Beispiele: Beispiele:

51. Sei $\mathbf{Z}$ die Menge der Zerlegungen eines Intervalls $[a, b]$ Die Funktion

$$\mathbf{Z} \ni Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \mapsto \sum_{/i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \in K$$

ist

Satz 7.1. *Sei I eine nach oben filtrierende Menge und K ein angeordneter Körper. Dann ist K^I mit der positiven Menge $P = \{f | f$ ist schließlich positiv $\}$ ein angeordneter Ring.*

Seien f und g schließlich positive Netze. Dann gibt es ein $m \in M$, so dass für alle $i \geq m$ $f(i) \geq 0$. Genauso gibt es ein $n \in I$, so dass für alle $i \geq n$ gilt $g(i) > 0$. Sei $k \geq n, m$. Dann gilt für alle $i \geq k$. $f(i) > 0$ und $g(i) > 0$. Damit ist $(f + g)(i) > 0$. Also ist $P + P \subset P$. Genauso zeigt man $P \cdot P \subset P$. $\square$

Definition 86. Zu jedem $c \in K$ gibt es das konstante Netz $\varphi(c) : I \ni i \mapsto c \in K$. Ist f ein Netz, so bezeichnen wir mit $|f|$ das Netz $I \ni i \mapsto |f(i)| \in K$. Ein Netz f heißt schließlich beschränkt, wenn es ein $c \in K$ gibt mit $|f| < \varphi(c)$.

Satz 7.2. *Sei I eine filtrierende Menge. Die Menge der schließlich beschränkten Netze $f : I \to K$ bilden einen unitären Unterring $SB(I, K)$ von K^I.*

Sind f, g zwei schließlich beschränkte Funktionen, so ist $|f| < \varphi(c)$ für ein $c \in K^+$ und $|g| < \varphi(d)$ für ein $d \in K^+$. Man erhält $|f + g| < |f| + |g| < \varphi(c) + \varphi(d) = \varphi(c + d)$. Also ist $f + g$ schließlich beschränkt. Fürs Produkt zweier Netze sieht dies genauso aus. □

Definition 87. Ein Netz f heißt Nullnetz, wenn für alle $c \in K^+$ gilt: $|f| < \varphi(c)$.

Satz 7.3. *Die Menge der Nullnetze $N(I, K)$ bilden ein Ideal in der menge $SB(I, K)$.*

Nach Definition ist jedes Nullnetz natürlich schließlich beschränkt. Seien f, g zwei Nullnetze und $\epsilon \in K^+$. Dann ist $|f| < \varphi(\epsilon/2)$ und auch $|g| < \varphi(\epsilon/2)$. Also ist $|f+g| < \varphi(\epsilon/2)+\varphi(\epsilon/2)$. Also ist $f+g$ ein Nullnetz. Ist f ein Nullnetz und g eine schließlich beschränkte Funktion, so gibt es ein $c \in K^+$ mit $|g| < \varphi(c)$. Sei $\epsilon \in K^+$ gegeben Dann ist $|f| < \varphi(\epsilon/c)$. Also ist $|f \cdot g| < \varphi(\epsilon/c) \cdot \varphi(c) = \varphi(\epsilon)$.□

Definition 88. Ein Netz f heißt konvergent gegen $a \in K$, wenn $f - \varphi(a)$ ein Nullnetz ist.

Satz 7.4. *$Ko(I, K)$= Menge der konvergenten Netze bilden einen unitären Unterring von $SB(I, K)$.*

Sind f, g konvergente Netz, so gibt es $a, b \in K$, so dass $|f-\varphi(a)|$ und $|g-\varphi(b)|$ Nullnetze sind. Dann ist $(f+g)-varphi(a+b)$ ein Nullnetz. $f \cdot g-\varphi(a)\cdot\varphi(b) = f \cdot g-\varphi(a) \cdot g+\varphi(a) \cdot g-\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (f-\varphi(a)) \cdot g+\varphi(a) \cdot (g-\varphi(b))$. Der erste Summand ist als Produkt einer schließlich beschränkten Funktion und eines Nullnetzes ein Nullnetz. Der zweite Summand genauso. Also ist die Summe ein Nullnetz. □

Definition 89. Eine Abbildung $\tau : I \to I$ heißt genau dann Progression, wenn für alle $i \in I$ gilt $\tau(i) \geq i$.

Bemerkung 19 Ist $I = \mathbb{N}$ so ist jede streng monoton wachsende Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Progression. □

15. März 2017

Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Es ist $\tau(0) \geq 0$. Sei $T = \{k | k \in \mathbb{N} \wedge \tau(k) \geq k\}$. Ist $k \in T$ so ist $\tau(k) \geq k$. Es ist $k + 1 > k$. Also ist $k \leq \tau(k) < \tau(k + 1)$. Daher ist $k + 1 \leq \tau(k + 1)$. □

Hinweise:

8. Ist auch jede Progression streng monoton wachsend?

Satz 7.5. *Ist $f : I \to K$ ein konvergentes Netz und ist $\tau : I \to I$ eine Progression, so ist auch $f \circ$ „tau ein konvergentes Netz.*

7.1.2 Konvergente Netze

Sei K ein angeordneter Körper mit einem absoluten Betrag. Wir betrachten $Abb(\mathbb{N}, K) = [\mathbb{N}, K]$. Erklären wir elementweise die Addition und die Multiplikation zweier solcher Funktionen, so wird $[\mathbb{N}, K]$ zu einem Ring. Der Ring der Folgen. Wir sagen eine Aussageform über natürliche Zahlen gelte für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A(n)$ richtig ist, für alle $n \geq k$.

Definition 90. Sei
$\mathbb{P} = \{f | f(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \wedge f(n) > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}\}$

Satz 7.6. $[\mathbb{N}, K]$ *ist mit der Menge $\mathbb{P}$ ein halbgeordneter Ring.*

Sei $f \in \mathbb{P} \cap -\mathbb{P}$. Also $f(n) \leq 0$ und $f(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Abgeschlossenheit gegenüber der Addition und der Multiplikation ist klar.

Definition 91. Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in K$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \leq M$. Entsprechend erklärt man die Beschränktheit der Folge nach unten. Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. $Be(\mathbb{N}, K) :=$ Menge der beschränkten Folgen.

Satz 7.7. *Die Menge der beschränkten Folgen $Be(\mathbb{N}, K)$ bilden einen unitären Ring.*

Definition 92. Eine Folge $(a_n | n \in \mathbb{N})$ heißt Nullfolge, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt: Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $|a_n| < \epsilon$. $Nu(\mathbb{N}, K) =$ Menge der Nullfolgen.

Satz 7.8. *Die Menge der Nullfolgen bilden ein Ideal in dem Ring in* $Be[\mathbb{N}, K]$.

Die Abgeschlossenheit von $Nu(\mathbb{N}, K)$ gegenüber der Addition ergibt sich aus der Dreiecksungleichung. Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. $M > 0$ eine Schranke von (b_n). Dann ist $a_n \cdot b_n| = |a_n||b_n| < M \cdot |a_n|$. □

Definition 93. Eine Folge (a_n) heißt konvergent genau dann, wenn es ein $a \in K$ gibt, so dass $(a - a_n)$ eine Nullfolge ist. $Ko[\mathbb{N}, K] :=$ Menge der Nullfolgen.

Der Grenzwert einer Folge ist, wenn er existiert eindeutig bestimmt.

Satz 7.9. $Ko[\mathbb{N}, K]$ *ist eine* K*- Unteralgebra von* $Be[\mathbb{N}, K]$. *Die Zuordnung* $Ko[\mathbb{N}, K] \ni (a_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in K$ *ist ein surjektiver* K*- Algebrahomomorphismus.*

Definition 94. Sei (a_n) eine Folge und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Die Folge $(a_{f(n)})$ heißt Teilfolge von (a_n).

Satz 7.10. *Eine Folge ist konvergent genau dann, wenn jede Teilfolge konvergiert. Jede Teilfolge hat den gleichen Grenzwert.*

7.1.3 Archimedische Körper

Jeder angeordnete Körper enthält eine isomorphe Kopie von $\mathbb{Q}$.

Satz 7.11. *Für einen angeordneten Körper sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Die Folge* $(a_n) = (\frac{1}{n})$ *ist eine Nullfolge.*
2. $\mathbb{N}$ *ist nach oben unbeschränkt.*
3. *Für alle* $a > 0$ *ist die Menge* $a \cdot \mathbb{N}$ *in* K *unbeschränkt nach oben.*
4. $\mathbb{Q}$ *liegt dicht in* K. *Das heißt zwischen zwei Elementen aus* K *gibt es stets eine Zahl aus* $\mathbb{Q}$.

Definition 95. Ein Körper der die Äquivalenzen des Satzes erfüllt heißt archimedischer Körper.

15. März 2017

1. $\Longrightarrow$2.: Sei c irgend eine positive reelle Zahl. Dann ist $\epsilon = \frac{1}{c}$ positiv. Nach Voraussetzung übertrifft ϵ fast alle Stammbrüche. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon = \frac{1}{c}$. Daher ist c keine obere Schranke von $\mathbb{N}$.
2.$\Longrightarrow$3. Sei $a > 0$ und c eine sehr große Zahl. Nach Teil 2. kann $\frac{c}{a}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{c}{a}$ damit ist $n \cdot a > c$. Das war zu zeigen.
3. $\Longrightarrow$1. Sei ϵ eine winzig kleine Zahl. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \epsilon > 1$. Damit ist $\frac{1}{n} < \epsilon$.
1. $\Longrightarrow$4.: Da die Äquivalenz von 1.,2. 3. schon gezeigt worden ist, kann 2. und 3. mitverwendet werden. Wir zeigen die Behauptung nur fürpositive Zahlen $a < b$. Der Rest kann sich jeder einfach selber überlegen. Sei also $0 < a < b$. Nun gibt es nach Teil 3) eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < b - a$ ist. Auf dieses $\frac{1}{n}$ wenden wir die Eigenschaft 2) an. Es gibt also ein kleinstes m, so dass $m \cdot \frac{1}{n} \geq a$ ist. Wäre $m \cdot \frac{1}{n} > b$, so wäre $m \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = (m-1) \cdot \frac{1}{n} > b - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a$. Das ist aber ein Widerspruch. Also gilt $a \leq \frac{m}{n} < b$. Das wurde behauptet.
4. $\Longrightarrow$1.: Ist klar. □

Satz 7.12. *Folgende Aussagen sind für einen angeordneten Körper äquivalent:*

1. *K ist archimedisch.*
2. *Für jedes a mit $0 \leq a < 1$ ist (a^n) eine Nullfolge.*
3. *Für jedes $a > 1$ ist (a^n) eine nach oben unbeschränkte Folge.*
4. *Die Folge (2^n) ist nach oben unbeschränkt.*
5. *Die Folge $(\frac{1}{2^n})$ ist eine Nullfolge.*

7.1.4 Konvergente Folgen

Die Folge $\frac{n}{n+1}$ strebt gegen 1 wie jeder leicht „sieht“.

Definition 96. Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert a genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |a - a_n| = 0$ ist. Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = a$.

Satz 7.13. *Jede konvergente Folge hat nur einen Grenzwert.*

Angenommen die konvergente Folge (a_n) h©tte zwei Grenzwerte $a < b$. Dann sind nach Definition die Folgen $(a - a_n)$ und $(b - a_n)$ Nullfolgen. Also ist $((b - a_n) - (a - a_n)) = (b - a)$ eine Nullfolge. Dies kann aber nicht sein. □

Satz 7.14. *Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und* lim *limits$_{n\to\infty}(b_n) = b$, dann ist $(a_n + b_n)$ eine konvergente Folge und es ist: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.*

$((a+b)-(a_n+b_n)) = (a-a_n)+(b-b_n)$. Beide Summanden sind Nullfolgen. Daraus ergibt sich mit der Definition die Behauptung. □

Satz 7.15. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$. Dann ist $|a_n - a + a| \leq |a - a_n| + |a|$. Der erste Summand ist beschränkt, da er eine Nullfolge ist. Der zweite ist sowieso beschränkt. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Satz 7.16. *Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, dann ist die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergent und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$.*

$|a \cdot b - a_n b_n| = |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \leq |a - a_n||b| + |a_n||b - b_n|$. Nun sind beide Summanden Produkte aus einer beschränkten Folge und einer Nullfolge. Damit ist $|a \cdot b - a_n b_n|$ eine Nullfolge. □

Satz 7.17. *Sei (a_n) eine konvergente Folge und $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{a_n}$ konvergent und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.*

Wir setzen zunächst $a > 0$ voraus. Ich zeige $\frac{1}{a_n}$ ist beschränkt. Ist s irgend eine Zahl $0 < s < a$. Für fast alle Folgenglieder gilt:
$0 < s < a_n < a + (a - s)$. Damit gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{s}$. Die endlich vielen Folgenglieder, die diese Ungleichung nicht erfüllen sind erst recht beschränkt, denn jede endliche Menge ist beschränkt. Also ist die Folge $\frac{1}{a_n}$ beschränkt. Nun ist : $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a_n}\right| = \frac{|(a-a_n)|}{(|a_n||a|)}$. Das Produkt aus etwas beschränktem und einer Nullfolge ist eine Nullfolge. □

Aufgaben: Aufgaben:

81. Gegeben ist die Folge (a_n). Wenn sie Konvergent ist, dann berechne den Grenzwert der Folge:
    a) $a_n = \frac{2n^2-n}{n^2+n-1}$.
    b) $a_n = \frac{3n+2(-1)^n}{n}$.
    c) $a_n = \frac{3^n-3^{n-2}}{2+3^n}$.
    d) $a_n = \frac{(2n-1)^4}{(n+1)^4}$.

e) $a_n = \frac{n \cdot x^2}{n \cdot x^2 + 1}$ dabei ist x eine beliebige reelle Zahl.

f) $a_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2+1}}$.

82. Zeige:

a) Ist (a_n) eine positive konvergente Folge,mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$, dann ist $(\sqrt{a_n})$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

b) Ist (a_n) eine positive konvergente Folge, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist $\sqrt[3]{a_n}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[n]{a}$.

83. Sind folgende Folgen konvergent? Wenn ja berechne den Grenzwert.

a) $\sqrt{5 + \frac{7}{n}} = a_n$.

b) $\sqrt[3]{1 + a_n}$ mit einem beliebigen positiven a aus $\mathbb{R}$

c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = a_n$.

d) $\sqrt{n+a} - \sqrt{n} = a_n$. Dabei ist a eine beliebige positive Zahl.

84. a) Wiederhole: Ist $0 < a < 1$, dann ist $(a^n) = (a_n)$ eine Nullfolge.

b) Sei $0 < a < 1$. Zeige die Folge $b_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$ ist konvergent. Sie hat den Grenzwert $\frac{1}{1-a}$.

85. Gegeben sind folgende periodischen Dezimalbrüche. Wandle sie in gewöhnliche Brüche um.

(a) 1.2. (b) 1.23, (c) 1.142 (d) 1.142857.

86. In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 ist das Seitenmittendreieck gezeichnet. Indem wieder das Seitenmittendreieck usw.

a) Berechne die Summe aller Flächeninhalte.

b) Berechne die Summe aller Umfänge.

87. In einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 ist das Seitenmittenquadrat einbeschrieben. Dem wieder das Seitenmittenquadrat etc.

a) Berechne die Summe aller Umfänge.

b) Berechne die Summe aller Flächen.

88. Einem Kreis mit Radius 1 wird ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, diesem wieder der Inkreis , diesem wieder ein gleichseitiges Dreieck.

a) Berechne die Summe der Umfänge aller Dreiecke.

b) Berechne die Summe der Umfänge aller Kreise.

c) Dasselbe für die Flächen.

89. Einer geraden quadratischen Pyramide (Grundkante 1, Höhe 2) wird der Würfel einbeschrieben, der der Grundfläche aufliegt; mit der Restpyramide oberhalb des Quaders wird genauso verfahren usw. Wieviel % des Pyramidenvolumens macht das Volumen aller unendlich vielen Würfel aus? Welche Gesamtoberfläche haben die Würfel?

90. In eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Höhe h, werden n gleichhohe Quader treppenförmig aufeinendergelegt, so dass die Treppenfigur der Pyramide einbeschrieben ist. Welchem Grenzwert strebt das Volumen der Treppenfigur für $n \to \infty$ zu?
91. In ein gleichseitiges Dreieck werden unendlich viele „Keile“ gezeichnet. (Siehe Figur). Wieviel % der gesamten Dreiecksfl©che machen alle Keile zusammen aus?
92. Ein Gummiball wird aus der Höhe $h = 2$m fallen gelassen und fällt und steigt abwechselnd, wobei bei jedem Aufprall seine kinetische Energie um 19% abnimmt.
    a) Wie lang dauert der ganze Vorgang?
    b) Welchen Weg legt dabei der Ball total zurück?
93. Morgens um 6 Uhr bricht Jäger Knall zu seiner $10km$ entfernten Jagdhütte auf. Sein Hund Wau läuft doppelt so schnell, kehrt an der Jagdhütte um, läuft wieder bis zum Herrn zurück und pendelt so ständig zwischen Hütte und Knall hin und her. Welche Strecke ist Wau gelaufen, wenn Knall um 8 Uhr in der Hütte ankommt?
94. Der Quadratfächer:
    In ein Quadrat mit der Seitenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D wird auf der Seite $[AB]$ ein Punkt A_1 gew©hlt, so dass $AA_1 = \frac{1}{3}a$ ist entsprechend wählt man B_1 auf der Seite $[BC]$ und C_1, D_1. Die Figur $A_1B_1C_1D_1$ bildet wieder ein Quadrat. Dasselbe macht man mit dem Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ etc. Aneinanderstoßende Dreiecke werden nun wie in der Zeichnung rosa gefärbt. Welchen Flächeninhalt hat der rosa Fächer?
95. Die Quadratpflanze: Auf jeder Seite a des Mutterquadrates, und zwar aus dem mittleren Drittel, sproßt ein Tochterquadrat mit der Seite a_1, aus diesem wieder... Hat die Quadratplanze endlichen Flächeninhalt? Welchen? Hat sie auch endlichen Umfang?

7.1.5 Teilfolgen

Betrachten wir die Folge $(\frac{n}{n+1}) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$. Von ihr wissen wir, dass sie den Grenzwert 1 hat. Suchen wir nur jedes zweite Glied der Folge aus, so erhalten wir die Folge $(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots) = (\frac{2n}{2n+1})$. Auch diese Folge hat den Grenzwert 1. Genausogut können wir jedes 10te Glied der Folge auswählen. Dies ergibt $(\frac{10n}{10n+1})$.

Satz 7.18. *Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $n \leq \tau(n)$.*

Es ist sicher $1 \leq \tau(1)$. Sei die Behauptung richtig für k. Also es gelte $k \leq \tau(k)$. Da τ streng monoton wachsend ist, ist $k \leq \tau(k) < \tau(k+1)$. Daher folgt: $k + 1 \leq \tau(k+1)$. □

Definition 97. Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monotone Funktion und (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Die Folge $(a_{\tau(n)})$ heißt dann Teilfolge von (a_n).

Satz 7.19. *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.*

Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $|a - a_n| < \varepsilon$. Nun ist für alle $n \in \mathbb{N} : \tau(n) \geq n$. Das heißt es gilt erst recht: $|a - a_{\tau(n)}| < \varepsilon$. Dies bedeutet, dass die Folge $(a_{\tau(n)})$ gegen a konvergiert. □

Dieser Satz ist oft hilfreich, um den Grenzwert einer Folge tatsächlich auszurechnen, wenn man weiß, dass die Folge konvergiert.

1. Sei $a_0 := 10$, $a_{n+1} := \sqrt{a_n}$. Es ist leicht zu vermuten, dass die Folge konvergiert. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Es ist $a_{n+1}^2 = a_n$. Daher ist $(\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1})^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Also ist $a^2 = a$ und daher ist $a = 1$.

2. $a_0 := 2$; $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$. Wenn die Folge konvergiert gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Bezeichnen wir mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so erhalten wir:
   $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ und daraus $a = \sqrt{2}$.

Solche induktiv definierten Folgen kommen in der Natur häufig vor. Wir wollen dazu ein Beispiel genauer besprechen. Es wird uns an den Rand des Chaos führen.
Der Schwammspinner ist eine bestimmte Raupe, die sich explosionsartig vermehrt. Gehen wir von einer Kolonie von 1000 Faltern aus. Jedes Insekt habe pro Jahr zwei ©berlebende Nachkommen, die zur Geschlechtsreife gelangen. Es ist dann $x_0 = 1000$ und $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$. F©r eine andere Wachstumsrate k gilt: $x_{n+1} = k \cdot x_n$. Es ergibt sich: $x_n = k^n \cdot x_0$. Ist $k < 1$ so stirbt die Population aus. Andernfalls w©chst sie exponentiell. Dies kann nat©rlich nur in einem unendlichen Lebensraum gelten. In einer begrenzten Welt oder einer Welt mit begrenztem Nahrungsvorrat nehmen die ©berlebenschancen ab, wenn die Anzahl (x_n) sich einer bestimmten Grenze n©hert. Ein erster und einfacher Versuch dies zu ber©cksichtigen ist folgendes: Es soll gelten: $k \sim (1 - x_n)$ oder anders $k = r \cdot (1 - x_n)$ mit einer gewissen Konstanten r. Es ist 1 die Grenze, welche x_n nicht ©berschreiten soll. Wir erhalten die sogenannte logistische Gleichung.

$$x_{n+1} = r \cdot (1 - x_n) \cdot x_n \tag{7.1}$$

Sie stammt von dem belgischen Mathematiker Pierre Francois Verhulst (28.10.1804 bis 15.2.1849). Er wurde damit zum Vorläufer der modernen Bevölkerungsstatistik. Diese Iterationsgleichung 7.1 werden wir genauer untersuchen. Ist $0 \leq r < 1$ so ist es nicht schwer zu zeigen, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Die Population stirbt aus. Zum Untersuchen anderer Parameter r ist es nützlich, ein kleines Program zur Verfügung zu haben. In der Sprache `emacs lisp` sieht es folgendermaßen aus:

```
(defun fu(r x)
 (* r (- 1 x) x)
)
(defun string(n x)
"Wandelt einen Punkt in einen String! "
  (concat (number-to-string n) "   " (number-to-string x)
          "\n"))


(progn
(setq x 0.9 n 0 r 3)
(while (< n 300)
(princ (string n x)  (get-buffer "logistisch"))
(setq x (fu r x) n (+ n 1))
)
)
```

Lassen wir dieses Programm mit $r = 1$ und etwa 20 Iterationen laufen, so vermuten wir zu Recht, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Wir können auch beweisen, dass die Folge keinen anderen Grenzwert haben kann. Angenommen a ist der Grenzwert der Folge (a_n). Dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Wir erhalten: $a = a \cdot (1-a)$ und daher $a^2 = 0$. Also ist $a = 0$. Das heißt, wenn die Folge einen Grenzwert hat, so ist dies 0. In diesem Beispiel ist es einleuchtend, zu glauben, dass die Folge konvergiert. Tun wir es, trotz einem kleinem schlechten Gewissen. Biologisch heißt dies: Eine Population, welche die logistische Gleichung 7.1 mit $r = 1$ erfüllt ist zum Aussterben verurteilt.
Betrachten wir den Fall $r = 2$. Unser Programm sagt diesmal, dass der Grenzwert 0.5 ist. Dabei ist der Startwert egal. Auch diesmal ist dieser Grenzwert unter der Voraussetzung, dass er existiert leicht zu berechnen.
Schwieriger wird die Situation im Falle $r = 3$. Die ersten 20 Iterationen liefern folgendes Ergebnis:

```
0   0.9
```

```
1   0.26999999999999996
2   0.5912999999999999
3   0.72499293
4   0.5981345443500453
5   0.7211088336156269
6   0.603332651091411
7   0.7179670896552621
8   0.6074710434816448
9   0.7153499244388992
10   0.6108732301324812
11   0.7131213805199696
12   0.6137378314957869
13   0.711191117059908
14   0.6161949362249647
15   0.7094962103870291
16   0.6183340135004208
17   0.7079911837466467
18   0.6202190024510059
19   0.7066421743490551
```

Diesmal bringt unser Programm etwas zwiespältiges heraus. Es sieht so aus, als ob die Folge zwischen zwei Werten hin und her springt. Konvergiert sie? Wenn ja berechne den Grenzwert. Noch unübersichlicher wird die Frage bei $r = 3.2$ oder gar $r = 3.9$. Wir brauchen also unbedingt Konvergenzkriterien. Aufgaben:

96. Gegeben sei die logistische Gleichung 7.1 $x_0 = 0.2$.
    a) Ist $0 \leq r < 1$, so hat die Folge (a_n) den Grenzwert 0.
    b) Ist $r = 1$, so fällt die Folge monoton.
    c) Ist $r = 2$, so wächst die Folge monoton. Beweise dies indem du folgendermaßen vorgehst. $f(x) = 2 \cdot (1 - x) \cdot x$.
        i. $a \in [0, 1]$ dann ist $f(a) \in [0, \frac{1}{2}]$.
        ii. Zeige: Für $a \in [0, \frac{1}{2}]$ ist $a \leq f(a)$. Folgere hieraus, dass die Folge monoton wächst.
    d) Berechne allgemein den Scheitel der quadratischen Funktion $f(x) = r \cdot (1 - x) \cdot x$ in Abhängigkeit von r. Bei welchen r kann man etwas allgemein aussagen zu der Frage: F©r welche Startwerte wächst die Folge $a_{n+1} := f(a_n)$ monoton?

7.1.6 Fundamentalfolgen

Wir betrachten jetzt nur archimedisch angeordnete Körper.

Definition 98. Eine Folge (a_n) heißt Fundamentalfolge oder Cauchyfolge genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq k$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 7.20. *Die Menge der Fundamentalfolgen $Ca[\mathbb{N}, K]$ bilden eine K- Unteralgebra von $Be[\mathbb{N}, K]$.*

Sei (a_n) eine Fundamentalfolge. Es gibt eine natürliche Zahl k, so dass für alle $n, m \geq k$ gilt: $|a_n - a_m| < 1$. Sei $M = \max\{|a_i| i \leq k\}$. Ist $m \leq k$, so ist $|a_m| \leq M$. Ist $m \geq k$, so gilt: $|a_m| = ||a_m - a_k + a_k| \leq |a_m - a_k| + |a_k| \leq 1 + M$. Also ist die Folge (a_n) beschränkt.
Sind (a_n) und (b_n) Fundamentalfolgen, uns ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es natürliche Zahlen k, l, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq k$ und $|b_n - b_m| < \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq l$ gilt. Dann folgt für alle $n, m \geq \max\{k, k\}$: $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Also ist die Summe von Fundamentalfolgen eine Fundamentalfolge. □

Beispiele zu Fundamentalfolgen liefern die beiden folgenden Sätze:

Satz 7.21. *Jede konvergente Folge ist eine Fundamentalfolge.*

Sei $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n, m \geq k$ folgt: $|a_n - a_m| = |a - a_m + a_n - a| \leq |a - a_n| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Daher ist (a_n) eine Fundamentalfolge. □

Satz 7.22. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gilt:*

1. *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist eine Fundamentalfolge.*
2. *Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist eine Fundamentalfolge.*

Zu 1.: Sei (a_n) eine monoton wachsende und etwa durch s nach oben beschränkte Folge. Weiter sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da K archimedisch angeordnet ist, ist die Menge $\{n \cdot \varepsilon | n \in \mathbb{N}\}$ nach oben unbeschränkt. Es gibt daher eine kleinste natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}$, so dass $l \cdot \varepsilon$ eine obere Schranke ist. Also ist $(l-1) \cdot \varepsilon$ keine obere Schranke der Folge mehr. Das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $(l-1) \cdot \varepsilon < a_k$. Sind $n, m \geq k$, so ist, da (a_n) monoton wächst, $a_n, a_m \in [(l-1) \cdot \varepsilon, l \cdot \varepsilon]$. Also ist $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Das heißt (a_n) ist eine Fundamentalfolge.
Zu 2.: Sei (a_n) eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Dann ist $(-a_n)$ eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge. Damit ist $(-a_n)$ und damit (a_n) eine Fundamentalfolge. □

Satz 7.23. *Jede Fundamentalfolge enthält eine monotone Teilfolge.*

Ich nenne ein a_k Spitze der Folge, wenn für alle $n \geq k$ gilt: $a_k \geq a_n$ Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Es gibt unendlich viele Spitzen. Dann ist die Teilfolge der Spitzen monoton fallend.

2. Es gibt nur endlich viele Spitzen. Dann gibt es ein kleinstes k nach dem keine Spitze mehr kommt. Sei $\tau(0) = k$. Sei schon $\tau(n)$ bestimmt. Es ist $a_{\tau(n)}$ keine Spitze. Daher gibt es ein $\tau(n+1)$ mit $a_{\tau(n+1)} \geq a_{\tau(n)}$. Die so definierte Folge ist monoton wachsend. Es ergibt sich die Behauptung. □

Satz 7.24. *Ist eine Teilfolge einer Fundamentalfolge konvergent, so ist die Fundamentalfolge selber konvergent.*

Sei $(a_{\tau(n)})$ eine Teilfolge von (a_n), die etwa gegen a konvergiert. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (a_n) eine Fundamentalfolge ist, gibt es eine natürliche Zahl l, so dass für alle $m, n \geq l$ gilt:$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da $(a_{\tau(n)})$ konvergiert, gibt es eine natürliche Zahl $k \geq l$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $|a_{\tau(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n \geq \max\{l, k\}$ gilt: $|a_n - a| \leq |a_n - a_{\tau(n)} + a_{\tau(n)} - a| \leq |a_n - a_{\tau(n)}| + |a_{\tau(n)} - a| < \varepsilon$. Also ist (a_n) konvergent. □

Satz 7.25. *Ist (a_n) eine Fundamentalfolge, die keine Nullfolge ist, dann gibt es ein $r > 0$, so dass gilt: Entweder ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n > r$ oder es ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n < -r$.*

Sei (a_n) eine Nullfolge. Das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \geq \varepsilon$. Da (a_n) eine Fundamentalfolge ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq k$ gilt: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ und $l \geq k$ mit $|a_l| \geq \varepsilon$.
1. Fall: $a_l > \varepsilon$. Es ist $|a_l - a_n| < \varepsilon/2$. Also ist $a_n > \varepsilon/2$.
2.Fall: Es ist $|a_l - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq l$. Also ist $a_n \in [a_l - \varepsilon/2, a_l + \varepsilon/2]$. Daher ist $a_n < -\varepsilon/2$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

7.1.7 Der Ring der Fundamentalfolgen

Satz 7.26. *Im Ring der Fundamentalfolgen ist die Menge der Nullfolgen ein maximales Ideal.*

Sei zur Abkürzung R der Ring der Fundamentalfolgen. Wir müssen zeigen: Ist (a_n) eine Fundamentalfolge, die keine Nullfolge ist, so ist $(a_n) \cdot R + Nu(\mathbb{N}, K) = R$. Oder andres ausgedrückt: Ist (a_n) keine Nullfolge, so gibt es eine Folge (b_n) und eine Nullfolge (d_n), so dass $(a_n)(b_n) + (d_n) = (1)$ ist.
Sei also (a_n) keine Nullfolge. Es gibt ein $r > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > k$ gilt: $|a_n| > r$. Wir definieren:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \leq k \\ \frac{1}{a_n} & \text{für } n > k. \end{cases} \tag{7.2}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (a_n) eine Fundamentalfolge ist, gibt es ein $l \geq k$, so dass für alle $n, m \geq l$ gilt: $|a_n - a_m| < r^2 \cdot \varepsilon$. Wir erhalten für $n, m \geq l$: $|b_n - b_m| = |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}| = |\frac{a_m - a_n}{a_m \cdot a_n}| < \frac{\varepsilon \cdot r^2}{r^2} = \varepsilon$. Also ist (b_n) eine Fundamentalfolge. Außerdem ist

$$d_n = (1) - (a_n) \cdot (b_n) = \begin{cases} 1 - a_n & \text{für } n \leq k \\ 0 & \text{für } n > k \end{cases} \tag{7.3}$$

eine Nullfolge. Damit ist $(a_n \cdot b_n) + (d_n) = (1)$ wie gewünscht. □

Definition 99. Ich bezeichne $\mathfrak{C}$:=Menge der Fundamentalfolgen und $\mathfrak{N}$ die Menge der Nullfolgen.

Satz 7.27. $\overline{K} := \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ *ist ein archimedisch angeordneter Körper.*

$$P = \{\overline{(a_n)} | a_n \geq 0 \textit{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ist die zughörige positive Menge. Die Abbildung

$$\tau : \mathfrak{C} \ni (a_n) \mapsto \overline{(a_n)} \in \overline{K}$$

ist, wenn man sie auf die konstanten Folgen einschränkt ein Monomorphismus. Wir haben daher einen natürlichen Monomorphismus $\iota : K \ni a \mapsto \overline{(a)} \in \mathfrak{C} \wedge \mathfrak{N}$, *wobei* $\overline{(a)}$ *das Bild der konstanten Folge ist.* $\iota(K)$ *ist dicht in* $\overline{K}$.

P ist eine positive Menge wie, wie man leicht sieht. Auch ergibt sich sofort, dass ι ein Monomorphismus ist. Bleibt zu zeigen, dass $\iota(K)$ dicht in $\overline{(}K)$ ist. Es genügt dafür zu zeigen, dass es zu jedem $\overline{K} \ni \alpha > 0$ eine konstante Folge gibt, die kleiner ist. Sei $\alpha = \overline{(a_n)} > 0 \in \overline{K}$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $0 < r \leq a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Die konstante Folge $\overline{(r/2)}$ erfüllt die gewünschte Bedingung. Auch dass $\overline{K}$ archimedisch ist, ist nun klar. □

Satz 7.28. *In* $\overline{K}$ *konvergiert jede Fundamentalfolge.*

Satz 7.29. *Für jeden angeordneten Körper ist* $\overline{K} \cong \overline{\overline{K}}$.

7.1.8 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Um die Eigenschaftender Vollständigkeit etwas eleganter zu beweisen führe ich einen Hilfsbegriff ein.

Definition 100. Sei $\mathfrak{I}$ die Menge der abgeschlossenen Intervalle der Form $[a, b] \subset K(a < b)$, wobei K ein archimedisch angeordneter Körper ist. Eine Funktion

$$B : \mathfrak{I} \to \{0, 1\}$$

heißt eine Bizette, wenn sie folgende Eigenschaft hat. Ist für ein Intervall $B([a, b]) = 1$, so ist $B([a, (b + a)/2]) = 1$ oder $B([(a + b)/2, b]) = 1$ (Bizette soll an Pinzette und Bisection erinnern).

Definition 101. Eine Folge von Intervallen $(I_n|n \in \mathbb{N})I_n = [a_n, b_n]$ heißt Intervallschachtelung, wenn $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_{n+1} - a_{n+1} \leq 0.5 \cdot (b_n - a_n)$ ist.

Satz 7.30. *Sei $B : \mathfrak{I} \to \{0, 1\}$ eine Bizette mit $B([a, b]) = 1$. Dann gibt es eine Intervallschachtelung $(I_n|n \in \mathbb{N})$ mit $B([a_n, b_n]) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).*

Wir erklären induktiv besagte Intervallschachtelung. Es ist $B([a, b]) = 1$. Sei $a_0 := a, b_0 := b$ und $m = \frac{a+b}{2}$.
Seien $[a_n, b_n] = I_n$ schon definiert und $m = \frac{a_n+b_n}{2}$. Wir erklären wir:

$$a_{n+1} := \begin{cases} m & \text{falls } B([m, b_n]) = 1 \\ a_n & \text{sonst} \end{cases}; \qquad b_{n+1} := \begin{cases} b_n & \text{falls } B([m, b_n]) = 1 \\ m & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $B([a_{n+1}, b_{n+1}]) = 1$. Denn

Fall 1 Es ist $B([m, b_n]) = 1$. Dann ist $a_{n+1} = m$ und $b_{n+1} = b_n$. Wir sind fertig.

Fall 2 Andernfalls ist $B([m, b_n]) = 0$. Dann ist aber $B([a_n, m]) = 1$. In diesem Fall ist $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = m$. Also ist $B([a_{n+1}, b_{n+1}]) = 1$. □

Beispiele:

1. Sei (a_n) eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist. Die folgende Funktion ist $B : \mathfrak{I} \to \{0, 1\}$ ist eine Bizette.

$$B([a, b]) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [a, b] \text{ eine obere Schranke und ein Folgenglied enthält.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei $[a, b]$ ein Intervall mit $B([a, b]) = 1$. Dann enthält $[a, b]$ eine obere Schranke und mindestens ein Folgenglied. Sei $m = \frac{a+b}{2}$.

1. Fall m ist obere Schranke von $(a_n | n \in \mathbb{N})$. Das Intervall $[a, b]$ enthält mindestens ein Folgenglied, etwa a_k. Da m obere Schranke von (a_n) ist, ist $a_k \leq m$. Daher ist $B([a, m]) = 1$.

2. Fall m ist keine obere Schranke von (a_n). Dann gibt es ein k mit $a_k > m$. Daher ist $a_k \in [m, b]$. Daher ist $B([m, b]) = 1$.

2. Sei A eine beschränkte unendliche Menge. $B([a, b]) = 1$, wenn $[a, b]$ eine unendliche Teilmenge aus A enthält, 0 sonst. B ist eine Bizette.

   Beweis: Das liegt einfach daran, dass mindestens eine der Mengen $[a, m]$ oder $[m, b]$ unendlich viele Elemente aus A enthält.

3. Sei (a_n) eine beschränkte Folge. $B([a, b]) = 1$, falls $[a, b]$ unendlich viele Folgenglieder enthält 0 sonst.

4. Sei A eine zusammenhängende Teilmenge angeordneten Körpers K. $A \xrightarrow{f} K$ eine Funktion. $B([a, b]) = 1$ falls $a, b \in A$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Im andern Fall sei $B([a, b]) = 0$.

   Sei $f(a) \cdot f(b) < 0$.

   1. Fall $f(a) \cdot f(m) \geq 0$. Dann haben $f(a)$ und $f(m)$ gleiches Vorzeichen. Also hat $f(m)$ ein anderes Vorzeichen als $f(b)$. Daher ist $f(m) \cdot f(b) < 0$ und $B([m, b]) = 1$.

   2. Fall $(fa) \cdot f(m) < 0$. Dann sind wir fertig. Denn dann ist $B([a, m]) = 1$.

Folgerung 7.31. *Jede monoton wachsende und beschränkte Folge ist eine Fundamentalfolge.*

Es gibt eine Intervallschachtelung mit folgender Eigenschaft. I_n enthält eine obere Schranke von (a_n) und mindestens ein Folgenglied. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass I_k kürzer als ε ist. I_k enthält ein a_{n_0} und eine obere Schranke b der Folge (a_n). Daher ist für alle $n, m \geq n_0$ $a_n, a_m \in I_k$ und daher $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Das war behauptet. □

Definition 102. Seien Mu und Mo zwei nichtleere Teilmengen des archimedisch angeordneten Körpers K. Wir sagen Mu liegt unterhalb von Mo, wenn für alle $x \in Mu$ und alle $y \in Mo$ gilt: $x \leq y$. Liege Mu unterhalb von Mo. Wir sagen b liegt zwischen Mu und Mo, wenn für alle $x \in Mu$ und alle $y \in Mo$ gilt: $x \leq b \leq y$.

Satz 7.32 (Vollständigkeit). *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jede Fundamentalfolge konvergiert in K.*

2. *Für jede Intervallschachtelung* $(I_n | n \in \mathbb{N})$ *ist* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

3. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge* M *besitzt eine kleinste obere Schranke das Supremum von* M *oder* $\sup(M)$.

4. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge besitzt eine größte untere Schranke.*

5. *Für alle nichtleeren Teilmengen* M_u *und* M_o *von* K *gilt: Liegt* M_u *unterhalb von* M_o*, dann gibt es ein Element zwischen* M_u *und* M_o.

6. *Für alle nichtleeren Teilmengen* M_u *und* M_o *gilt: Liegt* M_u *unterhalb von* M_o *und ist* $M_u \cup M_o = K$*, so gibt es genau ein Element zwischen* M_u *und* M_o.

7. *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert.*

8. *Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.*

9. *Jede beschränkte unendliche Menge besitzt einen Häufungspunkt.*

2. $\Longrightarrow$3. Sei A eine nichtleere nach oben beschränkte Menge. Dies definiert eine Bizette folgendermaßen. $B([a,b]) = 1$, wenn b eine obere Schranke von A und $[a,b] \cap A \neq \emptyset$ ist. Sei $m = \frac{b+a}{2}$

1. Fall m ist obere Schranke von A. Dann ist aber $[a,m] \cap A \neq \emptyset$. Also ist $B([a,m]) = 1$.

2. Fall: m ist keine obere Schranke von A. Dann gibt es ein $c \in A \cap [m,b]$ und daher ist $B([m,b]) = 1$.

Wir haben daher ein Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ bei der $I_n \cap A \neq \emptyset$ und b_n jeweils obere Schranke von A ist. Sei $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Beh c ist kleinste obere Schranke von A.
c ist obere Schranke von A: Denn angenommen $c < a$ für ein $a \in A$. Sei $\varepsilon := a - c$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n < \varepsilon = a - c$. Wir haben die folgende Situation:

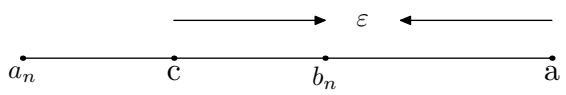


Abb. 7.1:

Es ist $a_n \leq c \leq b_n$. Daher ist $b_n - c < \varepsilon = a - c$. Also ist $b_n < c < a$. Das geht nicht, da b_n obere Schranke war.
c ist kleinste obere Schranke von A.
Denn angenommen es gäbe eine kleinere Schranke $s < c$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $a_n < c < b_n$. Daher ist $c - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist $c - \frac{\varepsilon}{2} < a_n$. Daher ist $s < a_n$. Aber das Intervall $[a_n, b_n]$ enthält ein Element aus A. Dies ist ein Widerspruch.
Die Beweisschritte 2. $\Longrightarrow$3. $\Longrightarrow$4. $\Longrightarrow$5. $\Longrightarrow$6. $\Longleftrightarrow$ 7. stehen in jedem Analysisbuch.
7. $\Longrightarrow$8. Der Begriff des Häufungspunktes ist in dem Buch von Bronstein Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Seite 295 erklärt. Sei A eine beschränkte unendliche Menge. Dann gibt es eine untere Schranke a_{un} und eine obere Schranke b_{ob}. Sei $a_0 := a_{un}$ und $b_0 := b_{ob}$. Wir nehmen an, dass a_n und b_n schon bestimmt sind. Sei $c_n := (a_n + b_n)/2$ das arithmetische Mittel.

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n & \text{falls } [a_n, c_n] \text{ unendlich viele Elemente hat} \\ c_n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_{n+1} := \begin{cases} c_n & \text{falls } [a_n, c_n] \text{ unendlich viele Elemente hat} \\ b_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jedes Intervall $[a_n, c_n]$ enthält nun unendlich viele Elemente. Außerdem ist die Folge (a_n) monoton wachsend und die Folge (b_n) monoton fallend. Es gibt einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dieser Grenzwert ist Häufungspunkt von a.
8. $\Longrightarrow$1. Sei (a_n) eine Fundamentalfolge. Dann ist (a_n) beschränkt, weil jede Fundamentalfolge beschränkt ist.
1. Fall: (a_n) besitzt nur endlich viele Elemente. Dann sind ab einem gewissen n alle Folgenglieder gleich. Dann ist (a_n) sicher konvergent.
(a_n) besitzt unendlich viele Elemente (a_n) besitzt dann einen Häufungspunkt und damit eine konvergente Teilfolge. Dann ist aber (a_n) konvergent. □

Definition 103. Erfüllt ein Körper die Eigenschaften des Satzes, so heißt er vollständig.

Alle archimedisch angeordneten vollständigen Körper sind isomorph. Es genügt also sich auf $\mathbb{R}$ zu beschränken.

Definition 104. $U \subset \mathbb{R}$ heißt offen genau dann, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $\{y \| y - x| < r\} = K(x, r) \subset U$ gilt.

15. März 2017

Satz 7.33. *Es gilt:*

1. *Die beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.*
2. *Der endliche Durchschnitt offener Mengen ist offen.*

Die offenen Mengen bilden eine Topologie.

Definition 105. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung der Menge eine endliche Überdeckung enthält. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

Satz 7.34. *Es gilt:*

1. *Der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
2. *Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Satz 7.35 (Heine- Borel). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\mathbb{R}$ *ist vollständig.*
2. *Für alle* $a < b$ *ist* $[a, b]$ *kompakt.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $(U_i | i \in I)$ eine offene Überdeckung des Intervalls $[a, b]$. Dann gibt es eine offene Menge U_1 mit $a \in U_1$. Sei
$B = \{t | a \leq t, \wedge [a, t] \text{ist in einer endlichen Teilüberdeckung}\}$ enthalten. B ist nach oben beschränkt durch b und nicht leer, da $a \in B$. Also gibt es eine kleinste obere Schranke s. Sei etwa $s \in U_k$. Da U_k eine offene Menge ist, enthält U_{n-1} ein $x < s$. Das Intervall $[a, x]$ ist in einer endlichen Überdeckung enthalten. Ewa sei $[a, x] \subset U_1 \cup U_2 \cdots \cup U_n$. Dann ist $[a, s] \subset U_1 \cup U_2 \cdots \cup U_n \cup U_k$. Angenommen $s < b$ Dann enthält die Menge U_k auch ein y mit $s < y < b$. Das Intervall $[a, y]$ ist von einer endlichen Teilüberdeckung überdeckt. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von s. Also ist $s = b$.
2. $\Longrightarrow$1.
Es wird gezeigt, dass jede unendliche beschränkte Menge einen Häufungspunkt hat.
Sei A eine unendliche beschränkte Menge. a_u eine untere und a_o eine obere Schranke. Man erhält eine Intervallfolge $[a_n, b_n] = I_n$ wie in dem Beweis zum Satz über die Vollständigkeit. Wäre $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_n = \emptyset$, dann wäre $C(\bigcap\limits_{I=1}^{\infty} I_n) = [a, b]$.

Also wäre $\bigcup_{i=1}^{\infty} C(I_n) = [a,b]$ eine offene Überdeckung von $[a,b]$, die eine endliche enthält. Etwa $\bigcup_{k=1}^{n} C(I_k)$. Das heißt hinwiederum: $\bigcap_{k=1}^{n} I_k = \emptyset$. Das geht aber nicht, da $[a_n, b_n] \subset I_n$. Also enthält $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$ ein Element a. Diese Element ist ein Häufungspunkt. □

Beispiele konvergenter Folgen.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

   Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \cdot |a| < m$. Also ist $\frac{|a|}{m} < \frac{1}{2}$. Sei nun $n > m$. Wir erhalten:

$$\frac{|a^n|}{n!} = \frac{|a^m|}{m!} \cdot \frac{|a|}{m+1} \cdot \frac{|a|}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{n} \tag{7.4}$$

$$\leq \frac{|a|^m}{m!} \cdot \left(\frac{|a|}{m}\right)^{n-m} \tag{7.5}$$

   Der letzte Faktor ist eine Nullfolge. Daher ist $\frac{a^n}{n!}$ eine Nullfolge.

2. $(a_n) := (1+\frac{1}{n})^n$ ist eine monoton wachsende und also konvergente Folge. Der Limes dieser Folge ist die eulersche Zahl e. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   Beh: Es ist $(1+\frac{1}{n})^n - (1+\frac{1}{n-1}) \geq 0$ für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} &= [(\frac{n+1}{n})^n - (\frac{n}{n-1})^{n-1}] \cdot (\frac{n-1}{n})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n \\
&= \left[(\frac{n^2-1}{n^2})^n - (\frac{n-1}{n})\right] \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\
&= \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n - 1 + \frac{1}{n}\right] \cdot K^n \\
&\geq \left[1 - n \cdot \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n}\right] \cdot K^n = 0
\end{aligned}$$

   Da $-1 < -\frac{1}{n^2}$ lässt sich die Bernouillsche Ungleichung anwenden. Daher gilt die letzte Ungleichung.

   Zu zeigen bleibt, dass die Folge beschränkt nach oben ist. Für $n > 2$ hat man:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{i} \cdot \frac{1}{n^i} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1)}{i! n^i} \\ &\leq \frac{1}{2^{i-1}}\end{aligned}$$

Also erhält man mit der geometrischen Summenformel:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 1+1+\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \leq 1+1+2 \cdot \left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1 \\ &= 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

3. Jede reelle Zahl ist Grenzwert von rationalen Zahlen.

7.1.9 Konstruktion der reellen Zahlen

7.1.10 Der natürliche Logarithmus

Als Beispiel konvergenter Folgen betrachten wir Folgen, deren Grenzwert wichtige Funktionen definieren.

Definition 106. Ist $x > 0$ so definieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned}x_0 : &= x \text{ und } x_{n+1} := \sqrt{x_n} \\ a_n : &= 2^n(x_n - 1) \text{ und } b_n := 2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)\end{aligned}$$

Satz 7.36. *Es gilt für $1 \neq x > 0x$:*

1. *(x_n) konvergiert und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.*
2. *(a_n) ist monoton fallend.*
3. *(b_n) ist monoton wachsend und für alle n ist $b_n < a_n$.*
4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \cdot b_n = a_n$.*
5. *(a_n) und (b_n) haben den gleichen Grenzwert.*

Zu 1. Sei zunächst $x > 1$. Daher ist $x^2 > x > 1$ und also $x > \sqrt{x}$. Die Folge (x_n) fällt somit monoton. Da 1 die Folge nach unten beschränkt konvergiert sie. Der Grenzwert a erfüllt die Gleichung $a = \sqrt{a}$. Es ist also $a = 1$. Ganz ähnlich

folgt die Behauptung, wenn $0 < x < 1$ ist. Dann ist die Folge (x_n) monoton wachsend.
Zu 2. Ich setze zunächst $x > 1$ voraus. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $(x_n - 1) = \sqrt{x_n}^2 - 1 = (x_{n+1} + 1)(x_{n+1} - 1) > 2 \cdot (x_{n+1} - 1)$. Also ist $a_n = 2^n(x_n - 1 >) > 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) = a_{n+1}$.
Ist nun $0 < x < 1$, so ist wieder $(x_n - 1) = \sqrt{x_n}^2 - 1 = (x_{n+1} + 1)(x_{n+1} - 1) > 2 \cdot (x_{n+1} - 1)$. Die letze Ungleichung gilt, da $(x_{n+1} + 1) < 2$ und $(x_{n+1} - 1) < 0$ ist.
Zu 3. Es ist $b_n = 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = 2^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}^2}\right) = 2^n \left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right) < 2^n \left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) \cdot 2 = 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = b_{n+1}$.
Zu 4. $x_n \cdot 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = 2^n (x_n - 1) = a_n$.
Zu 5. Da (a_n) nach unten beschränkt und monoton fallend ist, ist (a_n) konvergent. (b_n) ist monoton wachsend und nach oben beshränkt. Also ist (b_n) kopnvergent. Es folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
Die entsprechenden Tatsachen zeigt man ganz ähnlich für $0 < x = 1$. □

Definition 107. Ist $x > 0$ so heißt $ln(x) := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ natürlicher Logarithmus von x.

Satz 7.37. *1.* $\ln(1) = 0$.

2. Für $x \neq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x} &< \ln(x) < x - 1 \\ 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) &< \ln(x) < 2 \cdot (\sqrt{x} - 1) \end{aligned} \tag{7.6}$$

1. Ist klar.
Zu 2. Ergibt sich auch direkt. Denn es ist $b_1 < \ln(x) < a_1$ □

Satz 7.38 (Funktionalgleichung). *Für alle positiven x, y gilt:* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

Sei $z_n = x_n \cdot y_n$. Man hat: $2^n \cdot (x_n \cdot y_n - 1) = 2^n(x_n(y_n - 1) + (x_n - 1)) = 2^n(x_n(y_n - 1)) + 2^n(x_n - 1)$. Berechnet man den Limes, so erhält man: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n 2^n(y_n) - 1 + \lim\limits_{n\to\infty} 2^n(x_n - 1) = 1 \cdot \ln(y) + \ln(x)$. Dies war zu zeigen. □

Folgerung 7.39. *1. Für positive x, y gilt:* $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

2. Für positive x und rationale Zahlen r gilt: $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$.

Aufgaben:

97. Sei $x_0 = x > 0$ und $x_{n+1} := \sqrt[3]{x_n}$. $a_n := 3^n(x_n - 1)$ und $b_n = 3^n(1 - \frac{1}{x_n})$. Zeige:
    a) Die Folge (x_n) konvergiert und hat den Grenzwert 1.
    b) (a_n) fällt monoton und (b_n) steigt monoton. Für alle n ist $x_n \cdot b_n = a_n$
    c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln(x)$?

7.1.11 Arcustangens

Satz des Ptolemäus Wir gehen aus von einem Sehnenviereck. In ihm wird der Winkel $\angle DCA$ an CB mit Scheitel C angetragen. Über der Sehne $[CA]$ sind die Winkel $\angle CAB$ und $\angle CDB$ Umfangswinkel. Also ist $\angle CAB = \angle CDB$. Außerdem ist $\angle CED = \angle CBE + \angle BCE$, da der Außenwinkel gleich der Summe der nicht anliegenden Innnenwinkel ist. Wendet man den Umfangswinkelsatz auf die Sehne $[DA]$ an, so ergibt sich $\angle DCA = \angle DBA$. Daher ist $\angle CED = \angle CBA$. Dies Dreiecke $\triangle CEA \sim \triangle CBA$ sind daher ähnlich.

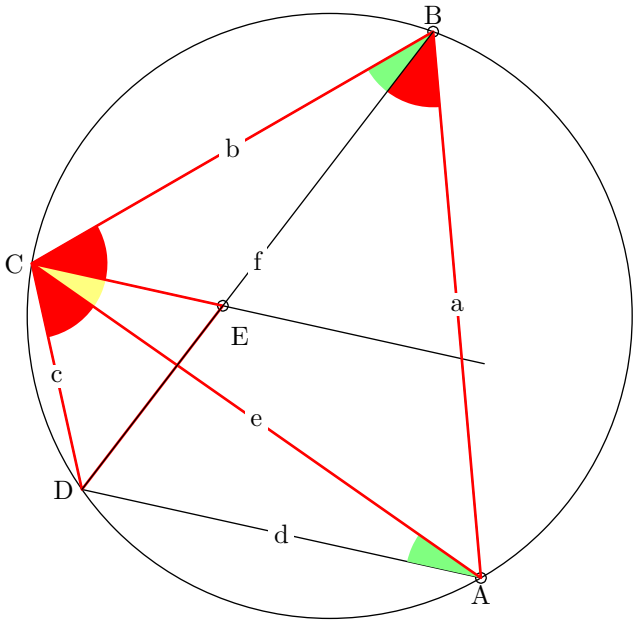


Abb. 7.2: Sehnenviereck

Es folgt:

$$\frac{e}{a} = \frac{c}{\overline{DE}} \Rightarrow c \cdot a = e \cdot \overline{DE}$$

Außerdem ist $\triangle ACD \sim \triangle BCE$. Damit folgt

$$\frac{e}{d} = \frac{b}{\overline{EB}} \Rightarrow b \cdot d = e \cdot \overline{EB}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man:

$$ac + bd = ef$$

Satz 7.40 (Ptolemäus). *In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten. Mit den Bezeichnungen der Zeichnung 7.2*

$$\frac{e}{d} = \frac{b}{\overline{EB}} \Rightarrow b \cdot d = e \cdot \overline{EB}$$

Der Beweis steht oben. Dieser Satz ist eine starke Verallgemeinerung mehrerer bekannter Sätze:

Folgerung 7.41. *In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c ist $a^2 + b^2 = c^2$*

Dies überlegt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass jedes Rechteck ein Sehnenviereck ist.
In einem Kreis mit Radius r ist eine Sehne $[AB]$ der Länge $\overline{AB} = a$ gegeben. An diese hängt man (im Uhrzeigersinn) eine weiter Sehne der Länge b. Der Endpunkt dieser Sehne sei C.

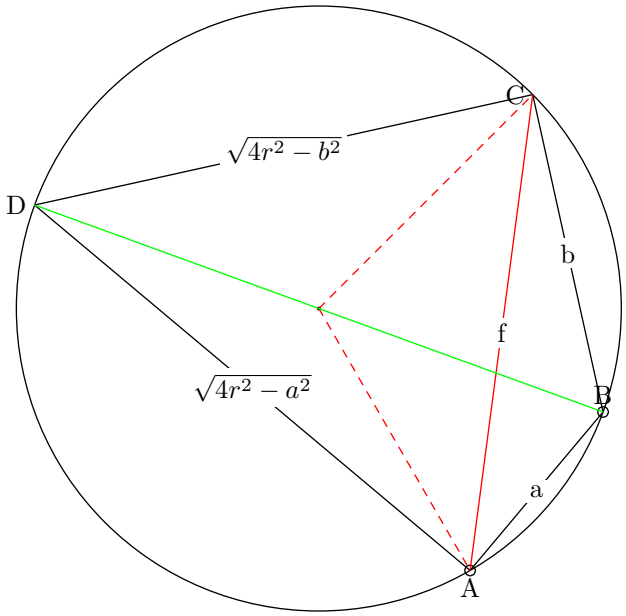


Abb. 7.3: Sehnenaddition

Der Satz des Ptolemäus ermöglicht es die Länge der Sehne $\overline{AC} = f$ zu berechnen. Sei D der Schnittpunkt der Geraden BM mit dem Kreis um M vom Radius r. Nach dem Satz des Thales ist $\triangle DBC$ rechtwinklig bei C und $\triangle DBA$ rechtwinklig bei A. Es folgt:

$$\overline{CD} = \sqrt{4r^2 - b^2}, \quad \overline{DA} = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Nach dem Satz des Ptolemäus ist:

$$\overline{BD} \cdot f = a \cdot \sqrt{4r^2 - b^2} + b \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - a^2}$$

Da $\overline{BD} = 2r$ is, folgt

$$f = \frac{1}{2r} \cdot (a \cdot \sqrt{4r^2 - b^2} + b \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} \tag{7.7}$$

$$\frac{f}{2} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \cdot b\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \tag{7.8}$$

Wenn wir uns an dieser Stelle erinnern, wie der Sinus in der Schule eingeführt wurde, so besagt Gleichung 7.8 das Additionstheorem für die Sinus Funktion.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Dabei ist α die Länge des Bogenstückes, das zur Sehne a gehört. Entsprechend ist β die Länge des Bogenstückes, das zur Sehne b gehört. Die Formulierung in der Gleichung 7.8 hat den Vorteil, dass nicht von der Länge eines Bogenstückes geredet wird, die noch gar nicht definiert ist.
Wir wollen den Satz des Ptolemäus auf eine Reihe spezieller Situationen anwenden.
Beispiele:

52. $a = b = x$: Wir erhalten im Falle $r = 1$:

$$\begin{aligned} f &= 0.5(x \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \sqrt{4-x^2}) \\ &= x \cdot \sqrt{4-x^2} \end{aligned} \tag{7.9}$$

    Betrachten wir den Fall $x = \sqrt{2}$, so ergibt sich $f = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = 2$. Dies entspricht genau der geometrischen Überlegung. (Zeichnung fehlt)

53. In einem gleichseitigen Dreieck mit dem Umkreisradius 1 ist die Seitenlänge $\sqrt{3}$. Setzen wir die in die Formel 7.9 ein, so erhalten wir $f = \sqrt{3}\sqrt{4-3} = \sqrt{3}$. Auch dies hätten wir nach Betrachtung einer entsprechenden Zeichnung sofort sagen können

54. Untersuchen wir den Fall $x = 1$. Dies ergibt ein regelmäßiges Sechseck mit dem Umkreisradius 1. Dann ist $f = 1 \cdot \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Definition des Arcustangens Betrachten wir die folgende Zeichnung. Der Kreis ist der Einheitskreis.

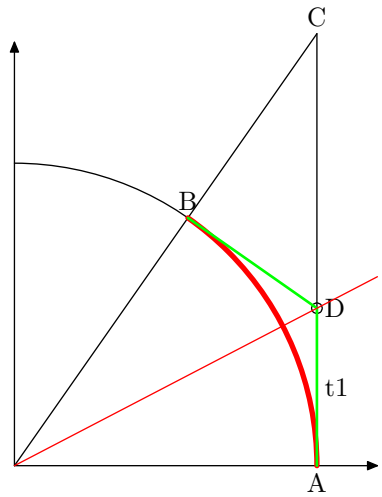


Abb. 7.4: Kreisbogen

Unser Ziel ist es die Länge des Bogenstückes in Abhängigkeit von t, von s und von c auszurechnen. s und c lassen sich als Funktioenn von t ausdrücken. So ist nach dem Strahlensatz und dem Pythagoras:

$$s(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad c(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \tag{7.10}$$

Es folgt unter anderem: $c(t) \cdot t = s(t)$ oder $t = \frac{s(t)}{c(t)}$.
Setzt man den Winkelbegriff voraus, so ist dies klar. Denn es ist ja $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Aber wir wollen den Winkel ja erst messen. Unser erstes Ziel ist eine Funktion zu finden, die den Winkel in Abhängigkeit von t misst. Die Anschauung sagt uns, dass dies nur für Kreisbögen geht, die kleiner als ein Viertelkreis sind. Um diese Maßfunktion zu finden benutzen wir den Gedanken von Archimedes Er nutzt die Symmetrie des Kreises aus. Als erste Näherung wählen wir t selber. So wie Archimedes bei seiner Berechnung des Kreisumfanges zeichnen wir die Winkelhalbierende und erhalten das rechte Bild der Figur 7.4. Es ist $\triangle MAC \sim \triangle BCD$ Daher folgt:

$$\frac{t-t_1}{t_1} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1} \qquad t_1 = \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}} \tag{7.11}$$

Die Vermutung liegt nahe, dass $2 \cdot t_1$ eine bessere Näherung ist. Dies wiederholen wir. Wir erklären induktiv:

$$t(0) := t \qquad t(n+1) := \frac{t(n)}{1+\sqrt{1+t(n)^2}} \tag{7.12}$$

$$a(n) := 2^n t(n) \tag{7.13}$$

Satz 7.42. *Die Folge $(t(n)|n \in \mathbb{N})$ ist monoton fallend. Ihr Grenzwert ist 0. $(a(n)|n \in \mathbb{N})$ ist für positives t auch monoton fallend. Sie ist in jedem Fall konvergent.*

Zu 1.: Es ist für $t > 0$ auf jeden Fall $0 < t(n+1) < \frac{t(n)}{2}$. Daher ist $t(n) < \frac{t}{2^n}$. Damit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} t(n) = 0$.
Zu 2.: Es ist nur zu zeigen: $2 \cdot t(1) < t$.

$$\frac{2t}{1+\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{2t}{1+\sqrt{1}} = t.$$

Daher folgt die Behauptung.
Es bleibt nur noch zu überlegen, wie die Folge aussieht, wenn $t < 0$ ist Dann ist $(t(n)|n \in \mathbb{N})$ und $(a(n)|n \in \mathbb{N})$ monoton wachsend. Also konvergiert $(a(n)|n \in \mathbb{N})$ auch in diesem Fall. □

Definition 14 Sei $t \in \mathbb{R}$ Wir erklären $\arctan(t) := \lim\limits_{n\to\infty} a(n)$. Dabei ist $a(n)$ wie oben in Abhängigkeit von t definiert. □

Wem bisher die Geometrie zu wenig fundiert erscheint, und daher seinen Fuß nur auf sicheres Gelände setzten will, kann die geometrischen Überlegungen vergessen und $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als völlig abstrakte Funktion betrachten, die durch obigen Grenzprozess definiert wird.
Unser nächstes Ziel, ist etwas über die arctan Funktion zu erfahren. Da ist zunächst das Additionstheorem. Zu welchem Tangentenstück gehört der Bogen, gebildet aus dem Aneinanderhängen von zwei Bögen?
Um dies formulieren zu können ist zunächst wieder die Geometrie hilfreich. Wir betrachten den Einheitskreis und hängen zwei Bogenstücke, die zu den Tangentenstücken x, y gehören aneinander.

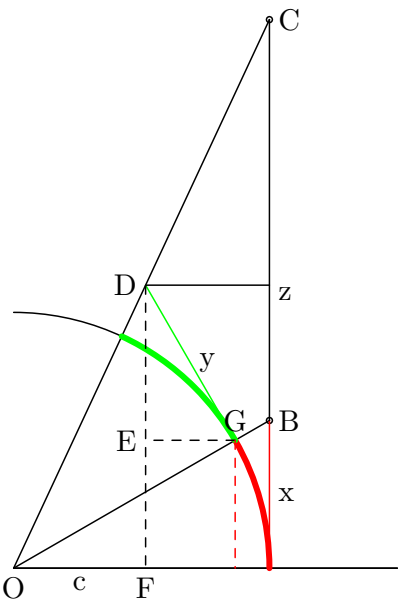


Abb. 7.5: Additionstheorem

Es ist $\overline{DF} = \overline{FE} + \overline{ED}$. Man entnimmt der Zeichnung: $\overline{DE}/c = z/1$. Weiter ist $c^2 = 1 + y^2 - \overline{FD}^2$. Nun ist:

$$\overline{FE} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ und}$$
$$\frac{\overline{DE}}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\overline{DE} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$$

Wir erhalten: $\overline{FD}^2 = \dfrac{(x+y)^2}{1+x^2}$. Damit folgt: $c^2 = \dfrac{(1-xy)^2}{1+x^2}$. Damit erhalten wir für $xy < 1$: $c = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}}$ und damit:

$$z = \frac{\overline{FD}}{c} = \frac{x+y}{1-xy}$$

Entspricht also die durch den Grenzprozess definierte Funktion arctan unseren geometrischen Vorstellungen, so muss sie für $xy < 1$ die sogenannte Funktionalgleichung $\arctan(x) + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ erfüllen. Um dies zu zeigen betrachten wir zunächst die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$. Dem Graph der Funktion entnimmt man die Vermutung: $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ist bijektiv. Man überlegt sich leicht, dass $-1 < f(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Dies ist auch geometrisch klar. Es gilt genauer:

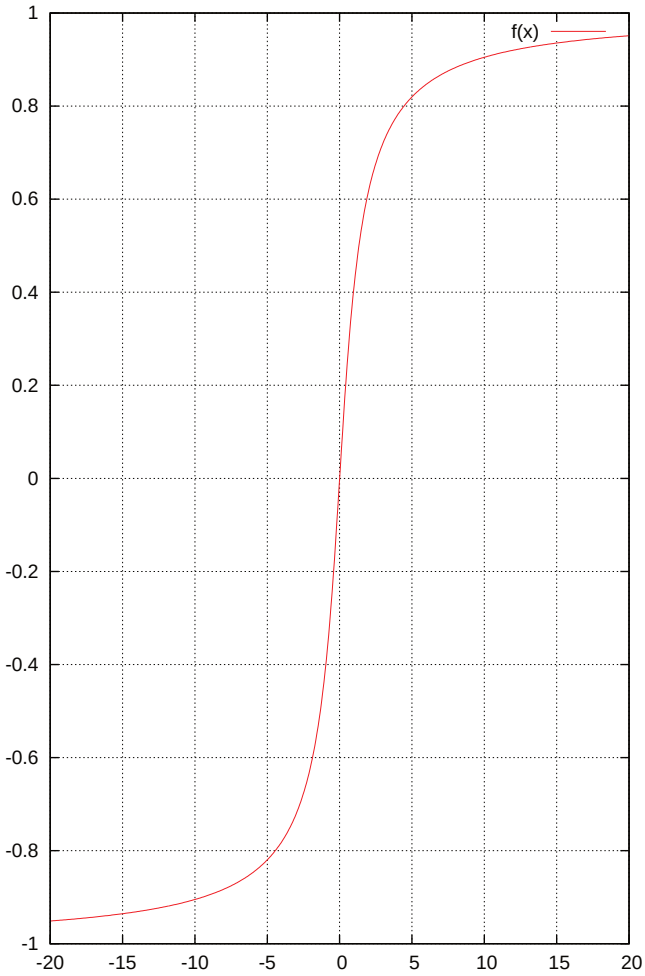


Abb. 7.6: f(x)

Satz 7.43. *Für die Funktion* $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1. f *ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist* $g :]-1, 1[\ni y \mapsto \frac{2y}{1-y^2} \in \mathbb{R}$.
2. *Es gilt für* $x \cdot y < 1$*:*

$$f\left(\frac{x+y}{1-x\cdot y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$$

Zu 1.: Dies rechnet man nach.

Zu 2.: Für $x = 0$ oder $y = 0$ folgt die Behauptung sofort. Sei also jetzt x und y nicht 0. Da die weitere Überlegung eine ziemlich ekelhafte Rechnerei ist geschieht es in mehreren Schritten:

1. Es ist für $x \cdot y \neq 1$:
$$1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2 = \frac{(x^2+1)(y^2+1)}{(1-xy)^2}$$
Dies rechnet man folgendermaßen nach:
$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2 &= \frac{(1-xy)^2 + (x+y)^2}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1 - 2xy + x^2y^2 + x^2 + 2xy + y^2}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1 + y^2 + x^2(1+y^2)}{(1-xy)^2} = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-xy)^2}. \end{aligned}$$

2. Wegen der vorigen Aussage ist daher für $xy < 1$:
$$\sqrt{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}}{(1-xy)}$$
für $xy < 1$

3. Es ist
$$f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{x+y}{1-xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$$
Denn für $x \cdot y < 1$ gilt
$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) &= \frac{\frac{x+y}{1-xy}}{1 + \frac{1}{1-xy}\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \\ &= \frac{x+y}{1-xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \end{aligned}$$

4. Es gibt $a, b \in]-1, 1[$ mit $x = g(a)$ und $y = g(b)$ Es ist dann
$$\sqrt{1 + g(a)^2} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

5. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{1-x\cdot y}\right) &= \frac{g(a)+g(b)}{1-g(a)g(b)+\sqrt{(1+g(a)^2)(1+g(b)^2)}} \\
&= \frac{\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}}{1-\frac{2a}{1-a^2}\frac{2b}{1-b^2}+\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)}} \\
&= \frac{2(a+b)-2ab^2-2ba^2}{(1-a^2)(1-b^2)-4ab+(1+a^2)(1+b^2)} \\
&= \frac{(a+b)2(1-ab)}{2-4ab+2a^2b^2} \\
&= \frac{(a+b)2(1-ab)}{2(1-2ab+a^2b^2)} \\
&= \frac{(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2} = \frac{a+b}{1-ab} = \frac{f(x)+f(y)}{1-xy}
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

Hieraus ergibt sich nun das Additionstheorem

Satz 7.44. *Für beliebige reelle Zahlen x, y, welche $x \cdot y < 1$ erfüllen gilt:*

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\cdot y}\right)$$

Wir betrachten zwei $x, y \in \mathbb{R}$, welche die Bedingung erfüllen. Weiterhin ist f die oben definierte Funktion. Dann hat man $f(x)\cdot f(y) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} \leq x\cdot y < 1$. Es sei $z = \frac{x+y}{1-x\cdot y}$. Dann ist $f(z) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. Definieren wir rekursiv die Folgen: $x_{n+1} = f(x_n)$ und $y_{n+1} = f(y_n)$, so ist $z_{n+1} = f(z_n)$, dann ist

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{f(x_n)+f(y_n)}{1-f(x_n)f(y_n)} = \frac{x_{n+1}+y_{n+1}}{1-x_{n+1}y_{n+1}}.$$

Es ergibt sich:

$$2^n z_n = \frac{2^n x_n + 2^n y_n}{1-x_n y_n}.$$

Der Grenzwert des Nenners der rechten Seite ist 1. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Daher ist $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y)$. □

Sei $s_n = s(t_n)$ die $n$te Halbsehne und $b_n = 2^n s_n$ die $n$te innere Näherung an die Länge des zu t gehörenden Bogenstückes. c_n ist der Abstand des Mittelpunkt des Kreises von der Sehne s_n. Es ist $s_n := \sqrt{1 - c_n^2}$. Wir möchten c_{n+1} direkt durch c_n ausdrücken. Dazu betrachten wir die Zeichnung.

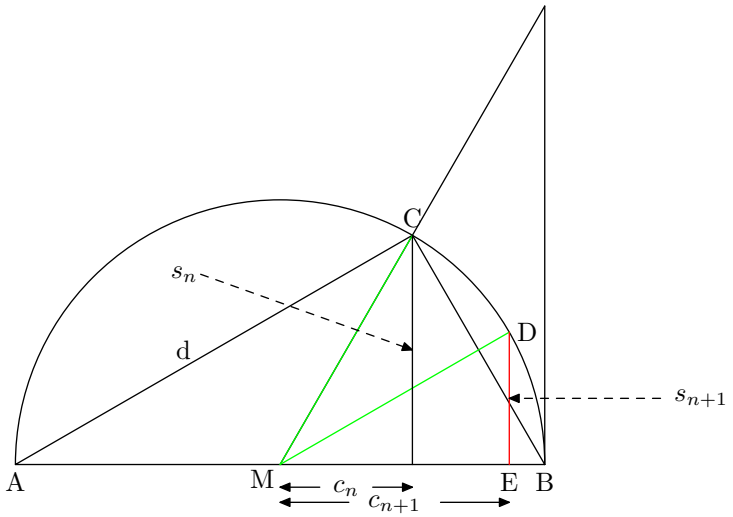


Abb. 7.7: Arcus

Nach dem Kathetensatz des Euklid ist $d^2 = (1 + c_n) \cdot 2$. Außerdem ist das Dreieck $\triangle ABC$ ähnlich dem $\triangle MDE$. Wir erhalten: $\frac{1+c_n}{d} = \frac{c_{n+1}}{1}$. Daher ist $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$.
Unsere Überlegung bezieht sich auf die Ähnlichkeitslehre und damit auf Winkel. Wir machen daher den Beweis der letzten Gleichung unabhängig von jedem Winkelbegriff, den wir noch gar nicht voraussetzen dürfen.

Bemerkung 20 Sei (t_n) die oben definierte Folge und $c(t_n) := \frac{1}{1+\sqrt{1+t_n^2}}$, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + c_n}{2}}$. □

Zur Vereinfachung der Schreibweise schreibe ich t' für t_{n+1}, t für t_n und c für $c(t)$. Da $c(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ist, ergibt sicht $t^2 = \frac{1-c^2}{c^2}$ und $\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{c}$. Wir

erhalten:

$$\begin{aligned} c(t') &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{(1+\sqrt{1+t^2})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1-c^2}{c^2(1+\frac{1}{c})^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{c+1+1-c}{c+1}}} = \sqrt{\frac{c+1}{2}} \end{aligned}$$

Wir erhalten nun:

Bemerkung 21 1. (c_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Der Grenzwert ist 1.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2 \cdot s_{n+1} \geq s_n$.

3. $t_n \cdot c_n = s_n$.

4. $(2^n \cdot s_n)$ ist monoton wachsend und hat den selben Grenzwert, wie die monoton fallende Folge $(2^n \cdot t_n)$. □

Zu 1.: Dies ist klar.
Zu 2.: $2 \cdot s_{n+1} = 2 \cdot \sqrt{1-c_{n+1}^2} \geq s_n = \sqrt{1-c_n^2} \iff 4 \cdot (1-c_{n+1}^2) \geq 1-c_n^2 \iff 4(1-\dfrac{c_n+1}{2}) \geq 1-c_n^2 \iff 4-2c_n-2 \geq 1-c_n^2 \iff c_n^2-2c_n+1 \geq 0$. Die letzte Ungleichung ist sicher richtig.
Zu 3.: Dies gilt da $\frac{t_n}{1} = \frac{s_n}{c_n}$.
Zu 4.: Wegen 2. gilt $2^{n+1}s_{n+1} > 2^n s_n$. Also ist die Folge b_n monoton wachsend. Sie ist beschränkt. Da $s_n = c_n \cdot t_n$ und $c_n < 1$ ist gilt $s_n < t_n$. Wir erhalten $2^n s_n < 2^n t_n$. Also konvergiert die Folge $2^n s_n$. Es gilt $2^n c_n s_n = 2^n t_n$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \lim\limits_{n\to\infty} 2^n s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n t_n = \arctan(t)$. Dies war behauptet. □

Satz 7.45. *Ist $x > 0$, so ist:*

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2} \cdot (1+\sqrt{1+x^2})} < \arctan(x) < \frac{2x}{1+\sqrt{1+x^2}} \tag{7.14}$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung steht $a_1(x)$. Betrachten wir die linke Seite. Es ist $b_1(x) = \frac{2x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} > \frac{2x_1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+\sqrt{1+x^2})}$. Also ergibt sich die Behauptung. □

7.1.12 Reihen

Definition 108. Sei (a_n) eine Folge. $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_n$ heißt $n$te Partialsumme der Folge. Die Folge der $n$ten Partialsummen (s_n) heißt zur Folge gehörige Reihe. Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. Der Grenzwert wird mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Satz 7.46. *Sei (a_n) eine Folge.*

1. *Konvergiert die zugehörige Reihe, dann ist (a_n) eine Nullfolge.*
2. *Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq m > k \in \mathbb{N}$ gilt: $|\sum\limits_{i=m}^{n} a_i| < \varepsilon$.*
3. *Sei k eine natürliche Zahl. Dann sind äquivalent:*
   a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert.*
   b) $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergiert.*
4. *Die geometrische Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a^i$ konvergiert für $|a| < 1$.*
5. *Die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{i}$ divergiert.*

Satz 7.47. *Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen und $c \in \mathbb{R}$ Dann gilt:*

1. *$\sum(a_n + b_n)$ konvergiert und es ist: $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i + \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$.*
2. *$\sum c \cdot a_i$ konvergiert und es ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$.*

Satz 7.48. *Die vorkommenden Reihen seien Reihen positiver Zahlen.*

1. *$\sum a_n$ und $\sum b_n$ seien Reihen positiver Zahlen. $\sum b_n$ konvergiere und es gebe eine Zahl $c > 0$, so dass $0 \leq a_n \leq c \cdot b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann konvergiert $\sum a_n$ (Majorantenkriterium)*
2. *Sei $\sum a_n$ eine Reihe nicht negativer Zahlen. $c \in]0, 1[$, so dass $a_{n+2} \leq c \cdot a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum a_n$ (Quotientenkriterium).*

3. *Sei $\sum a_n$ eine Reihe und es gebe ein $c \in]0,1[$ mit $\sqrt[n]{a_n} < c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ (Wurzelkriterium).*

Satz 7.49. *(Nicht absolute Konvergenz) $\sum a_n$ sei eine Reihe reeller Zahlen mit $\lim a_n = 0$ bei der die Summanden abwechselnd positiv und negativ sind und außerdem sei $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe und es ist $|\sum a_n| \leq |a_1|$.*

Die konvergenten Reihen bilden mit der gliedweisen Multiplikation keinen Ring. Man betrachte die nach dem Kriterium von Leibniz konvergente Reihe $1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Nun ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$ nicht konvergent. Es ist die harmonische Reihe.
Die absolout konvergenten Reihen bilden aber einen kommutativen Ring und zwar bei der gliedweisen Multiplikation und bei der sogenannten Cauchy Multiplikation:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)$$

7.1.13 Potenzreihen

Definition 109. Sei (a_n) eine Folge und $x \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum a_i x^i$ heißt Potenzreihe.

Satz 7.50. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Konvergiert die Reihe $\sum a_i x^i$, dann konvergiert $\sum a_i y^i$ für alle $|y| < |x|$ absolut.*

Konvergier $\sum a_i x^i$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m > k$ gilt: $|\sum_{i=m}^{n} a_i x^i| < \varepsilon$ Insbesondere ist daher $(a_n x^n)$ eine Nullfolge und als solche beschränkt. Es gibt ein $r \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $|a_n x^n| < r$ gilt. Wir erhalten für $|y| < |x|$: $|a_n y^n| = |a_n| \cdot |y|^n = |a_n| \cdot \frac{|y|^n}{|x|^n} \cdot |x|^n < r \cdot (\frac{|y|}{|x|})^n$. Sei $q = \frac{|y|}{|x|} < 1$. Dann folgt: $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot |y|^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} r \cdot q^i$. Mit dem Majorantenkriterium ergibt sich, dass $\sum a_i y^i$ absolut konvergent ist.

Satz 7.51 (Konvergenzradius). *Entweder konvergiert die Potenzreihe* $\sum a_i x^i$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *oder es gibt eine reelle Zahl* $r \geq 0$*, so dass gilt:* $\sum a_i x^i$ *konvergiert für alle* $|x| < r$ *und* $\sum a_i x^i$ *divergiert für alle* $|x| > r$*. (Man beachte: Für* $|x| = r$ *ist nichts ausgesagt.)*

Sei $\sum a_i x^i$ nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent. Dann gibt es ein x_0, so dass $\sum a_i x_0^i$ nicht absolut konvergent ist. Ist $|y| > |x_0|$ so ist wegen dem Satz 7.50 $\sum a_i y^i$ divergent. Sei $M = \{|x| | x \in \mathbb{R}$ und $\sum a_i x^i$ ist divergent $\}$ Es ist $M \neq \emptyset$ und nach unten beschränkt. $r = \inf M$ existiert und $0 \leq r$. Sie $|x| < r$. Nach Definition von r gibt es ein $|x| < |y| < r$, so dass $\sum a_i y^i$ konvergiert. Wegen Satz 7.50 konvergiert die Reihe dann für x absolut. □

Definition 110. Ist die Reihe $\sum a_i x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, so sagt man, dass der Konvergenzradius der Reihe ∞ ist. Andernfalls ist der Konvergenzradius das r aus dem Satz 7.51

Beispiele:

1. Die Potenzreihe $\sum x^i$ hat den Konvergenzradius 1.

2. Die Reihe $\sum \frac{x^i}{i!}$ hat den Konvergenzradius ∞.

Definition 111. Sei (x_n) eine Folge.

$$\overline{\lim_i} x_i = \begin{cases} \infty & \text{falls } (x_i) \text{ nach oben unbeschränkt} \\ \lim\limits_n \sup\{x_n, x_{n+1} \dots\} & \text{falls } (x_i) \text{ beschränkt und } \lim\limits_n \sup \dots \text{ existiert} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

7.2 Funktionen und Grenzwerte

7.2.1 Grenzwerte von Funktionen

S sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ein $a \in S$ heißt *Berührpunkt* von S genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in S$ gibt, so dass $|x - a| < \varepsilon$ ist. Äquivalent dazu ist: Es gibt eine Folge von Elementen aus S, deren Grenzwert a ist.
Ist eine Menge beschränkt, so ist die kleinste obere und die kleinste untere Schranke Berührpunkt der Menge.

Satz 7.52. *Sei* A *eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *und* a *ein Berührpunkt von* A*. Dann sind für* $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt ein $b \in \mathbb{R}$, so dass für jede Folge $(a_n) \subset A$, welche gegen a konvergiert, die Folge $f(a_n)$ gegen b konvergiert.*

2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$, welches nicht die verlangte Eigenschaft hat. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U_n = \{x||x - a| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x) - b| \geq \epsilon\} \neq \emptyset$$

Wir können daher aus jedem U_n ein a_n herauswählen. Die Folge (a_n) konvergiert gegen a. Aber für alle n ist $|f(a_n) - b| \geq \epsilon$. $f(a_n)$ konvergiert daher nicht gegen b. Dies widerspricht der Voraussetzung. Wir haben beim Beweis dieser Richtung das Auswahlaxiom verwendet.
2. $\Rightarrow$ 1. Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - b| < \varepsilon$ gilt. Zu dem δ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $|a_n - a| < \delta$. Daher ist für alle $n \geq k$ auch $|f(a_n) - b| < \varepsilon$. □

Definition 112. A sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und a ein Berührpunkt von A. Wir sagen der Grenzwert von f für x gegen a existiert, falls es eine der Eigenschaften des Satzes erfüllt ist.

Falls der Grenzwert existiert ist er eindeutig bestimmt.

Satz 7.53. *Sei $S \subset \mathbb{R}$ und a ein Berührpunkt von S. Weiterhin seien f und g auf S definierte Funktionen. Dann gilt:*

1. *Existieren $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ so ist existiert $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x)$ und es ist: $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x) = \lim\limits_{x \to} f(x) + \lim x \to ag(x)$.*

2. *Existieren $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ so ist existiert $\lim\limits_{x \to a}(f \cdot g)(x)$ und es ist: $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.*

3. *Existieren $\lim x \to af(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ und ist $S' = \{x|g(x) \neq 0\}$ und a ein Berührpunkt von S', so ist existiert $\lim\limits_{x \to a}(f : g)(x)$ und es ist: $\lim\limits_{x \to a}(f : g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) : \lim\limits_{x \to a} g(x)$.*

4. *Sei f eine Funktion auf S mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Außerdem sei g eine auf S beschränkte Funktion. Dann ist $\lim\limits_{x \to a}(f \cdot g)(x) = 0$.*

5. *Für alle $x \in S$, die hinreichend nahe bei a liegen gelte $g(x) \leq f(x)$. Dann ist $\lim\limits_{x \to a} g(x) \leq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

6. *Sei h eine auf S definierte Funktion und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(a)$. Ist für alle $x \in$, welche hinreichend nahe bei a liegen: $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$, dann ist $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

7. *$f : S \to T$ und $g : T \to \mathbb{R}$ seien Funktionen, wobei S und T Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Sei a ein Berührpunkt von S und der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Sei b ein Berührpunkt von T. Angenommen der Grenzwert $\lim\limits_{y \to b} g(y)$ existiert und ist gleich c. Dann ist $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.*

Der Grenzwert bei Unendlich kann auch erklärt werden. Siehe hierzu das Buch von Serge Lang (Siehe Lang, *Analysis*, Seite 42)

7.2.2 Stetige Funktionen

Definition 113. Sei $x \in \mathbb{R}$. U heißt Umgebung des Punktes x, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $K(x, \varepsilon) \subset U$.

Satz 7.54. *Für eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ und einen Häufungspunkt $x \in A$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für alle Umgebungen $V \subset \mathbb{R}$ von $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.*

2. *Für jede Folge (a_n) aus A mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(x) = f(\lim\limits_{n \to \infty} a_n)$.*

3. *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x' mit $x - x'| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Definition 114. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in S$, wenn sie die Äquivalenzen des Satzes erfüllt.

Satz 7.55. *Seien f und g auf S definiert und in $a \in S$ stetig. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ in a stetig. Ist $g(a) \neq 0$, so ist f/g stetig in a.*

Satz 7.56. *Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.*

Satz 7.57.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0$

2. $\ln$ *ist für alle positiven x stetig.*

15. März 2017

Zu 1. Sei (h_n) eine Folge deren Grenzwert 1 ist. Dann gilt wegen Satz 7.6 $1-\frac{1}{h_n} < \ln(h_n) < h_n - 1$ Der Grenzwert der linken Seite ist 1 und der Grenzwert der rechten Seite ist auch 1. Also folgt die Behauptung.
Zu 2. Sei h_n eine Folge, die gegen 0 geht. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+h_n}{x} = 1$ Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x+h_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x+h_n}{x} \cdot x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x+h_n}{x}) + \ln(x) = 0 + \ln(x)$ wegen der Funktionalgleichung. Dies war behauptet. □

Satz 7.58. *Die Funktion* arctan *ist überall stetig.*

Sie ist stetig an der Stelle 0 wegen Satz 7.45. Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ erhält man: $\arctan(x) - \arctan(a) = \arctan(\frac{x-a}{1+xa})$. Das Additionstheorm kann man anwenden, da $-xa < 1$ für alle x genügend nahe bei 1 ist. Es ist aber $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{1+xa} = 0$. Daher folgt die Behauptung. □

Satz 7.59. *Ist $f : A \to B$ stetig, und A eine beschränkte und abgeschlossene Menge, so ist $f(A)$ beschränkt.*

Sei A eine beschränkte Menge und wir nehmen an $f(A)$ wäre unbeschränkt. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $a_{\tau(n)}$ mit $|f(a_n)| > n$. Die Folge (a_n) ist beschränkt und hat daher nach dem Satz von der Vollständigkeit 7.32 eine konvergente Teilfolge. $(a_{\tau(n)})$. Da A abgeschlossen ist, ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\tau(n)} = c \in A$. Da f stetig ist ist die Folge $f(a_{\tau(n)})$ konvergent gegen $f(c)$ und daher beschränkt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $|f(a_{\tau(n)})| > \tau(n) \geq n$ nach Konstruktion ist. □

Satz 7.60. *Ist f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ erklärte Funktion, so nimmt die Funktion ihr Maximum und Minimum an.*

$f(A)$ hat eine kleinste obere Schranke b. Es gibt daher eine Folge $(a_n | n \in \mathbb{N}) \subset A$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$. Da A beschränkt und abgeschlossen ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{\tau(n)})$ mit $\lim\limits_{a\to\infty} a_{\tau(n)} = c \in A$. Es ist $(f(a_{\tau(n)}))$ eine Teilfolge von $f(a_n | n \in \mathbb{N})$. Wir erhalten:

$$b = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_{\tau(n)}) = f(\lim_{n\to\infty} a_{\tau(n)}) = f(c)$$

Also wird das Maximum angenommen. Genauso zeigt man, dass das Minimum angenommen wird.

Satz 7.61 (Zwischenwertsatz). *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt f jeden Zwischenwert an.*

Ich schildere hier zwei Beweise:

1. Beweis: Sei $f(a) < y < f(b)$ und $M : \{x | f(x) < y, x \in [a, b]\}$. Es ist M nach oben beschränkt durch b und hat infolgedessen eine kleinste obere Schranke c.
Beh.: $f(c) = y$.
Beweis: Angenommen es ist $f(c) < y$. Dann gibt es eine ganze Umgebung von c mit $f(x) < y$ für alle $x \in U$. Dann kann c nicht die kleinste obere Schranke von M sein.
Angenommen es ist $y < f(c)$. Dann gibt es eine ganze Umgebung U von c, so dass für alle $x \in U$ gilt $y < f(x)$. Da c kleinste obere Schranke von M ist, enthält M auch ein Element x aus U. Dies widerspricht der definierenden Eigenschaft von M. Also ist $f(c) = y$. □

Dieser Beweis ist an mehreren Stellen nicht konstruktiv.

- Er beschreibt nicht, wie man die kleinste obere Schranke von M finden soll.
- Es wird die Existenz einer Umgebung U von c gefordert, so dass für alle $x \in U$ gilt $f(x) < y$. Diese Umgebung existiert, aber wie soll ich sie finden?
- Es wird die Existenz einer Umgebung U von c gefordert, so dass für alle $x \in U$ gilt $f(x) > y$. Diese Umgebung existiert, aber wie soll ich sie finden?

Andererseits „bestimmt“ der Beweis eine Stelle mit $f(c) = y$, die am nächsten an b liegt.
Jetzt der zweite Beweis:

Wir definieren induktiv eine Folge von Intervallen $I_n := [a_n, b_n]$ mit $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ und $b_n - a_n < (1/2^n) \cdot (b - a)$. Es sei $a_0 := a, b_0 := b$. Sei $I_n := [a_n, b_n]$ schon bestimmt und $m = \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von I_n.
1. Fall: $f(m) \leq y$. Dann sei $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
2 Fall: $y \leq f(m)$. Dann sei $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
In beiden Fällen hat man $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$. Außerdem ist (a_n) monoton wachsend und (b_n) monoton fallen und beschränkt. Also sind beide Folgen konvergent. Da $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist haben beide Folgen den gleichen

Grenzwert c. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ folgt wegen der Stetigkeit von f (Folgenstetigkeit):

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c) \leq y \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c)$$

Also ist $f(c) = y$.

Wenn man mal voraussetzt, dass es ein Programm gibt das die Funktion f berechnet, so konstruiert dieser Beweis Folgen, welche die gesuchte Stelle zwangsläufig einzwicken. Aber das hängt stark von der Funktion f ab, die man betrachtet. Wie ist es zum Beispiel für $f = \ln$. Die Funktion ln ist selbst durch ein Grenzwertverfahren definiert.
Auf jeden Fall ist der zweite Beweis viel „konstruktiver“ als der erste Beweis. Aber er benutzt wesentlich den Satz von der Konvergenz monotoner Folgen. Von daher ist wieder nicht konstruktiv. Außerdem geht bei ihm auch ein Haufen Information verloren. Man weiß nicht, welche Stelle c er erwischt, mit $f(c) = y$. Also ich halte ihn auch nicht für absolut konstruktiv. Dagegen spricht auch der folgende Satz:

Satz 7.62. *Gilt der Zwischenwertsatz, so ist $\mathbb{R}$ vollständig.*

Seien U und O zwei nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es liege U unterhalb von O. Das heißt für alle $x \in U$ und alle $y \in O$ gilt: $x \leq y$. Außerdem sei $U \cup O = \mathbb{R}$. Es können nicht beide Mengen offen sein. Den wäre dies der Fall, so wäre die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \in U \\ 1 \text{ für } x \in O \end{cases}$$

eine stetige Funktion ohne Zwischenwert. Also sind nicht beide Mengen offen. Es gibt daher etwa in U einen Punkt c, der kein innerer Punkt von U ist. Damit ist er Berührpunkt von O.
Beh.: c liegt zwischen U und O.
Sei $x \in U$ und $y \in O$. Es gilt sowieso $c \leq y$, da $c \in U$ ist. Zu zeigen bleibt $x \leq c$.
Angenommen $c < x$. Da c ein Berührpunkt von O ist gibt es ein $d \in O$ mit $c < d < x$. Das geht nicht, da $x \in U$ und $d \in O$ ist und U unterhalb von O liegt. Also ist $c \leq y$ und daher liegt c zwischen U und O. □

Folgerung 7.63. *Das stetige Bild eines kompakten Intervalls ist ein kompaktes Intervall.*

Es genügt zu zeigen, dass jede stetige Funktion das Intervall $[0,1]$ in ein Intervall abbildet. Sei f eine stetige Funktion. Nach dem Satz von Bolzano Weierstraß ist die Bildmenge beschränkt. Infolgedessen gibt es ein $\inf\{f(x)|x \in [0,1]\}$ und ein $\sup\{f(x)|x \in [0,1]\}$. Da stetige Funktionen ihr Infimum und Supremum annehmen, gibt es ein $c \in [0,1]$ mit $f(c) = \inf\{f(x)|x \in [0,1]\}$ und ein $d \in [0,1]$ mit $f(d) = \sup\{f(x)|x \in [0,1]\}$. Sei $y \in [f(c), f(d)]$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = y$. Damit ist die Abbildung $f : [0,1] \to [f(c), f(d)]$ surjektiv. Die Bildmenge ist also ein Intervall. □

Folgerung 7.64. *Ist $f : [0,1] \to \mathbb{Q}$ eine stetige Funktion, so ist f schon konstant.*

Wir betrachten die Inklusionsabbildung $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Sie ist sicherlich stetig. Daher ist $\iota \circ f$ eine stetige Funktion. Das heisst $f([0,1]) = [f(c), f(d)]$ für gewisse $c, d \in [0,1]$. Angenommen $f(c) < f(d)$. Dann gibt es ein y mit $f(c) < y < f(d)$, wobei y nicht rational ist. Dieses y kommt aber im Bild von f vor. Das geht wegen der Voraussetzung nicht, da $Bild(f) \subset \mathbb{Q}$. □

Folgerung 7.65. *Es gibt keine stetige surjektive Funktion $f : [0,1] \to \{a, b\}$ mit $a < b$.*

Definition 115. Sei $f : A \to A$ eine Funktion. Ist $f(x) = x$ für ein $x \in A$, so nennt man x einen Fixpunkt von f.

Satz 7.66 (Fixpunktsatz). *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ hat einen Fixpunkt.*

$h : [a,b] \ni x \mapsto x - f(x) \in \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion. Es ist $f(a) \in [a,b]$, mithin ist $a \leq f(a)$ und natürlich $f(b) \leq b$. Daher ist $a - f(a) \leq 0$ und $b - f(b) \geq 0$. Die Funktion h wechselt also zwischen a und b das Vorzeichen. Es gibt also ein x mit $h(x) = x - f(x) = 0$. Das heißt es gibt einen Fixpunkt. Wir wollen diesmal einen zweiten Beweis angeben. Dieser Beweis lässt sich später gut verallgemeinern. Angenommen f hat keinen Fixpunkt. Dann ist $|x - f(x)| > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Die Funktion

$$h(x) := \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|} \in \{-1, 1\} \tag{7.15}$$

ist also stetig. Außerdem ist sie surjektiv, wie man sich überlegt. Dies geht nicht. □

15. März 2017

Fragen:

9. Finde Beispiele von stetigen Funktionen $f : [0,1] \to [0,1]$, die zyklische Punkte vom Zyklus der Länge n haben mit $n > 1$.

7.2.3 Gleichmäßig stetige Funktionen

Definition 116. $f : A \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf A genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, x' \in A$ gilt: $|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Beispiele:

55. Die Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
56. Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

    Bew: Sei $\varepsilon = 1.$ und $\delta > 0$ beliebig. Wir betrachten für beliebiges $x > 0$: $|x + \delta/2| = \delta/2 < \delta$. Aber $|(x + \delta/2)^2 - x^2| = x^2 + x\delta + \delta^2/2 - x^2 > x\delta$ Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein x mit $x\delta > 1$. Das heißt zu jedem $\delta > 0$ mit $|(x + \delta/2) - x| < \delta$ aber $|f(x+\delta/2) - f(x)| > 1$. Das heißt die Quadratfunktion ist nicht gleichmäßig stetig.
57. Die Wurzelfunktion $\sqrt{} : \mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_0^+$ ist gleichmäßig stetig.

    Bew: Für ein $h > 0$ und belibiges $x \geq 0$ haben wir: $|f(x+h) - f(x)| = \sqrt{x+h} - \sqrt{h} = \frac{h}{\sqrt{x}+\sqrt{h}} \leq \sqrt{h}$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $h < \delta$ gilt: $\sqrt{h} < \varepsilon$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Aufgaben:

98. Zeige $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.
99. Ist $r > 1$ so ist die Funktion: $f : \mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto x^r \in \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig.
100. Ist $0 < r < 1$ so ist die Funktion: $f : \mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto x^r \in \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
101. Ist $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

Satz 7.67. *Jede auf einem abgeschlossen Intervall stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.*

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f in dem Punkt des kompakten Intervalls $[a, b]$ stetig ist, gibt es zu jedem x ein $\delta_x > 0$, so dass für alle x_1 mit $|x_1 - x| < \delta_x$ gilt: $|f(x_1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei zu jedem x: $T_x =]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}[$. Dann ist $\bigcup_{x \in [a,b]} T_x$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a, b]$. Es gibt daher eine endliche Teilüberdeckung $[a, b] \subset T_1 \cup T_2 \cdots \cup T_n$. Es ist

$T_i =]x_i - \delta_i/2, x + \delta_i/2[$. Sei $\delta = \min\{1/4 \cdot \delta_i | i = 1, \ldots, n\}$ und x', x'' mit $|x' - x''| < \delta$. Es gibt ein x_i mit $x' \in T_i$. Das heißt $|x_i - x'| < \delta_i/2$. Und daher $|x'' - x_i| = |x'' - x' + x' - x_i| < 1/4\delta_i + 1/2\delta_i < \delta_i$. Daher ist $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Satz 7.68. *Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. f ist genau dann stetig, wenn f surjektiv ist.*

Ist f stetig, so folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass f surjektiv ist.
Es bleibt die Umkehrung zu zeigen. Sei also f surjektiv und $x \in [a, b]$. Ich zeige die Behauptung nur in dem Fall, das f monoton wächst. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $[f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon] \subset [c, d]$ ist. Da f surjektiv und monoton ist, gibt es x_1 und x_2 mit $x_1 < x < x_2$ und $f(x_1) = f(x) - \varepsilon$ und $f(x_2) = f(x) + \varepsilon$. Ist x' aus dem Intervall $]x_1, x_2[$, so ist $f(x') \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Aus der UmgebungsDefinition folgt die Stetigkeit von f. □

Man überlegt sich leicht, dass in dem Satz a, b, c, d auch $\pm\infty$ sein können.

Folgerung 7.69. *Ist $f : [a, b] \to [c, d]$ streng monoton und stetig, so ist die Umkehrfunktion stetig.*

Sei g die Umkehrfunkion. Sie ist streng monoton wachsend und natürlich surjektiv. Daher ist sie stetig.

Folgerung 7.70. *Die Potenzfunktionen $f : \mathbb{R}_0^+ \neq x \mapsto x^r \in \mathbb{R}_0^+$ mit $r \in \mathbb{Q}$ sind stetig.*

Satz 7.71. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine auf A gleichmäßig stetige Funktion, Dann gibt es eine stetige Funktion $\hat{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}\iota$ Dabei ist $\iota A \hookrightarrow \overline{A}$ die Inklusionsabbildung.*

Sei $a \in \overline{A}$. Es gibt eine gegen a konvergente Folge $(a_n) \subset A$.
Beh: $(f(a_n))$ ist eine Fundamentalfolge.
Bew: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in A$ gilt: Ist $|x - x'| < \delta$, so ist $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \delta$ für alle $n, m \geq k$. Daher ist $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq k$. Daher ist $(f(a_n))$ eine Fundamentalfolge. Sie konvergiert gegen ein $c \in \mathbb{R}$. Konvergiert eine andere Folge (b_n) aus A gegen a, so ist $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = c$. Dieser Grenzwert c hängt

also nicht von der Folge (a_n) ab, die gegen a konvergiert. Es ist also sinnvoll zu definieren:

$$A \ni a \quad \mapsto \quad \hat{f}(a) := \begin{cases} f(a) & \text{falls } a \in A \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) & \text{für eine Folge mit } \lim a_n = a \end{cases}$$

Aus der Definition ergibt sich sofort die Eindeutigkeit und die Stetigkeit □

7.2.4 Exponentialfunktion

7.2.5 Trigonometrische Funktionen

Hier muss der Tangens sinus und Kosinus definiert werden. Außerdem müssen die Stetigkeit nachgewiesen werden und die Additionstheorem

Satz 7.72. *1. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\cos(x) - \cos(y) = (-2) \cdot \sin(\frac{\sin(x+y)}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})$$

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$

Es ist $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = (-2) \cdot \sin(\alpha)\sin(\beta)$ nach den Additionstheoremen. Setzt man $x = \alpha+\beta$ und $y = \alpha-\beta$, so ergibt sich die Behauptung. □

7.2.6 Kontraktionen

Definition 117. Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt eine Abbildung $f : A \to A$ eine Kontraktion genau dann, wenn es ein $r \in [0, 1[$ gibt, so dass für alle $a, b \in A$ gilt: $|f(a) - f(b)| < r \cdot |b - a|$.

Satz 7.73. *Jede Kontraktion $f : A \to A$ ist überall stetig.*

Sei $f : A \to A$ eine Kontraktion, wobei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. □

Aufgaben:

102. Welche linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kontraktionen?
103. Die folgenden Abbildungen sind Kontraktionen. Zeige dies und berechne den Fixpunkt. Falls die exakt nicht möglich ist auf 10 Stellen genau.
    a) Zeige $f : \mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}_0^+$ ist eine Kontraktion.
    b) Zeige: $[1, \infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in [1, \infty[$ ist eine Kontraktion.

c) Zeige: $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R}_0^+$ ist eine Kontraktion.

d) Zeige: $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+2} \in \mathbb{R}_0^+$ ist eine Kontraktion.

104. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ eine KOntraktion? Versuche einen Beweis, oder eine Widerlegung.

105. Sei $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 2 \cdot x - [2 \cdot x] \in \mathbb{R}$. Zeichne den Graphen der Funktion. Wo ist f unstetig. Für ein $c \in [0,1]$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto [0,1]$ mit $g(0) = c$ und $g(n+1) = f(g(n)))$. Zeichne den Graphen von g für folgende Werte c.

a) $c = 0$

b) $c = 0.5$

c) $c = \frac{1}{3}$.

d) $c = \frac{1}{9}$

e) $c = \frac{1}{32}$.

f) $c = \frac{7}{5}$

106. Sei f wieder die Funktion aus der Aufgabe 105. Ist c ein Punkt aus $\mathbb{R}$, so heißt $\{f^n(c) | n \in \mathbb{N}\}$ die Bahn durch c. Die Bahn endet in b, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^n(c) = b$ und b ist Fixpunkt von f ist.

a) Für welche c endet die Bahn in 0?

Satz 7.74. *Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene beschränkte Menge und $f : A \to A$ eine Kontraktion, dann hat f genau einen Fixpunkt. Den Fixpunkt erhält man als Grenzwert der rekursiv definierten Folge: $a_0 := c$, $a_{n+1} := f(a_n)$. Dabei ist c irgend ein Element aus der Menge A.*

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $c \in A$. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := c, a_{n+1} : \quad = \quad f(a_n) \tag{7.16}$$

Sei $M = \sup\{|a| a \in A\}$. Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f^{n+k}(c) - f^k(c)| \leq r^k \cdot |f^n(c) - c| < r^k \cdot M$ wobei $0 \leq r < 1$. □

8 Die Ebene

8.1 Koordinaten

8.1.1 Kreise

Betrachten wir die die folgende Zeichnung der zwei Kreise und erinnern wir uns an den Satz des Pythagoras, so erhalten wir:

Satz 8.1 (Kreisgleichung). *1. Die Menge der Punkte auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Radius r ist: $K(0,r) = \{(x,y)|x^2+y^2=r^2\}$*

2. Der Kreis um $M(a,b)$ ist: $\{(x,y)|(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$

Dies liefert die Möglichkeit eine Funktion zu schreiben, welche diese Gerade angibt, wenn ihr zwei verschiedene Punkte übergeben werden.
Multipliziert man die Gleichung eines Kreises aus, so erhält man eine Gleichung von dem folgenden Typ.

$$ax^2+ay^2+bx+cy+d = 0 \tag{8.1}$$

Durch Umformung dieser Gleichung kann man wieder auf den Mittelpunkt schließen.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2-4ad}{4a^2} \tag{8.2}$$

Das heißt die Gleichung 8.1 stellt genau dann einen Kreis um $M(\frac{-b}{2a},\frac{-c}{2a})$ dar, wenn $b^2+c^2-4ad>0$ ist.
Aufgaben:

107. Wie heißt die Gleichung des Kreises um den Nullpunkt und durch den Punkt P? (a) $P(12|-5)$. (b) $P(-1,6|3)$.
108. Berchne Mittelpunkt und Radius des Kreises mit der Gleichung:
    a) $x^2+y^2-6x-4y-3=0$
    b) $2x^2+2y^2+x-7y=0$
109. Bestimme den Umkreis des Dreiecks: $A(0|0), B(5|-1)$ und $C(6|4)$.
110. Zeige: Die Gerade $y=5-2x$ ist Tangente an den Kreis $x^2+y^2=5$
111. Welcher Kreis um den Nullpunkt berührt die Gerade $7x+24y-100=0$
112. Berechne den Schnittpunkt der Kreise: $x^2+y^2=25$; $(x-3)^2+(y+1)^2=9$.

8.1.2 Ellipsen

8.1.3 Hyperbeln

8.1.4 Descartes

Abb. 8.1: Descartes

Einer derjenigen, die diese Beziehung zwischen Zahlen und Geometrie untersucht hat, war René Descartes. Lateinisch nannte er sich Cartesius. Er wurde am 31.3 1596 in La Haye/Tourraine geboren. Heute heißt der Ort Descartes. Im Jesuitenkolleg La Flèche erhielt er eine umfassende Ausbildung auch in den damaligen Naturwissenschaften. Er studiert in Poitiers Eine Zeitlang diente er als Soldat und lernte in Italien, Paris und den Niederlanden die besten Naturwissenschaftler seiner Zeit kennen. 1629 ging er in die republikanischen Niederlande. Dort erhoffte er sich mehr Gedankenfreiheit, als in dem royalistischen Frankreich. Aber auch hier bekam er auf Dauer Ärger mit dem stockkonservativen protestantischen Bürgertum. Daher folgte er 1649 einer Einladung der schwedischen Königin, der Tochter Gustav Adolfs, an den Hof nach Stockholm. Aber schon im ersten skandinavischen Winter starb er dort.
In den Niederlanden hatte Descartes an einem großen Werk über die Natur „Le Monde“ gearbeitet. 1632 fand in Rom der Prozeß gegen Galilei statt. Unter Androhung der Folter wurde er von der Inquisition gezwungen seine Weltsicht zu

widerrufen. Aus Angst vor der Inquisition ließ Descartes seine Werke nicht drucken. Erst Jahre später, 1637, veröffentlichte René Descartes seinen „Discours de la Methode“. Dies war epochemachend. In drei Anhängen über die Geometrie, die Meteore und die Dioptrik erläuterte er seine Methode. In dem Werk über Geometrie verwendet Descartes systematisch die Methode der Koordinaten. Er konnte eine Reihe Probleme lösen, die bisher ungelöst oder nur sehr mühsam zu lösen waren. Er schaffte dadurch eine Beziehung zwischen bis dato unverbunden Gebieten. So konnte beide Wissenschaften wesentlich vertieft werden. Jede geometrische Überlegung war ab jetzt eine algebraische und umgekehrt.
Aufgaben:

113. Berechne $\vec{a} \circ \vec{b}$ für folgende Vektoren.
    a) $\vec{a} = (2|-1), \vec{b} = (-1|1)$.
    b) $\vec{a} = (-1|-2|3), \vec{b} = (-1|3|4)$.
114. Welche der folgenden Vektorpaare sind orthogonal?
    a) $\vec{a} = (1|-1|1), \vec{b} = (2|1|5)$
    b) $\vec{a} = (-5|2|7), \vec{b} = (-1|3|4)$.
115. Bestimme zu folgenden Mengen U die zugehörige Orthogonalmenge.
    a) $U = \{(5|-1|3)\}$.
    b) $U = \{(-1|1|1), (3|1|2)\}$.
116. Beweise: In einem Rombus schneiden sich die Diagonalen senkrecht.
117. Schneiden sich in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht, dann ist das Parallelogramm ein Rombus.
118. Beweise den Satz des Thales vektoriell.
119. Gegeben ist das folgende Dreieck mit den Ortsvektoren: $\vec{a} = (4|2|1), \vec{b} = (6|4|-1), \vec{c} = (5|-3|-2)$.
    a) Berechne sämtliche Winkel im Dreieck.
    b) Berechne den Flächeninhalt.
120. a) Zeige: Sind zwei Vektoren orthogonal und $\neq \vec{0}$, so sind sie linear unabhängig.
    b) Zeige allgemeiner: Sind $\vec{a}_1, \ldots, \ldots \vec{a}_n$ Vektoren, die paarweise orthogonal sind, und sind $c_1, \ldots, c_n$ Zahlen mit $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \vec{a}_i = \vec{0}$, so ist $c_1 = \ldots c_n = 0$.
121. Berechnen Sie in den folgenden Fällen die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die senkrechten Projektionen von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$ und umgekehrt.
    a) $\vec{a}(2|-1), \vec{b} = (-1|1)$.

b) $\vec{a} = (2|-1|5), \vec{b} = (-1|1|1)$.

c) $\vec{a} = (r|3|-1), \vec{b} = (2r|-3|7)$.

122. Für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aus dem $\mathbb{R}^n$ gelten folgende Beziehungen:

a) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b}$.

c) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$. Zeigen Sie diese Gleichungen und deuten Sie die Gleichungen geometrisch.

123. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ seien drei Vektoren mit $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{c}$. Ist dann notwendigerweise $\vec{b} = \vec{c}$?

124. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras, den Höhensatz und den Kathetensatz vektoriell.

125. $\vec{a}, \vec{b}$ seien Vektoren $\neq \vec{0}$. Dann ist $\vec{a}$ genau dann orthogonal zu $\vec{b}$, wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $|\vec{a} + c\vec{b}| \geq |\vec{a}|$. Was hei t dies geometrisch?

126. Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ die Gerade $g = (5|1) + (1|2)\mathbb{R}$.

a) Stelle die Gleichung der Geraden auf, die auf g senkrecht steht und durch den Nullpunkt geht.

b) Welchen Abstand hat der Nullpunkt von g?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks zwischen den Koordinatenachsen und der Geraden g?

d) Welchen Winkel schließt t g mit der x Achse beziehungsweise der y Achse ein? Wie lang sind die Seitenhalbierenden?

e) Berechnen Sie den Mittelpunkt des Umkreises.

127. Gegeben ist die Punktmenge $M = \{(x|y)|3x + 5y = 7; x, y \in \mathbb{R}\}$

a) Zeige: M ist eine Gerade g.

b) Die Gerade soll an der x Achse gespiegelt werden. Welche Geradengleichung entsteht?

c) Die Gerade soll am Punkt $P(4|4)$ gespiegelt werden. Was ist ihr Spiegelbild?

d) Welchen Abstand hat $Q(3|-2)$ von der Geraden?

128. Zeige allgemein:

a) Die Punktmenge $M = \{ax + by + c|a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}$ stellt eine Gerade dar.

b) Berechne allgemein den Abstand der Geraden vom Nullpunkt.

129. Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g = (1|1|6) + (3|-1|2)\mathbb{R}$.

a) Fälle vom Nullpunkt das Lot vom Punkt $\vec{p} = (1|1|1)$ auf g. Wie weit ist $\vec{p}$ von g entfernt?

b) g soll senkrecht auf die $x - y$ Ebene projiziert werden. Die Projektion sei h. Welche Entfernung hat h vom Nullpunkt?

c) Die Gerade g soll an der $x-y$ Ebene gespiegelt werden. Wie groß ist der Winkel zwischen g und ihrem Spiegelbild?

d) Welche Punkte von g haben vom Nullpunkt den Abstand 10?

130. Gegeben sind die Geraden $g = (5|-3|4) + (2|-1|2)\mathbb{R}$ und $h = (0|2|-5) + (3|-1|4)\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die Geraden haben keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel. Sie sind also windschief.

b) Berechnen Sie einen Vektor, der auf beiden Geradenrichtungen senkrecht steht.

c) Welchen Abstand haben die Geraden?

Wo liegen alle Punkte, die vom Ursprung den Abstand 5 haben?. Dies ist sicher der Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 5, also $K(\vec{0}, 5)$. Man überlegt sich, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dass $K(\vec{0}, 5) = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x^2 + y^2 = 5\}$. Hat der Mittelpunkt des Kreises M die Koordinaten $(x_0|y_0)$, so ist die Kreislinie um M mit Radius R also $K(M, r) = \{\vec{x}|\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. Dies ergibt sich wieder aus dem Satz des Pythagoras, oder einfach aus $|\vec{x} - \vec{m}| = r$. Aufgaben:

131. Zeige: Der Punkt (x, y) liegt genau dann auf dem $K((2|\frac{-3}{2}), \frac{7}{2}$, wenn er die folgende Gleichung erfällt: $x^2 + y^2 - 4x + 3y - 6 = 0$.

132. Wo liegen die Punkte $(x|y)$ für die $x^2 + y^2 > 36$ und $(x-2)^2 + (y+3)^2 < 64$ gilt?

133. Die Punkte der Menge K mögen die folgende Gleichung erfüllen. Zeige: K ist ein Kreis. Berechne den Mittelpunkt und den Radius des Kreises.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 70 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 + x - 7y = 0$.

134. Berechne die Entfernungen der Mittelpunkte für die beiden Kreise:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 24 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 29 = 0$.

135. Bestimme Mittelpunkt und Radius für den Umkreis des Dreiecks:

a) $A(-2|3), B(0|-3), C(4|1)$.

b) $A(-3|-1), B(3|-2), C(2|1)$.

136. Wir untersuchen die Menge der Punkte $\mathbb{M}$, welche die folgende Bedingung erfüllen:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

Es sei $D = b^2 + c^2 - 4ad$. Zeige:

a) Ist $D < 0$, so ist $\mathbb{M} = \emptyset$.
b) Ist $D = 0$, so enthält $\mathbb{M}$ genau einen Punkt.
c) Ist $D > 0$, so ist $\mathbb{M}$ ein Kreis. Welchen Mittelpunkt hat er und welchen Radius?

137. Bestimme den zu dem Kreis $5x^2 + 5y^2 + 24x - 32y - 9 = 0$, welcher
   a) die x Achse berührt.
   b) Durch den Nullpunkt geht.
   c) Durch den Punkt $A(|1|2)$ geht.

138. Zeige, dass die Gerade $y = 5 - 2x$ Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = 5$ ist (Hat nur einen Schnittpunkt mit dem Kreis). Berechne den Berührpunkt und weise nach, dass die Verbindungsstrecke: Mittelpunkt– Berührpunkt senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden steht.

8.1.5 Isometrien

Definition 118. Eine Abbildung $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ heißt Isometrie, wenn für alle $x, y \in \mathbf{E}$ gilt: $|x - y| = |f(x) - f(y)|$.

8.1.6 Drehstreckungen. Die komplexen Zahlen

8.1.7 Bewegungen

8.1.8 Affine Abbildungen

Definition 15 Es sei $V = \mathbb{R}^2$ Eine Eine Abbildung $V \xrightarrow{f} V$ eine Abbildung. f heißt affine Abbildung, wenn es einen Homomorphismus $V \xrightarrow{\alpha} V$ und ein $\vec{a} \in V$ gibt mit $f(\vec{x}) = \vec{a} + f(\vec{x} - \vec{a})$ □

8.2 Mengentopologie

8.2.1 Topologische Räume und stetige Funktionen

Definition 119. Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathfrak{O})$ wobei X eine Menge und $\mathfrak{O}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X mit folgenden Eigenschaften ist.

1. X und $\emptyset$ sind aus $\mathfrak{O}$.
2. Jede beliebige Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{O}$ ist aus $\mathfrak{O}$.
3. Sind O_1 und O_2 aus $\mathfrak{O}$ so ist $O_1 \cap O_2$ aus $\mathfrak{O}$.

Man sagt $\mathfrak{O}$ ist eine Topologie auf X. Die Elemente aus $\mathfrak{O}$ heißen offen.. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist. Wir werden oft einfach sagen X ist ein topologischer Raum, wenn vorher geklärt ist, welche Topologie $\mathfrak{O}$ gemeint ist.

Satz 8.2. *Sei $\mathfrak{O}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. Weiter sei $\mathfrak{A} = \{C(O) | O \in \mathfrak{O}\}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathfrak{O}$ ist eine Topologie.*
2. *$\mathfrak{A}$ erfüllt folgende Bedingungen:*
   a) *$X, \emptyset$ sind in $\mathfrak{A}$.*
   b) *Der beliebige Durchschnitt von Elementen aus $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{A}$.*
   c) *Die Vereinigung von zwei Elementen aus $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{A}$.*

Der Beweis ist einfach.

8.2.2 Metrische Räume

Definition 120. Es sei M eine beliebige Menge und $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung. Die Abbildung d heißt Metrik, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Für alle $x, y \in M$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.
2. Für alle $x, y \in M$ ist $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. Für alle $x, y, z \in M$ ist $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

In dem Fall heißt das Paar (M, d) metrischer Raum.

Beispiele:

58. $\mathbb{R}$ selber mit der Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto |x - y| \in \mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum. Die Eigenschaften 1. und 2. sind klar. Zu 3. Sei etwa $x > y$ und z beliebig. Dann gilt: $|x - y| = x - y = (x - z) + (z - y) \leq |x - z| + |z - y|$. Ist $x < y$ so folgt die Behauptung genauso.
59. Sei $\mathbb{R}^2 = M$. $d(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_2|$
    Auch hier sind die ersten beiden Eigenschaften sofort klar. $d(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.
60. Ein reeller Vektorraum V heißt normiert, wenn eine Abbildung $|.| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:
    a) Für alle $x \in V$ ist $|x| \geq 0$.

b) Für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$.

c) Für alle $x, y \in V$ ist $|x + y| \leq |x| + |y|$.

d) Für alle $x \in V$ gilt: $|x| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum durch $d(x, y) = |x - y|$.

61. $\mathbb{R}^2$ wird zu einem normierten Raum durch $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
Wir haben

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}| &\leq |x| + |y| \\ \iff (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2x||y| \\ \iff x_1y_1 + x_2y_2 &\leq |x||y| \\ \iff 0 &\leq x_1^2y_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2y_1^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist sicher der Fall.

Aufgaben:

139. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

140. Zeige: Ist d eine Metrik auf M und r eine positive Zahl, so sind $e = r \cdot d$ und $f = \frac{d}{1+d}$ Metriken.

Umgebungen

Ist (M, d) ein metrischer Raum $a \in M$ und die reelle Zahl $r > 0$, so heißt die Menge $K(a, r) = \{x | d(a, x) < r\}$ offene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r. Ein Punkt $a \in A$ heißt *innerer* Punkt von A, wenn es eine offene Kugel mit Mittelpunkt a gibt, die in A enthalten ist. Eine Menge heißt *offen*, wenn jeder Punkt der Menge innerer Punkt ist. Die offene Kugel ist eine offene Menge. Ist nämlich $x \in K(a, r)$, so ist $r' = d(a, x) < r$, so ist $K(x, r - r') \subset K(a, r)$.

Satz 8.3. *M und die leere Menge sind offen. Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

Die erste Behauptung ist offenbar richtig. Sind $A_1, \ldots, A_n$ endlich viele offene Mengen und ist a ein Punkt des Durchschnitts, so gibt es zu jedem i ein r_i, so dass $K(a, r_i) \subset A_i$ ist. Sei $r = \min\{r - i | i = 1 \ldots n\}$. Dann ist offensichtlich $K(a, r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ist $(A_i | i \in I)$ eine beliebige Familie offener Mengen, und $a \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann gibt es ein i, so dass $a \in A_i$. Da A_i offen ist, gibt es ein $r_i > 0$, so dass $K(a, r_i) \subset A_i \subset A$ ist. Also ist A offen. □

Die Menge A heißt *abgeschlossen*, wenn $\complement A = M \setminus A$ offen ist. Für beliebige Familien von Teilmengen $(A_i | i \in I)$ gilt: $\complement(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \complement(A_i)$ und $\complement(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \complement(A_i)$ Daraus ergibt sich

Satz 8.4. *Die Menge M und die leere Menge sind abgeschlossen. Der beliebige Durchschnitt und die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Infolgedessen gibt es zu jeder Teilmenge $A \subset M$ eine kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Sie heißt *abgeschlossene Hülle* von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet. Ist a ein innerer Punkt von A, so nennt man A eine *Umgebung* von a. Die Menge der Umgebungen von a heißt Umgebungssystem $\mathcal{U}(a)$.

Satz 8.5. *In einem metrischen Raum (M, d) gilt für $x \in M$:*

1. *Ist U eine Umgebung von x und V eine Obermenge von U, so ist V eine Umgebung von x.*
2. *Der Durchschnitt zweier Umgebungen von x ist eine Umgebung von x.*
3. *Jede Umgebung von x enthält eine offene Umgebung von x.*
4. *Eine Menge O ist genau dann offen, wenn sie Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist.*

Der Beweis sei Übung.

Konvergenz

Eine Folge (a_n) in dem metrischen Raum (M, d) heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in M$ gibt, so dass die reelle Zahlenfolge $(d(a_n, a))$ gegen Null konvergiert. Wir sagen: Die Folge (a_n) strebt gegen a, $a_n \to a$. Der Punkt a ist durch die Folge (a_n) eindeutig bestimmt und heißt *Grenzwert* der Folge. Ist nämlich a' auch ein Grenzwert, so gilt die Ungleichung: $d(a, a') \leq d(a, a_n) + d(a_n, a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $d(a, a') = 0$. Daher ist $a = a'$. Ist der Schnitt einer jeden Umgebung von x mit der Menge A nicht leer, so nennt man a einen *Berührpunkt* von A. Wir sagen auch *a berührt* die Menge A. Ein Punkt a ist Berührpunkt der Menge A genau dann, wenn es eine Folge (a_n) aus A gibt, die gegen a strebt.

Satz 8.6. *Die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ ist die Menge aller Berührpunkte.*

Sei zunächst $a \in \overline{A}$. Angenommen a ist kein Berührpunkt von A. Dann gibt es eine offene Kugel U um a die A nicht schneidet. Also ist $a \in U \subset \complement A$. und daher $A \subset \complement U$. $\complement U$ ist abgeschlossen, enthält daher $\overline{A}$. Dem widerspricht $a \notin \complement U$. Also ist jeder Punkt aus $\overline{A}$ Berührpunkt.
Sei umgekehrt a ein Berührpunkt. Die abgeschlossene Menge V enthalte A. Also ist $\complement V \cap A = \emptyset$. Wäre $a \notin V$, so wäre $\complement V$ als offene Menge eine Umgebung von a, welche A nicht schneidet. Andererseits berührt a die Menge A. Dies widerspricht sich. Also ist jeder Berührpunkt von A in der abgeschlossenen Hülle von A. □

Eine Menge A heißt *dicht* in der Menge B, wenn $B \subset \overline{A}$ ist.
Aufgaben:

141. Ein Punkt a heißt *Häufungspunkt* von A, wenn jede Kugel $K(a, r)$ um a mit A einen Punkt ungleich a gemeinsam hat. Ein Punkt $a \in A$ heißt *isolierter Punkt*, wenn es eine offene Kugel um a gibt, die mit A nur den Punkt a gemeinsam hat.
    a) Jeder Punkt von $\overline{A}$ ist entweder Häufungspunkt oder isolierter Punkt.
    b) Die Menge der Häufungspunkte ist abgeschlossen.
    c) Die Menge der isolierten Punkte ist nicht notwendig abgeschlossen.
142. Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht in der Menge der reellen Zahlen.
143. In $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{Q}^2$ dicht bei der normalen euklidischen Metrik.
144. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so definieren wir die Strecke zwischen zwei Punkten a, b durch $[a, b] := \{x | d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)\}$.
    a) Verdeutliche: Was ist die Strecke zwischen zwei Punkten in $\mathbb{R}^2$ bei der Manhattan Metrik?
    b) Was ist die Strecke zwischen zwei Punkten bei der Metrik: $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$.
    c) Was erhält man, wenn man in der Aufgabe 144b anstelle der euklidischen Metrik die ManhattanMetrik einsetzt?

Stetige Funktionen

Satz 8.7. *(M, d), (N, e) seien metrische Räume und $f : M \to N$ eine Funktion. Es sind äquivalent:*

1. *Für jede Folge (a_n) aus M, die gegen a strebt., kovergiert die Bildfolge $(f(a_n))$ gegen $f(a)$.*
2. *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle x mit $d(a, x) < \delta$ ist $e(f(a), f(x)) < \epsilon$.*

3. *Für jede Umgebung V von $f(a)$ ist $f^{-1}(V)$ ein Umgebung von a.*

1. $\Longrightarrow$2. Angenommen die Behauptung stimmt nicht. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ es ein x gibt mit: $d(a,x) < \delta$ aber $e(f(a),x) \geq \epsilon$. Insbesondere ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $f(K(a,\frac{1}{n})) \cap \complement K(f(a,\epsilon)) \neq \emptyset$. Es gibt daher eine Folge mit $d(a,x_n) < 1/n$ aber $e(f(a),f(x_n)) \geq \epsilon$. Die Folge (x_n) konvergiert also gegen a aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(a)$. Beim Beweis haben wir das Auswahlaxiom verwendet.
2. $\Longrightarrow$3. Jede Umgebung V von $f(a)$, enthält eine Kugel mit Mittelpunkt $f(a)$ und Radius ϵ. Zu dem ϵ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $d(a,x) < \delta$ folgt: $e(f(a),f(x)) < \epsilon$. Das heißt $f(K(a,\delta)) \subset K(f(a),\epsilon) \subset V$. Also ist $K(a,\delta) \subset f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a.
3.$\Longrightarrow$1. Strebe die Folge (x_n) aus M gegen a, und $\epsilon > 0$ sei gegeben. $V = K(f(a),\epsilon)$ ist eine Umgebeung von a. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a. Es gibt daher ein $\delta > 0$, so dass $K(a,\delta) \subset f^{-1}(V)$ ist. Da (x_n) gegen a strebt liegen fast alle Folgenglieder in $K(a,\delta) \subset f^{-1}(V)$. Fast alle $f(x_n)$ liegen daher in $f(f^{-1}(V)) \subset V = k(f(a),\epsilon)$. Also konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(a)$. □

Erfüllt f eine der Aussagen des Satzes, so heißt f *stetig* an der Stelle a.

Satz 8.8. *Ist (M,d) ein metrischer Raum und sind $f,g : M \to \mathbb{R}$ in a stetige Funktionen so gilt:*

1. *$f \pm g$ ist eine stetige Funktion.*

2. *$f \cdot g$ ist eine stetige Funktion.*

Die Menge der stetigen Funktionen bilden also einen Ring.

Eine Funktion $f : M \to N$ zwischen metrischen Räumen heißt *stetig*, wenn sie für alle $x \in M$ stetig ist.
Sind A, B Teilmengen von $\mathbb{E}$ und $f : A \to B$ eine Funktion, so lässt sich f durch die Koordinatenfunktionen schreiben. $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Es ist f genau dann stetig, wenn die Koordinatenfunktionen stetig sind.

Satz 8.9. *Seien (M,d) und (N,e) metrische Räume. $f : M \to N$ eine Funktion. Äquivalent sind:*

1. *f ist stetig.*

2. *Das Urbild offener Teilmengen von N ist offen.*

3. *Das Urbild abgeschlossener Mengen in N ist abgeschlossen.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei V eine offene Menge in N un $a \in f^{-1}(V)$. Es ist V eine Umgebung von $f(a)$. Wegen Satz 8.7 ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a. Daher liegt eine offene Kugel mit Mittelpunkt a in $f^{-1}(V)$. Das bedeutet $f^{-1}(V)$ ist offen.
2. $\Longrightarrow$1. Konvergiere die Folge $(a_n) \subset M$ gegen $a \in M$ und sei $\epsilon > 0$. Das Urbild der offenen Menge $K(f(a), \epsilon)$ ist offen. Es gibt $\delta > 0$, so dass $f(K(a, \delta)) \subset K(f(a), \epsilon)$ ist. Daher liegen fast alle Folgenglieder $f(a_n)$ in $K(f(a), \epsilon)$. Die Folge $f(a_n)$ strebt also gegen $f(a)$. □

Ist f eine stetige Funktion, so kann das Bild einer „normale“ Menge noch ziemlich anders aussehen. Betrachten wir beispielsweise die Funktion:

$$f : \mathbb{E} \ni (x, y) \mapsto (x^2 - x, y) \in \mathbb{E} \tag{8.3}$$

Wendet man diese Funktion auf den Einheitskreis an so ergibt sich: Das erste

Abb. 8.2: Bild eines Kreises

Bild ist $f(S^1)$ und das zweite Bild ist $f^2(S^1)$.
Die Bilder wurden mit `gnuplot` mit dem folgenden Programm gezeichnet:

```
a(x)=x**2-x
b(x)=x
g(t)=cos(2*pi*t);
h(t)=sin(2*pi*t)
set parametric
set xrange [-1:2]
set yrange [-1.5:1.5]
set trange [0:1]
set grid
set samples 100;
plot g(t),h(t) with lines lw 2
pause -1

plot g(t),h(t) with lines lw 2
pause -1

plot a(g(t)),b(h(t)) with lines lw 2
pause -1

plot a(a(g(t))),b(b(h(t))) with lines lw 2
```

```
pause -1

set samples 400
plot a(a(a(a(a(a(g(t))))))),b(b(b(b(b(b(h(t))))))) with lines lw 2
set samples 100
```

Aufgaben:

145. Betrachte die stetige Funktion $f(x, y) = (x^2, y)$.
    a) Zeichne das Bild des Einheitskreises.
    b) Zeichne das Bild des Einheitsquadrates.
    c) Zeichne das Bild einer Geraden.
    d) Für welche Punkte gilt $f(x, y) \in f(Rand(D^2))$?
    e) Zeichne das Bild des Kreises D^2.
    f) Zeichne das Bild des Kreises $K((-1, 0), 1)$.
    g) Gilt die Behauptung: Das Bild einer Geraden ist eine Parabel?
    h) Ist das Bild eines inneren Punktes von $K(\vec{0}, 1)$ stets ein innerer Punkt.
    i) Welche Punkte des Inneren von D^2 werden in das Innere von von $f(D^2)$ abgebildet?

Eine Funktion $F : M \to N$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $a, b \in M$ mit $d(a, b) < \delta$ folgt $e(f(a), f(b)) < \epsilon$. Ist A eine beliebige Teilmenge des metrischen Raumes M und $x \in M$, so definieren wir:

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a)|a \in A\}.$$

Diese Zahl heißt *Abstand des Punktes x von der Menge A.*

Satz 8.10. *Die Funktion $D : M \ni x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig. Für jede nichtleere Menge ist $\overline{A} = \{x|d(x, A) = 0\}$*

Es ist $d(x, A) \leq d(x, z) + d(y, z)$ für alle $x, y \in M$ und $z \in A$. Daraus folgt $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Durch Vertauschen von x und y $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$ also

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \tag{8.4}$$

für alle $x, y \in M$. Hieraus liest man die gleichmäßige Stetigkeit ab. Der Abstand eines Punktes $x \in M$ ist geanu dann 0, wenn eine Folge (a_n) aus A gegen x strebt. Dies ist genau dann der Fall, wenn x Berührpunkt von A ist. Wegen Satz 8.6 ist die genau dann der Fall, wenn x in der abgeschlossenen Hülle von A liegt. □

Aufgaben:

146. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \vec{0} \ni \vec{x} \mapsto \dfrac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x} \in S^1$.
   a) f ist stetig.
   b) f ist nicht gleichmäßig stetig.

147. Sei A eine beliebige Menge in dem metrischen Raum (M, d) und $\delta > 0$. $A_\delta := \{x | d(x, A) < \delta$
   a) A_δ ist eine offene Menge, die A enthält.
   b) Zu jeder abgeschlossenen Menge A gibt es eine Folge offener Mengen $(A_n | n \in \mathbb{N})$ mit $A_1 \supset A_2 \cdots \subset A_n \ldots$ mit $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$
   c) Zu jeder offenen Menge A gibt es eine Folge abgeschlossener Mengen $(A_n | n \in \mathbb{N})$ mit $A_1 \subset A_2 \cdots \subset A_n \ldots$ mit $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.
   d) Sind A, B abgeschlossen und punktfremd, so gibt es offene Mengen E und F, die punktfremd sind mit $A \subset E$ und $B \subset F$.

Lösung zur Aufgabe 147:

147a Sicher ist A in A_δ enthalten. Sei $x \in A_\delta$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $d(a, x) < \delta$. Es ist $r - d(a, x) > 0$. Sei $y \in K(a, r)$. Dann ist $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r = \delta$. Also ist $d(y, A) = \inf\{d(a, y) | a \in A\} < \delta$. Also ist $y \in A_\delta$. Also ist $K(a, r) \subset A_\delta$. Es folgt, dass A_δ offen ist.

147b Sei $A_i := A_{1/i}$ aus der Aufgabe 147a. Dann ist $A \subset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Also ist $A \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Ist $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, so ist $d(x, A) < \frac{1}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit ist aber $x \in \overline{A} = A$. Also ist $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

147c Ist B offen, so ist $A = \complement(B)$ abgeschlossen. Es gibt eine Familie $(A_n | n \in setN)$ von offenen Mengen mit $A \subset A_n$ und $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Daher enthält $\complement(A_n)$ die Menge A für alle $n \in \mathbb{N}$ und es ist $B = \complement(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \complement(A_i)$. Dabei sind die $B_i = \complement(A_i)$ abgeschlossen.

147d Kein $a \in A$ kan Berührpunkt von B sein. Es gibt daher zu jedem $a \in A$ ein ϵ_a mit $K(a, \epsilon_a) \cap B = \emptyset$. Die Menge $U = \bigcup a \in AK(a, \epsilon_a)$ ist punktfremd zu B. Genauso gibt es eine Familie $(\epsilon_b | b \in B)$ mit $V = \bigcup\limits_{b \in B} K(b, \epsilon_b)$ ist punktfremd zu A.

Beh: $U_1 \bigcup a \in AK(a, \epsilon_a/2)$ und $V_1 = \bigcup\limits_{b \in B} K(b, \epsilon_b/2)$ sind punktfremd.

Angenommen $x \in U_1 \cap V_1$. Dan gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x \in K(a, \epsilon/2) \cap K(b, \epsilon/2)$. Dann ist

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \epsilon_a/2 + \epsilon_b/2 \tag{8.5}$$

1.Fall: $\epsilon_a \geq \epsilon_b$: Es folgt $d(a, b) < \epsilon_a$. Das heißt $b \in K(a, \epsilon_a)$. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von ϵ_a.

2.Fall: $\epsilon_a < \epsilon_b$. Dann ist $d(a, b) < \epsilon_b$. Also ist $a \in K(b, \epsilon_b)$ im Widerspruch zur Wahl von ϵ_b.

Vollständig metrische Räume

Eine Folge (x_n) in dem metrischen Raum (M, d) heißt *Cauchyfolge* oder *Fundamentalfolge*, wenn für alle $\epsilon > 0$ für fast alle x_n, x_m gilt:$d(x_n, x_m) < \epsilon$. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Konvergiert in M jede Fundamentalfolge, so heißt der metrische Raum (M, d) *vollständig.*

Satz 8.11. *$\mathbb{R}^n$ ist mit der Standartmetrik ein vollständig metrischer Raum.*

Eine Abbildung f des metrischen Raumes in sich *kontrahiert* oder *zieht den metrischen Raum zusammen*, wenn es ein $\lambda \in [0, 1[$ gibt mit: $d(f(a), f(b)) < \lambda \cdot d(a, b)$ für alle $a, b \in M$. Jede Kontraktion ist stetig.

Satz 8.12 (Fixpunktsatz von Banach). *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $a \in M$ beliebig. Außerdem sei $f : M \to M$ eine Kontraktion. Dann gilt:*

1. *Die Folge $a_n : f^n(a)$ konvergiert.*
2. *Ist $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, so ist a ein Fixpunkt von f.*
3. *f hat genau einen Fixpunkt.*

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ hat man: $a_n = f^{n-k}(a_k)$ wobei $a_0 = a$. Es folgt: $d(a_{n+1}, a_n) =\leq \lambda^n \cdot d(a_1, a)$. Wir erhalten mit der Drei3ecksungleichung: $d(a_{n+m}) \leq \sum\limits_{i=0}^{m-1} d(a_{n+i+1}, a_{n+i}) \leq \sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda^{n+i} d(a_1, a) = \lambda^n d(a_1, a) \cdot \sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda^i \leq \lambda^n d(a_1, a) \dfrac{1}{1-\lambda}$ Also ist (a_n) eine Fundamentalfolge. Daher konvergiert sie.
Zu 2. $a = \lim\limits_{n \to \infty}$. Da f stetig ist, ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$. Andererseits ist $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)$.
Zu 3. Seien a, b verschiedene Fixpunkte von f. Dann ist $0 < d(a, b) = d(f(a), f(b)) < \lambda \cdot d(a, b)$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Kompakte Mengen

Ist M ein metrischer Raum und $(O_i|i \in I)$ eine Familie von offenen Mengen mit $M \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, so heißt $(O_i|i \in I)$ eine *offene Überdeckung von M.*

Satz 8.13. *In einem metrischen Raum (M, d) sind äquivalent:*

1. *Jede offene Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung.*
2. *Ist $(A_i|i \in I)$ eine Familie abgeschlossener Mengen, deren Durchschnitt leer ist, so gibt es eine endliche Teilfamilie deren Durchschnitt leer ist.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei $(A_i|i \in I)$ eine Familie abgeschlossener Mengen deren Durchschnitt leer ist. Dann ist $\complement(\emptyset) = \complement(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \complement(A_i) = M$. Wir haben also eine offene Überdeckung von M. Die enthält eine endliche Teilüberdeckung mit der zugehörigen Indexmenge I_0. Es ist also $\bigcup_{i \in I_0} \complement(A_i) = M$. Daher ist $\bigcap_{ß \in I_0} A_i = \emptyset$.
2. $\Longrightarrow$1. Auch dies ergibt sich durch Übergang zum Komplement. □

Erfüllt M die äquivalenten Eigenschaften des Satzes, so heißt M kompakt. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes heißt *kompakt*, wenn K in der induzierten Metrik kompakt ist.
Die Eigenschaft 2 des Satzes kann auch so formuliert werden: Ist $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Menge abgeschlossener Mengen und ist jeder endliche Durchschnitt von Mengen aus $\mathfrak{A}$ nicht leer, so ist $\bigcap\{A|A \in \mathfrak{A}\}$ nicht leer.

Satz 8.14. *In einem kompakten Raum ist jede abgeschlossene Menge kompakt.*

Sei $(U_i|i \in I)$ eine offene Überdeckung der abgeschlossenen Menge A. Dann gilt:

- $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ und $U_i \subset A$.
- Zu jedem $i \in I$ gibt es eine in M offene Menge V_i mit $U_i = A \cap V_i$. Dann ist $((Vi|i \in I), \complement(A))$ eine offene Überdeckung von M.

Diese Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung $V_1 \cup \cdots \cup V_n \cup \complement(A) = M$. Also ist $A \subset (V_1 \cup \ldots V_n) \cap A$. Das heißt $A = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. □

Satz 8.15. *Ist A eine kompakte Menge in dem metrischen Raum (M, d), so hat jede unendliche Folge $(a_n) \subset A$ einen Häufungspunkt.*

Seien $A_n = \{a_m | m \geq n\}$ die Endstücke der Folge $(\overline{A_n} | n \in \mathbb{N})$ ist eine Menge abgeschlossener Mengen. Jeder endliche Durchschnitt dieser Mengen ist nicht leer. Also ist ein $x \in \overline{A_n}$. für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist V eine beliebige Umgebung von x, so ist $V \cap A_n \neq \emptyset$ für alle n. Das heißt für alle n gibt es mindestens ein $a_m \in A \cap A_n$ In jeder Umgebung von x liegen daher unendlich viele Folgenglieder. □

Ein metrischer Raum heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Menge gibt.

Satz 8.16. *In einem separablen metrischen Raum sind äquivalent:*

1. *M ist kompakt.*
2. *Jede unendliche Folge besitzt einen Häufungspunkt.*
3. *Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Satz 8.17. *Das stetige Bild eines kompakter Räume ist kompakt.*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung von dem kompakten Raum X in den Raum Y. Sei $(V_i | i \in I)$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $(U_i = f^{-1}(V_i))$ eine offene Überdeckung von X. Dazu gibt es eine endliche Teilmenge $I_e \subset I$, so dass die $(U_i | i \in I_e)$ eine offene Überdeckung von X bilden. Da f surjektiv ist gilt gilt $f(U_i) = V_i$ und die $(V_i | i \in I_e)$ bilden eine endliche Teilüberdeckung. □

Satz 8.18. *Sei M ein metrischer Raum und K eine kompakte Teilmenge. Dann gilt:*

1. *Zu $x \notin K$ gibt es offene Mengen U, V mit $K \subset U, x \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*
2. *K ist abgeschlossen.*

Bemerkung 22 Ist $a \subset K$ wobei K kompakt ist, so gilt: $A = \overline{A} \iff A$ ist kompakt. □

Ist $A = \overline{A}$, so ist wegen der Überlegung vorher A kompakt. Auch die Umkehrung ergibt sich sofort aus dem Satz vorher. □

Satz 8.19. *Sei M ein kompakter metrischer Raum und Y ein metrischer Raum. Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus. Also ist f eine topologische Abbildung.*

Ist M kompakt, so auch wegen Satz 8.17 kompakt. Sei $A \subset M$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt und daher $f(A)$ kompakt und also abgeschlossen. Das Urbild unter f^{-1} einer abgeschlossenen Menge ist daher abgeschlossen. Daher ist f^{-1} stetig. □

8.2.3 Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz

Sei $(f_n) : M_1 \to M_2$ eine Folge von Funktionen zwischen metrischen Räumen.

Definition 121. 1. Die Folge $(f_n | n \in \mathbb{N})$ konvergiert punktweise gegen f, wenn für alle $x \in M_1$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ gilt.

2. Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists k \forall i \geq k \forall x \in M_1 : (\rho(f(x), \rho(f_i(x)) < \epsilon)$.

Beispiele:

62. Sei $M_1 = \{x | |x| < 1\}$ und $M_2 = \mathbb{C}$. $f_n : M_1 \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{C}$ und $f(x) = 0$. Dann konvergiert die Folge $(f_n | n \in \mathbb{N})$ punktweise aber nicht gleichmäßig gegen f.

    Sei $x \in M_1$ also $|x| < 1$. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $|x|^k < \varepsilon$. Für alle $n \geq k$ ist dann erst recht $|x|^k < \varepsilon$. Also konvergiert die Folge x^n gegen 0.

    Die Funktionenfolge konvergiert aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Sei dazu $\varepsilon = 1/2$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei $x = (34)^{1/k}$. Dann ist $x < 1$ aber $x^k = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$. Das heißt es gibt kein $k \in \mathbb{N}$, so dass $x^k < \frac{1}{2}$ für alle $x \in M_1$ gilt. Die Folge (f_n) konvergiert daher nicht gleichmäßig gegen f. □

Satz 8.20. *Der gleichmäßige Limes stetiger Funkionen ist stetig.*

Sei $a \in M_1$ und $(a_n | n \in \mathbb{N})$ eine Folge aus M_1, die gegen a konvergiert. Zu zeigen ist, dass die Folge $(f(a_n))$ gegen $f(a)$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n | n \in \mathbb{N})$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ und alle $x \in M_1$:

$$\rho_2(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Insbesondere ist für k und für alle $x \in M_1$ $\rho_2(f_k(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Da f_k stetig ist, konvergiert $f_k(x_n)$ gegen $f_k(a)$. Daher ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$\rho_2(f_k(x_n), f_k(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Die Dreiecksungleichung liefert nun:

$$\rho_2(f(a), f(a_n)) \leq \rho_2(f(a), f_k(a)) + \rho_2(f_k(a), f_k(a_n)) + \rho_2(f_k(a_n), f(a_n))$$

Der erste und dritte Summand ist $\leq \varepsilon/3$. Der zweite Summand istfür fast alle $n \in \mathbb{N}$ wegen der Stetigkeit von f_k kleiner als $\varepsilon/3$. Insgesamt erhält man für fast alle n: $\rho_2(f(a), f(a_n)) \leq \varepsilon$. Daher ist f stetig. □

Definition 122. Eine Funktion $f : M_1 \to M_2$ heißt beschränkt, wenn $Bi(f)$ beschränkt ist. Mit $B := B(M_1, M_2)$ bezeichnen wir die Menge der beschränkten Funktionen.

Satz 8.21. *1. Durch $\rho(f,g) := \sup\{\rho_2(f(x), g(x)) | x \in M_1\}$ für $f, g \in B$ wird (B, ρ) zu einem metrischen Raum.*

2. Es ist B genau dann vollständig, wenn M_2 vollständig ist.

3. $f = \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ in B genau dann, wenn $f = glm \lim\limits_{i\to\infty} f_i$.

Zu 1: 1. Es ist wegen der Symmetrie von ρ_2

$$\begin{aligned} \rho_2(f,g) &= \sup\{\rho_2(f(x), g(x)) | x \in M_1\} \\ &= \sup\{rho_2(g(x), f(x)) | x \in M_1\} \\ &= \rho(g,h) \end{aligned}$$

2. Seien $f, g : M_1 \to M_2$ zwei Funktionen mit $f \neq g$. Dann gibt es ein $x \in M_1$ mit $f(x) \neq g(x)$. Daher ist $\rho_2(f(x), g(x)) > 0$, da ρ_2 eine Metrik ist. □

Zusammenhängende metrische Räume

8.3 Parameterdarstellungen

8.3.1 Kurven

Definition 123. Jede stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt Parameterdarstellung.

Sei $P([a,b])$ = Menge der Parameterdarstellungen. Auf dieser Menge führen wir eine Metrik ein.

Definition 124. $d(\varphi, \tau) := \sup\{|\varphi(t) - \tau(t)| t \in [a,b]\}$

Satz 8.22. *Durch diesen Abstand wird $P([a,b])$ zu einem vollständigen metrischen Raum.*

Sicher ist $d(\varphi, \tau) \geq 0$ für alle Parameterdarstellungen $d(\varphi, \tau)$. Sei $(\varphi, \tau) = 0$. Dann ist $|\varphi(t) - \tau(t)| = 0$ für alle $t \in [a, b]$. Also ist $\varphi(t) = \tau(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Die Symmetrie ist klar. Zu zeigen bleibt die Dreiecksungleichung. Seien nun α, β, γ dreie stetige Parameterdarstellungen mit der Quelle $[a, b]$.Wir betrachten $d(\alpha, \gamma)$. Sei $t \in [a, b]$. Dann ist

$$|\alpha(t) - \gamma(t)| \leq |\alpha(t) - \beta(t)| + |\beta(t) - \gamma(t)|.$$

Das heißt für alle $t \in [a, b]$ ist $|\alpha(t) - \gamma(t)| \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$. Da dies für alle $t \in [a, b]$ gilt, ist $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$.
Es bleibt die Vollständigkeit zu zeigen. Sei $(\alpha_n | n \in \mathbb{N})$ eine Cauchyfolge stetiger Funktionen $\alpha_n : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$. Dann haben wir die Funktion

$$\alpha : \mathbb{I} \ni t \mapsto \lim_{n \to \infty} \alpha_n(t) \in \mathbb{R}^2$$

Zu zeigen ist, dass α stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ und $t \in \mathbb{I}$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq k$ gilt: $d(\alpha_n, \alpha_m) < \epsilon/3$ und $|\alpha(t) - \alpha_n(t)| < \epsilon/3$. Ist $t' \in \mathbb{I}$ beliebig, so ist $|\alpha(t) - \alpha(t')| \leq |\alpha(t) - \alpha_n(t)| + |\alpha_n(t) - \alpha_m(t')| + |\alpha_m(t') - \alpha_n(t')| \leq |\alpha(t) - \alpha_n(t)| + d(\alpha_n, \alpha_m) + d(\alpha_m, \alpha_n) < \epsilon$ □

Satz 8.23. *Im Raum der Parameterdarstellungen ist die Menge der Polygone dicht.*

8.3.2 Zusammenhang

8.3.3 Wegzusammenhang

Definition 125. Eine Teilmenge $\mathbf{A} \subset E$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in A$ eine stetige Funktion $\alpha : \mathbb{I} \to A$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$ gibt.

Satz 8.24. *Ist A eine wegzusammenhängende Menge, so ist A zusammenhängend.*

Sei U eine nichtleere in A offene und abgeschlossene Menge. Mindestens ein a liegt daher in U. Sei b ein weiters Element aus A. Wir zeigen, dass $b \in U$ liegt. Es gibt eine stetige Funktion $\alpha : \mathbb{I} \to A$ mit $\alpha(0) = a$ und $\alpha(1) = b$. Es ist $\alpha(0) = a \in U$. Sei

$$M = \{t | t \in \mathbb{I} \text{ und } \alpha(t) \in U\}$$

Da M nicht leer ist existiert $s = \sup(M)$. Sei $(t_n | n \in \mathbb{N})$ eine Folge aus M, die gegen s konvergiert. $\alpha(t_n)$ konvergiert gegen $\alpha(s)$, da α stetig ist. Die in

A abgeschlossene Menge U enthält $\alpha(s)$. Es ist $s = 1$. Denn angenommen $s < 1$. Da U offen in A ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $K(\alpha(s), \epsilon) \bigcap A \subset U$ gilt. nsbesondere ist $K(\alpha(s), \epsilon) \bigcap Bi(\alpha) \subset U$. Zu dem ϵ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x' mit $|x' - x| < \delta$ folgt $|\alpha(x') - \alpha(x)| < \epsilon$. Sei $x' = s + \delta/2$. Dann ist $\alpha(x') \in Bi(\alpha) \bigcap K(\alpha(s), \epsilon) \subset U$, aber $x' > s$. Dies widerspricht der Tatsache, dass s das Supremum von M ist. Also ist $s = 1$ und $\alpha(1) = b \in U$. Daher ist $U = A$ und A zusammenhängend. □

Hinweise:

9. Die Umkehrung gilt nicht. Siehe ein Gegenbeispiel in Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Seite 25

Satz 8.25. *Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum $f : X \to Y$ eine stetige und surjektive Abbildung zwischen den topologischen Räumen. Dann ist Y zusammenhängend.*

Sei $U \subset Y$ eine nichtleere offene und abgeschlossene Menge. Dann ist $f^{-1}(U)$ nicht leer, offen und abgeschlossen in X, da f stetig ist. Also ist $f^{-1}(U) = X$. Daher ist $f(f^{-1}(U)) = U = f(X) = Y$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Folgerung 8.26. *S^1 ist zusammenhängend*

Wir haben die stetige Abbildung $p : \mathbb{I} \ni t \mapsto (cos(2\pi \cdot t), sin(2\pi \cdot t)) \in S^1$. Sie ist setig und surjektiv. □

Satz 8.27. *Sei A eine zusammenhängende Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Außerdem seien $a, b \in A$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b)$. Dann gibt es ein $c \in A$ mit $f(c) = y$.*

$f(A)$ ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$. $U = f^{-1}(\{x|x < y\})$ und $V = f^{-1}(\{x|x > y\})$ sind beides offene Mengen in A, deren Durchschnitt leer ist. Da A zusammenhängend ist kann A nicht die disjunkte Vereinigung zweier offerner Mengen sein. Also gibt es ein $c \in A$, welches nicht in $U \bigcup V$ liegt. Daher ist $f(c) = y$. Dies war zu zeigen. □

Satz 8.28. *Sei $f : S^1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Wir betrachten die Funktion $g(x) = f(x) - f(-x)$. Ist g die Nullfunktion so ist man fertig. Denn dann gilt sogar für alle $x \in S^1$ $f(x) = f(-x)$. Andernfalls gibt es etwa ein x mit $g(x) > 0$. Dann ist $g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x) < 0$. Da S^1 zusammenhängend ist gibt es ei $y \in S^1$ mit $g(y) = 0$. Daher ist $f(y) = f(-y)$. Dise war zu zeigen. □

Satz 8.29. *1. Es gibt keine stetige injektive Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}$.*

2. Es gibt keine stetige injektive Abbildung von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

Zu 1.: Sei $f : \S^1 \to \mathbb{R}$ eine stetige injektive Abbildung. Dann gibt es ein $x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$. Da $x \neq 0$ ist ist $x \neq -x$. Also kann f nicht injektiv sein.
Zu 2.: Es ist A offen. Daher gibt es eine ganze Kreisscheibe $K(a, r)$, die ganz in A liegt. Daher gibt es eine stetige injektive Funktion $f : K(0, 1) \to A$. Gäbe es eine stetige injektive Funktion $g : A \to \mathbb{R}$, so gäbe es eine steige injektive Funktion $f : S^1 \to \mathbb{R}$. Dies geht nicht. □

Wir haben also:

Satz 8.30. *Keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist homöomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$*

8.3.4 Sierpinky Kurven

8.3.5 Peano Kurven

8.3.6 Fraktale Dimension

8.4 Stetige ebene Funktionen

8.4.1 Fixpunktsatz von Brouwer in zwei Dimensionen

Definition 126. Eine Funktion $f : [a, b] \to \{a, b\}$ mit $f(a) = a$ und $f(b) = b$ heisst Färbung des Intervalls nach den Ecken. da dies ein ziemliches Wortungetüm ist, nenne ich es (wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind) einfach Färbung.) f ist nichts anders als eine mengentheoretische Retraktion.

Wir wissen schon, dass es keine stetigen Färbungen geben kann. Dies ist aber auch anschaulisch klar. Denn wenn ich jedem Punkt eine Farbe zuordne, so müssen irgendwo die Farben schlagartig wechseln. Ist $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ eine Zerlegung des Intervalls, so heißt $\{x_i = a \cdot (1 - t_i) + b \cdot t_i | i = 0, \ldots, n\}$ Zerlegung der Strecke $[a, b]$. $[x_i, x_{i+1}]$ heisst $i$tes Teilintervall.

Definition 127. Ist f eine Färbung des Intervalls $[a, b]$ und $[x, y] \subset [a, b]$ so heißt $[x, y]$ komplett, wenn $f(x) \neq f(y)$ ist.

Satz 8.31. *Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ ein Retrakt. Jede Zerlegung der Strecke enthält eine ungerade Anzahl von kompletten Teilintervallen.*

Bemerkung: Dies gilt für jeden nicht geschlossenen Polygonzug.

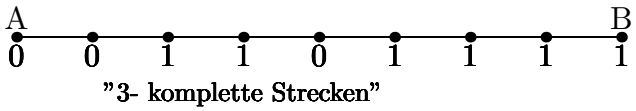


Abb. 8.3: komplette Strecken

Ist $|M| = 2$, so ist die Behauptung trivial. Die Behauptung stimme für $k \geq 2.$, wobei $|M| = k$ ist. In M fügt man einen zusätzlichen Punkt ein. Sei d der zusätzliche Punkt. Vor der Einfügung des Punktes d war die Anzahl der kompletten Strecken ungerade. d liegt zwischen zwei Punkten x und y. Es sei x der linke Nachbar und y der rechte Nachbar.

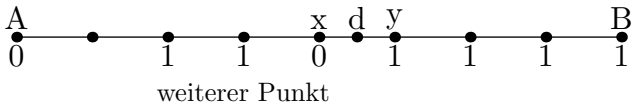


Abb. 8.4: Weiterer Punkt

1.Fall: $[x, y]$ ist kein komplettes Intervall. Ist dann $f(d) = f(x) = f(y)$, so kann kein komplettes Intervall hinzugekommen sein. Die Anzahl der kompletten Intervalle bleibt also ungerade. Ist $f(d) \neq f(x) = f(y)$, so kommen zwei komplette Intervalle hinzu. Die Anzahl der kompletten Intervalle bleibt also ungerade.

2.Fall: $[x, y]$ ist komplett. Dann verschwindet das komplette Intervall $[x, y]$. Ist $f(d) = f(x)$, so kommt das komplette Intervall $[d, y]$ hinzu. Andernfalls ist $f(y) = f(d)$. Dann ist das Intervall $[x, d]$ komplett. Damit bleibt die Anzahl der kompletten Intervalle konstant.

Die Zerlegung eines Dreiecks ist schwieriger zu definieren.

Definition 128. Sei $\triangle$ ein Dreieck. Die Familie der Dreiecke $(\triangle_i | i = 1, \ldots, n)$ zerlegt das Dreieck $\triangle$, wenn gilt:

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \triangle_i = \triangle$.
2. Zwei verschiedene Teildreiecke haben leeren Durchschnitt, einen Eckpunkt oder eine Seite gemeinsam.

Ist $f : \triangle = [a, b, c] \to \{a, b, c\}$ ein Retrakt der Seiten, so heißt ein Teildreieck $[x, y, z]$ komplett, wenn f eingeschränkt auf $\{x, y, z\}$ surjektiv ist.

Satz 8.32 (Das Lemma von Sperner). *Ist $f : \triangle = [a, b, c]$ ein Retrakt der Ecken, so enthält jede Zerlegung in Teildreiecke eine ungerade Anzahl von kompletten Dreiecken.*

Seien $\triangle_1, \ldots, \triangle_n$ die Teildreiecke. Zu jedem τ sei $\alpha(\tau)$ die Anzahl der Seiten σ von $\triangle_\tau$ mit $f(\sigma) = \{a, b\}$ Es gibt folgende Möglichkeiten:

1. $\triangle_\tau$ ist komplett. Dann ist $\alpha(\tau) = 1$.
2. $f(\triangle_\tau)$ enthält nicht alle $\{a, b\}$, etwa nur a. Dann ist $\alpha(\tau) = 0$.
3. $f(\triangle_\tau) = \{a, b\}$. Dann kommt eine der Ecken a oder b zweimal als Bild vor. Also ist $\alpha(\tau) = 2$.

Damit folgt κ =Anzahl der kompletten Dreiecke ist $\alpha(1) + \cdots + \alpha(t) \bmod 2$. Denn $\alpha(1) + \cdots + \alpha(t)$ ist wegen 1,2 und 3. kongruent der Anzahl der 1er in obiger Summe.
Wir betrachten nun die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{\sigma | \sigma \text{ ist Seite in der Zerlegung mit } f(\sigma) = \{a, b\}\}. \\ A_0 &= \{\sigma \in A | \sigma \subset [a, b]\}. \end{aligned}$$

Ist eine solche Seite nicht in A_0, so kann die Seite nicht auf dem Rand $[a, c]$ liegen, dann dann $f(\sigma) = \{a, b\}$ nicht gelten könnte. Genausowenig kann die Strecke auf dem Rand $[b, c]$ liegen. Also ist zumindestens ein Eckpunkt der Strecke ein innerer Punkt des $\triangle$. Also kommt die Strecke in genau zwei Dreiecken der Zerlegung vor. (Zwei Dreiecke auf der gleichen Seite von einer Seite $[x, y]$ haben mindestens einen innereen Punkt gemeinsam es kann sie also nicht geben) Die Seiten $\sigma \in A_0$ werden in der Summe nur einmal gezählt. Es folgt: $\alpha(1) + \cdots + \alpha(t) = 2 \cdot |A \setminus A_0| + |A_0| = |A_0| \bmod 2 = 1 \bmod 2$ wegen dem Satz 8.31. □

Satz 8.33. *Ist $g : \triangle[a, b, c] \to \{a, b, c\}$ eine Färbung des Dreiecks, so gibt es konvergente Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$, die alle den selben Grenzwert haben und für die gilt: $g(a_n) = a$, $g(b_n) = b$ und $g(c_n) = c$.*

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zerlegung des Dreiecks $Z_n = \{\triangle_i | i = 1, \ldots, k_n\}$, so dass die längste vorkommende Dreiecksseite $< \frac{1}{n}$ ist. In jeder dieser Zerlegungen gibt es ein komplettes Teildreieck $\triangle[a_n, b_n, c_n]$. Ohne

Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $g(a_n) = a$ und $g(b_n) = b$ und $g(c_n) = c$ gilt. Da das Dreieck $\triangle$ kompakt ist, hat die Folge (a_n) eine konvergente Teilfolge. Das heißt es gibt eine monoton wachsende Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $(a_{\alpha(n)})$ konvergent ist. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\alpha(n)} = z$. Es ist $|a_{\alpha(n)} - b_{\alpha(n)} < \frac{1}{\alpha(n)} \leq \frac{1}{n}$ für alle n. Da $(a_{\alpha(n)})$ konvergiert, konvergiert auch $(b_{\alpha(n)})$ und hat den gleichen Grenzwert. Genau dasselbe gilt von $(c_{\alpha(n)})$. $\square$

Satz 8.34. *Ist $g : \triangle \to \triangle$ eine Funktion ohne Fixpunkt, dann erhält man auf folgende Weise eine Färbung des Dreiecks. Ist $x = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma$ und $f(x) = a \cdot \alpha' + b \cdot \beta' + c \cdot \gamma'$, so sei*

$$g(x) = \begin{cases} a & \textit{falls } \alpha > \alpha' \\ b & \textit{falls } \alpha \leq \alpha' \textit{ und } \beta > \beta' \\ c & \textit{falls} \alpha \leq \alpha' \textit{ und } \beta \leq \beta' \end{cases} \tag{8.6}$$

Ist $\alpha \leq \alpha'$ und $\beta \leq \beta'$ und x kein Fixpunkt dann ist $\gamma = 1-\alpha-\beta \geq 1-\alpha'-\beta' = \gamma'$. Da x kein Fixpunkt ist folgt $\gamma > \gamma'$. Es ist $a = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0$. Es sei $f(a) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma$. Da $f(a) \in \triangle$ gilt, ist $\alpha + \beta + \gamma = 1$, und da $f(a) \neq a$ ist, ist auf jeden Fall eine der Zahlen β, γ größer 0. Das heißt $\alpha < 1$. Das heißt $f(a) = a$. Genauso folgt, dass $f(b) = b$ und $f(c) = c$ ist. Ist $x = a \cdot \alpha + b \cdot \beta$ mit $\alpha + \beta = 1$ ein Punkt der Strecke $[a, b]$ und $f(x) = a \cdot \alpha' + b\beta' + c\gamma'$. Da $\alpha + \beta = 1$, ist kann nicht zugleich $\alpha' \geq 0$ und $\beta' \geq 0$ gelten. Denn dann würde folgen $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ und $\gamma' = 0$. Das hieße x wäre Fixpunkt. Daher ist $\alpha > \alpha'$ oder $\beta > \beta'$. Also $g(x) = a$ oder $g(x) = b$. Sei $x \in [b, c]$ $x = b\beta + c\gamma$, $f(x) = a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$. Da x kein Fixpunkt kann nicht $\beta' \geq \beta$ und zugleich $\gamma' \geq \gamma$ sein. Also ist $\beta > \beta'$ oder $\gamma > \gamma'$. Daher ist $g(x) = b$ oder $g(x) = c$. Ist x ein Punkt der Strecke $[a, c]$ zeigt man die Behauptung genauso. $\square$

Satz 8.35 (Fixpunktsatz von Brouwer in der Dimension 2). *Sei $\triangle = [a, b, c]$ ein Dreieck und $f : \triangle \to \triangle$ eine stetige Funktion. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Angenommen f hat keinen Fixpunkt. Wir betrachten die Funktion $g : \triangle \to \{a, b, c\}$, die wie oben definiert ist. Dies ist eine Färbung des Dreiecks. Also gibt es eine Folge (a_n) mit $g(a_n) = a$ und (b_n) mit $g(b_n) = b$ und (c_n) mit $g(c_n) = c$,

die alle den gleichen Grenzwert z haben.

$$\begin{aligned} a_n &= a\alpha_{a,n} + b \cdot \alpha_{b,n} + c \cdot \alpha_{c,n} \\ f(a_n) &= a\alpha'_{a,n} + b \cdot \alpha'_{b,n} + c \cdot \alpha'_{c,n} \\ z &= a\alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma \\ f(z) &= a\alpha' + b \cdot \beta' + c \cdot \gamma' \end{aligned}$$

Da f stetig ist folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(z) = a \cdot \alpha' + b \cdot \beta' + c \cdot \gamma'$. Da $\alpha_{a,n} > \alpha'_{a,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{a,n} \geq \lim\limits_{n\to\infty} \alpha'_{a,n} = \alpha'$. Betrachten wir die Folge (b_n)

$$\begin{aligned} b_n &= a \cdot \beta_{a,n} + b \cdot \beta_{b,n} + c \cdot \beta_{c,n} \\ f(b_n) &= a \cdot \beta'_{a,n} + b \cdot \beta'_{b,n} + c \cdot \beta'_{c,n} \end{aligned}$$

Es ist nach Definition $\beta_{b,n} > \beta'_{b,n}$ für alle n Wieder folgt, da f stetig ist: $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(z)$. Es ist $\beta_{b,n} > \beta'_{b,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} = \beta \geq \beta'$.Genauso folgt $\gamma \geq \gamma'$. Daher ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$. Daher ist f ein Fixpunkt. □

Frage: Welche Vereinfachungen im Beweis ergeben sich, wenn man die Überlegungen auf das Standartdreieck mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschränkt?

Satz 8.36. *Es gibt keine stetige Funktion $f : K(0,1) \to S^1$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in S^1$.*

Angenommen es gebe eine Funktion $f : K(0,1) \to S^1$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in S^1$. Wir betrachten die Funktion $g : K(0,1) \ni x \mapsto -f(x) \in K(0,1)$. Die ist sicher stetig. Also lässt sie einen Punkt y fest. Es ist $g(y) = -f(y) = y$. Andererseits ist $f(y) \in S^1$ und daher auch $-f(y) \in S^1$. Das heißt $y \in S^1$. Dann ist nach Vorausetzung $f(y) = y$. Also ist $-y = y$. Das heißt $y = 0$. Dies widerspricht $y \in S^1$. □

8.4.2 Homotopie

Was bleibt erhalten, wenn man den Funktionsgraphen einer stetigen Funktion ein klein wenig ändern. Die genaue Definition des „ein klein wenig“ führt zu

dem Begriff der Homoptopie. Wir bezeichnen in Zukunft das Einheitsintervall $[0,1]$ mit $\mathbf{I}$.

Definition 129. X und Y seien topologische Räume. $f, g : X \to Y$ zwei stetige Funktionen. f heisst homotop zu g, wenn es eine stetige Funktion $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ gibt mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Sind f und g homotop zueinander, so schreiben wir: $f \simeq g$.

Ist $h_t(x) := H(x,t)$ definiert, dann liefert die Homotopie H eine Familie von stetigen Abbildungen, so dass f stetig in g umgeformt wird. Man kann an eine Veränderung in der Zeit t denken. Die Eigenschaft homotop zu sein hängt entscheidend von den topologischen Räumen X, Y ab.
Beispiele:

63. Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so sind sie homotop zueinander.

    Wir betrachten $H(x,t) := f(x) + (g(x) - f(x)) \cdot t$. Dann ist
    a) $H(x,0) = f(x)$ und
    b) $H(x,1) = g(x)$.

    Damit folgt die Behauptung. □

Satz 8.37 (Klebelemma). *Sei der topologische Raum X endliche Vereinigung abgeschlossener Untermengen. $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Gibt es für einen topologischen Raum Y stetige Funktionen $f_i : X_i \to Y$, die sich überlappen, das heisst $f_i/X_i \cup X_j = f_j/X_i \cup X_j$ für alle Paare (i,j), so gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f : X \to Y$ mit $f/X_i = f_i$ für alle i.*

Es ist offensichtlich $f : X \to Y$ mit $f(x) = f_i(x)$ für $x \in X_i$ eine wohldefinierte Funktion, die alle f_i fortsetzt. Sei C eine abgeschlossene Teilmenge von Y. $f^{-1}(C) = X \cap f^{-1}(C) = (\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \cap f^{-1}(C) = \bigcup(X_i \cap f^{-1}(C)) = \bigcup(X_i \cap f_i^{-1}(C)) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(C)$.
Da alle f_i stetig sind, sind die f_i^{-1} abgeschlossen in X_i. Die X_i sind aber abgeschlossen in X. Damit ist $f_i^{-1}(C)$ abgeschlossen in X. Also ist $\bigcup_{i=1}^{n} f_i(C)$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen. □

Satz 8.38. *Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $X \to Y$.*

Reflexivität: Ist $f : X \to Y$ eine stetige Funktion, so ist $F(x,t) = f(x)$ für alle $x \in X$ sicher eine Homotopie, die das Gewünschte leistet.
Symmetrie: Sei $f \simeq g$. Also gibt es eine stetige Funktion $H : X \times \mathbf{I} \to \mathbf{Y}$ mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$. Wir definieren $G(x,t) := H(x,1-t)$. Dann ist $G(x,0) = H(x,1) = g(x)$ und $G(x,1) = H(x,0) = f(x)$. Das heißt $g \simeq f$.
Transitivität: Sei $f \simeq g$ und $g \simeq h$. Wir erklären: $H : X \times \mathbf{I} \to Y$ durch

$$H(x,t) : \quad = \quad \begin{cases} F(x,2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{8.7}$$

Dabei sind G und F die entsprechenden Homotopien. Es ist $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$. Damit folgt die Behauptung. □

Definition 130. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Funktion,
$[f] := \{g : X \to Y | \text{g stetig und } g \simeq f\}$ heißt Homotopieklasse von f. Die Menge aller Homotopieklassen wird mit $[X,Y]$ bezeichnet.

Beispiele:

64. Die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat nur eine Homotopieklasse. Sind $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, so hat man in $F(\vec{x},t) = f(\vec{x}) + (g(\vec{x}) - f(\vec{x})) \cdot t$ eine Homotopie zwischen den beiden Funktionen.

Satz 8.39. *Seien $f_1, f_2 : X \to Y$ und $g_1, g_2 : Y \to Z$ stetige Funktionen zwischen topologischen Räumen. Und es sei $f_1 \simeq f_2$ und $g_1 \simeq g_2$. Dann ist $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. Das heißt $[g_1 \circ f_1] = [g_2 \circ f_2]$.*

Sei F die Homotopie zwischen f_1 und f_2 und G die Homotopie zwischen g_1 und g_2. Wir zeigen zunächst $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_1$. Dazu definieren wir durch

$$H : X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \quad \mapsto \quad H(x,t) := G(f_1(x),t) \in Z \tag{8.8}$$

H ist stetig und außerdem ist
$H(x,0) = G(f_1(x),0) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$ für alle $x \in X$.
Außrdem ist $H(x,1) = G(f_1(x),1) = g_2(f_1(x)) = (g_2 \circ f_1)(x)$ für alle $x \in X$.
Damit ist $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_1$.
Weiterhin zeigen wir: $g_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. Dazu erklären wir nun eine Homotopie

$$H : X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \quad \mapsto \quad g_2(F(x,t)) \in Z \tag{8.9}$$

$H(x,0) = g_2(F(x,0)) = g_2 f_1(x)$ für alle $x \in X$ und
$H(x,1) = g_2(F(x,1)) = g_2 f_2(x))$ für alle $x \in X$.
Damit ist wegen der Transitivität $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. □

8.4.3 Abbildungsgrad

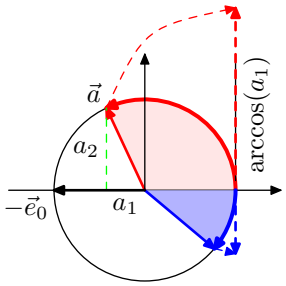


Abb. 8.5: Abrollen

Wir sellen uns vor ein dünner Faden sei auf den Einheitskreis aufgewickelt. Wir schneiden ihn an der Stelle $-\vec{e}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf ziehen ihn straff und legen ihn auf die Parallele zur y-Achse durch $\vec{e}_0$. Der Teil des Fadens, der in der oberen Halbebene lag kommt nach oben. Der andere Teil nach kommt auf den Teil der Parallenen zu liegen, der positive y Koordinaten hat. Der Punkt des Fadens, der vorher auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lag, liegt jetzt auf $\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$. Jedem Punkt des Einheitskreises $\vec{a}$ ist so genau eine reelle Zahl aus $]-\pi, \pi]$ zugeordnet. Diese Vorstellung klären wir analytisch. Es sei

$$\mathbf{S}^1 := \{\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ und } ||\vec{x}|| = 1\}$$
$$p :]-\pi, \pi] \ni \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^1$$

$\mathbf{S}^1$ ist der Einheitskreis.

Satz 8.40. *Die Funktion p ist bijektiv und stetig. Die Umkehrfunktion ist*
$b : \mathbf{S}^1 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \arccos(x) \text{ falls } y \geq 0 \\ -\arccos(x) \text{ falls } y < 0 \end{cases} \in]-\pi, \pi].$

Ich zeige zuerst $(b \circ p) = Id$. Sei $\varphi \in]-\pi, 0[$. Dann ist $\sin(\varphi) < 0$ und daher $b(p(\varphi)) = -\arccos(\cos(\varphi)) = -\arccos(\cos(-\varphi)) = \varphi$. Ist $\varphi \in [0, \pi]$, so ist $b \circ p(\varphi) = \arccos(\cos(\varphi)) = \varphi$. Daher ist $b \circ p$ die Identität.

Nun zur umgekehrten Verkettung: Sei daher $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^1$. Ich überlege zuerst den Fall, dass $y \geq 0$ ist. Dann ist $b\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \arccos(x) = \varphi$ Da $\varphi \in [0, \pi]$ ist, ist auch $\sin(\varphi) \geq 0$. Außerdem ist $x^2 + y^2 = 1 = x^2 + (\sin(\varphi))^2$. Daher ist $y = \sin(\varphi)$. Also ist in der oberen Halbebene $p \circ b$ die Identität. Sei nun $y < 0$. Dann ist $\varphi := -\arccos(x) \leq 0$. Also ist $\sin(\varphi) \leq 0$.
Wir erhalten: $\cos(\varphi) = \cos(-\arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x$. Da $\sin(\varphi) \leq 0$ und $x^2 + y^2 = \cos^2(\varphi) + y^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ ist, folgt $\sin(\varphi) = y$. Also ist $p \circ b$ die Identität auf $\mathbf{S}^1$. Es ist also b die Umkehrfunktion von p. Außerdem ist p stetig. □

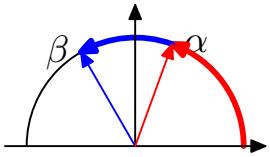


Abb. 8.6: $\alpha + \beta$

Bemerkung. *Seien $\alpha, \beta \in]-\pi, \pi]$. Dann ist*

$$arg(p(\alpha+\beta)) = \begin{cases} \alpha+\beta+2\pi \ \textit{wenn} \ \alpha+\beta \leq -\pi \\ \alpha+\beta \ \textit{wenn} \ \alpha+\beta \in]-\pi,\pi] \\ \alpha+\beta-2\pi \ \textit{wenn} \ \alpha+\beta > \pi \end{cases}$$

Ist $\alpha + \beta \leq \pi$, dann ist die Behauptung klar, wegen dem Satz vorher. Ist $\alpha + \beta > \pi$, so hat man $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ und daher $-\pi < \alpha + \beta - 2\pi < 0$. Wir erhalten daher: $b(p(\alpha + \beta)) = b(p(\alpha + \beta - 2\pi)) = \alpha + \beta - 2\pi$ □

Nun ist es auch klar, was unter dem Winkel eines Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ gegenüber der x–Achse zu verstehen ist:

Definition 131. $arg(\vec{a}) = b(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a})$.

Definition 132. Wir können auf $]-\pi, \pi]$ eine Addition von orientierten Winkeln erklären. und zwar: $\alpha \oplus \beta := \begin{cases} \alpha+\beta+2\pi \text{ wenn } \alpha+\beta \leq -\pi \\ \alpha+\beta \text{ wenn } \alpha+\beta \in]-\pi,\pi] \\ \alpha+\beta-2\pi \text{ wenn } \alpha+\beta > \pi. \end{cases}$
Das ist einfach die Addition in $\mathbb{R}/(2\pi)\mathbb{Z}$. Wir schreiben auch $\alpha + \beta \bmod 2\pi$

Auf diese Weise wird das Intervall $]-\pi, \pi]$ zu einer kommutativen Gruppe.

Bemerkung. *Ist $\vec{a} \in \mathbf{S}^1$, so gilt: $b(-\vec{a}) = b(\vec{a}) \oplus \pi$. Das heißt (wie zu erwarten ist) man muss $\vec{a}$ um π drehen um $-\vec{a}$ zu erhalten.*

1. Fall: Von $\vec{a}$ ist die zweite Koordinate $a_2 > 0$. Dann ist $-a_2 < 0$. Wir erhalten: $b(-\vec{a}) = -\arccos(-a_1) = -(\pi - \arccos(a_1)) = arccos(a_1) - \pi = b(\vec{a}) \oplus \pi$ (da $\arccos(a_1) + \pi > pi$).
2.Fall: Von $\vec{a}$ ist die zweite Koordinate $a_2 \leq 0$. Dann ist $-a_2 \geq 0$. Wir erhalten: $b(-\vec{a}) = \arccos(-a_1) = \pi - \arccos(a_1)$ und $b(\vec{a}) = -\arccos(a_1)$. Also ist wieder $b(-\vec{a}) = b(\vec{a}) \oplus \pi$. □

Nun können wir erklären was der orientierte Winkel zwischen zwei Vektoren ist.

Definition 133. Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) := arg(\vec{b}) - arg(\vec{a}) \bmod 2\pi$. Hier eine Zeichnung machen

Es folgen die aus der Elementargeometrie bekannten Sätze. Alle Keiner der vorkommenden Vektoren ist der Nullvektor.

Satz 8.41. *1. Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})$.*

2. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \sphericalangle(\vec{b}, -\vec{a}) = \pi$. Nachbarwinkel ergänzen sich zu π. (180^0)

3. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(-\vec{a}, -\vec{b})$. Scheitelwinkel sind gleich groß.

4. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) + \sphericalangle(\vec{b} - \vec{a}, -\vec{a}) + \sphericalangle(-\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \pi$. Die Summe der Innenwinkel im Dreieck ist 180^0.

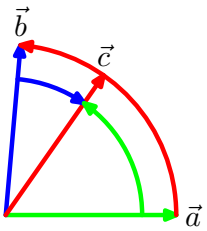


Abb. 8.7: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c})$

Zu 1.: Es ist $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = arg(\vec{b}) \ominus arg(\vec{a}) \oplus arg(\vec{c}) \ominus arg(\vec{b}) = arg(\vec{c}) \ominus arg(\vec{a})$.
Zu 2.: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \sphericalangle(\vec{b}, -\vec{a}) = (arg(\vec{b}) \ominus arg(\vec{a})) \oplus (arg(-\vec{a}) \ominus arg(\vec{b})) = arg(\vec{b}) \ominus (\vec{a}) = arg(\vec{a}) \ominus (arg(\vec{a}) \oplus \pi) \bmod 2\pi$.
Zu 3.: Es ist $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \sphericalangle(\vec{b}, -\vec{a}) = \pi$ und $\sphericalangle(\vec{b}, -\vec{a}) \oplus \sphericalangle(-\vec{a}, -\vec{b}) = \pi$. Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt die Behauptung. Zu 4.:

$$\begin{aligned} & \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) + \sphericalangle(\vec{b} - \vec{a}, \vec{a}) + \sphericalangle(-\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) \\ = \; & \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) + \sphericalangle(\vec{b}, \vec{b} - \vec{a}) + \sphericalangle(\vec{b} - \vec{a}, -\vec{a}) \text{ (Scheitelwinkel)} \\ = \; & \sphericalangle(\vec{a}, -\vec{a}) = \pi \end{aligned}$$

Definition 134. Sind $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ Vektoren, so heißt die geordnete Liste $[\vec{a}_0, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ Polygon. Dabei kommt es sehr auf die Reihenfolge der Punkte an. Ist dabei $\vec{a_0} = \vec{a}_n$, so heißt das Polygon geschlossen.

Beispiele:

65. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Punkte, so ist $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$ ein geschlossenes Polygon.

Satz 8.42. *Ist $[\vec{a}_0, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ ein geschlossenes Polygon, so gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sphericalangle(\vec{a}_i, \vec{a}_{i-1}) = 2 \cdot k \cdot \pi \tag{8.10}$$

$$\tag{8.11}$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Wir haben $\sum\limits_{i=1}^{n} \sphericalangle(\vec{a}_i, \vec{a}_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (arg(\vec{a}_i) - arg(\vec{a}_{i-1})) = 0 \bmod 2\pi$. Das heißt es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Summe gleich $2k\pi$ ist. □

Definition 135. Das k aus dem Satz heißt Umlaufzahl des Polygons.

Satz 8.43. *Die Umkehrfunktion von p, die Bogenfunktion b ist überall stetig außer an der Stelle $-\vec{e}_0$.*

Sei dazu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^1$ gegeben.

1. Fall: $y_0 > 0$. Ist $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ eine Folge aus $\mathbf{S}^1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt:$y_n > 0$. Man erhält: $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} arccos(x_n) = \arccos(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \arccos(x_0) = f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right)$.
Das heißt f ist an der Stelle $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ stetig.
Genauso überlegt man sich den Fall, dass $y_0 < 0$ ist. Sei nun $y_0 = 0$ also $x_0 = 1$ oder $x_0 = -1$. Ist $x_0 = 1$ und $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Nun gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \arccos(x_n) = \arccos(1) = 0$. Und $\lim n \to \infty \arccos(-x_n) - \pi = \arccos(-1) - \pi = 0$. Also ist f stetig an der Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. An der Stelle $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist f unstetig. □

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreier Vektoren in $\mathbb{R}^2$ in allgemeiner Lage. Ich will darunter verstehen, dass je zwei der Vektoren linear unabhängig sind. Zu jedem $\vec{p}$ in $\mathbb{R}^2$ gibt es daher $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\vec{p} = \vec{a} \cdot \alpha + \vec{b} \cdot \beta + \vec{c} \cdot \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Satz 8.44. *Es sei* $\vec{0} = \vec{a} \cdot \alpha + \vec{b} \cdot \beta + \vec{c} \cdot \gamma$ *und die drei Vektoren* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *seien in allgemeiner Lage. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $d(\vec{a}, \vec{b}), d(\vec{b}, \vec{c})$ *und* $d(\vec{c}, \vec{a})$ *haben gleiches Vorzeichen.*
2. *Es sind* $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Es ist $\vec{0} = \vec{a} \cdot \alpha + \vec{b} \cdot \beta + \vec{c} \cdot \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Dann ist $0 = d(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \beta + d(\vec{a}, \vec{c}) \cdot \gamma$. Das heißt: $d(\vec{c}, \vec{a}) \cdot \gamma = d(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \beta$. Da $\vec{a}, \vec{c}$ und $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig sind und $d(\vec{c}, \vec{a}), d(\vec{a}, \vec{b})$ gleiches Vorzeichen haben, haben auch γ und β gleiches Vorzeichen. Außerdem ist: $0 = d(\vec{b}, \vec{a}) \cdot \alpha + d(\vec{b}, \vec{c}) \cdot \gamma$. Daher ist $d(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \alpha = d(\vec{b}, \vec{c}) \cdot \gamma$. Auc α und γ müssen daher gleiches Vorzeichen haben. Keine der Zahlen kann nach Vorausetzung 0 sein. Da außerdem $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ist, sind alle diese drei Zahlen größer 0.
2. $\Longrightarrow$1. Es sei $\vec{0} = \vec{a} \cdot \alpha + \vec{b} \cdot \beta + \vec{c} \cdot \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma > 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Es ist $d(\vec{c}, \vec{a}) \cdot \gamma = d(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \beta$. Da $\gamma, \beta > 0$ sind müssen $d(\vec{c}, \vec{a})$ und $d(\vec{a}, \vec{b})$ gleiches Vorzeichen haben. Entsprechend haben auch $d(\vec{a}, \vec{b})$ und $d(\vec{b}, \vec{c})$ gleiches Vorzeichen. □

Diesen Satz kann man folgendermaßen anschaulisch deuten: Geht man von $\vec{a}$ über $\vec{b}$ nach $\vec{c}$ und zurück nach $\vec{a}$ und erscheint der Nullpunkt stets auf der selben Seite, so liegt er im Dreieck.

Satz 8.45. *Es ist* $\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$.

Ich zeige dies zunächst für den Fall, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein gewisses positives a ist. Dann ist $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = a \cdot b_2$ mit $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$ ergibt sich $b_2 = |a| \cdot \sin(\varphi)$. Man hat dann ist $\det(\vec{a}, \vec{b}) = |a| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$. Liegt $\vec{a}$ nicht auf der positiven $x - -$ Achse, so kann man die Geschichte derart drehen, dass es der Fall ist. Dadurch ändert sich die Determinante nicht. Hierher gehört eine Zeichnung. □

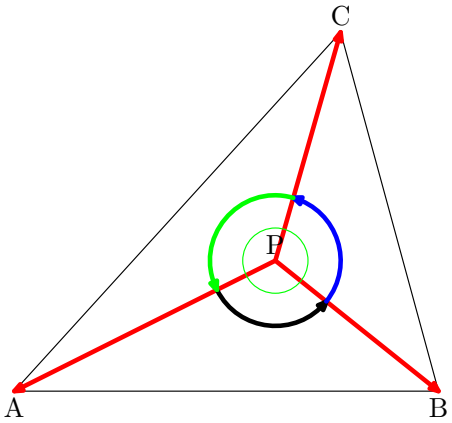


Abb. 8.8: Punkt im Innern: $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA = 2\pi$

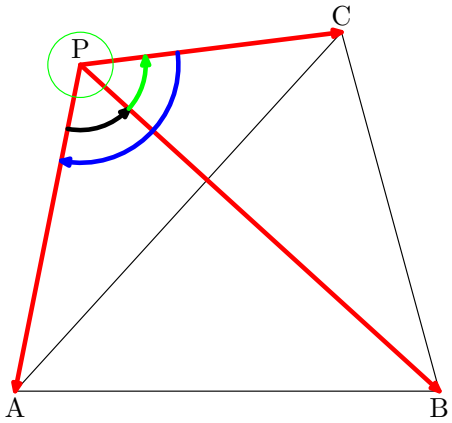


Abb. 8.9: Punkt im Äußern $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA = 0$

Satz 8.46. *Ist $D(\alpha), \alpha \in]-\pi, \pi[$ eine Drehung um den Nullpunkt um den Winkel α, uns ist $\vec{x} \in \mathbf{S}^1$ so ist $arg(D(\alpha)(\vec{x})) = \alpha \oplus arg(\vec{x})$. Dabei ist die Addition $\oplus$ die Addition modulo 2π in $]-\pi, \pi]$*

Es ist $\alpha \in]-\pi, \pi]$ sei Es sei $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ die zu α gehörende Drehmatrix. Außerdem sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^1$. Wir erhalten:

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

nach dem Additionstheorem. Daher folgt

$$arg(D(\alpha)(\vec{x})) = arg \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \alpha \oplus \beta.$$

Folgerung 8.47. *Die Abbildung $\mathbf{S}^1 \ni x \mapsto arg(\vec{x}) \ominus arg(\vec{c}) \in]-\pi, \pi]$ ist für alle $\vec{x} \in \mathbf{S}^1$ stetig außer für $\vec{x} = -\vec{c}$.*

Die Drehung ist stetig und arg außer an der Stelle $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Also ist die Verkettung der beiden Abbildungen nur für $D(\alpha)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ unstetig. Dann ist aber $\vec{x} = -\vec{c}$. □

Satz 8.48. *Sei $Z = \{0 = t_0 < \cdots < t_n\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $t_{i-1} < \tau < t_i$ ein weiterer Teilpunkt. $Z_1 = Z \cup \{\tau\}$ die Verfeinerung von Z wenn man τ hinzunimmt. Liegt $\vec{0}$ ausßerhalb des Dreiecks $[\varphi(t_{i-1}), \varphi(\tau), \varphi(t_i)]$ so ist $W(\varphi, Z) = W(\varphi, Z_1)$.*

Wir haben:

$$\begin{aligned} W(\varphi, Z) = &\sphericalangle(\varphi(t_0), \varphi(t_1)) + \dots \\ &+ \sphericalangle(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)) + \dots \\ &+ \sphericalangle(\varphi(t_{n-1}), \varphi(t_n)) \end{aligned}$$

Es liegt $\vec{0}$ außerhalb des Dreiecks $[\varphi(t_{i-1}), \varphi(\tau), \varphi(t_i)$. Daher ist (Hierr eine Zeichnung) $\sphericalangle(\varphi(t_{i-1}), \varphi(\tau)) + \sphericalangle(\varphi(\tau), \varphi(t_i)) = \sphericalangle(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i))$. Die Winkelsumme ändert sich also nicht, wenn man bei der Zerlegung noch den Teilpunkt τ hinzufügt. □

Satz 8.49. *Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ stetig. Dann gibt es eine Zerlegung Z von $[0,1]$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z, so ist $W(\varphi, Z) = W(\varphi, Z^*)$.*

Sei $d = \inf\{|\varphi(t)| | t \in [0,1]\}$. Da φ gleichmäßig stetig ist, ist $d > 0$. Sei $\epsilon = d/2$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle t, t' mit $|t - t'| < \delta$ folgt, dass $|\varphi(t) - \varphi(t')| < \epsilon$ ist. Wir wählen eine Zerlegung von $[0,1]$ dessen größtes Teilintervall höchstens die Länge δ hat. $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_{i-1} < t_i < \dots 1$. Sei τ ein weiterer Teilpunkt etwa aus dem $i$ten Teilintervall. $t_{i-1} < \tau < t_i$. Dann ist $|\tau - t_{i-1}| < \delta$ und $|t_i - \tau| < \delta$. Also sind alle Dreiecksseiten von $[\varphi_{i-1}, \varphi(\tau), \varphi(t_{i+1})] < \epsilon$. Also haben alle inneren Punkte des Dreiecks von dem Eckpunkt des Dreiecks, der am nächsten zu $\vec{0}$ liegt einen Abstand $< \epsilon = d/2$. Der Nullpunkt ist aber mindestens 2ϵ von jedem Eckpunkt entfernt. Aso kann $\vec{0}$ kein innerer Punkt sein. Betrachtet man nun $Z^* = Z \cup \{\tau\}$ so ist nach dem Satz 8.48 $W(\varphi, Z) = W(\varphi, Z^*)$. Durch Induktion folgt nun: Ist Z' eine Verfeinerung von Z, so ist $W(\varphi, Z) = W(\varphi, Z')$. □

Definition 136. Sei Z wie im Satz vorher gewählt. Die Zahl $W(\varphi, Z)$ bezeichne ich mit $W(\phi)$. Sie hängt nicht von der Wahl von Z ab.

Sei Z_1 eine wetere Zerlegung des Intervalls $[0,1]$. Außerdem sei Z^* die gemeinsame Verfeinerung von Z und Z_1. Dann ist $W(\varphi) = WS(\varphi, Z) = WS(\varphi, Z^*) = W(\varphi, Z_1)$.

Satz 8.50. *Wir betrachten die Menge der Parameterdarstellungen mit gleichem Anfangs und Endpunkt. Ist $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ gegeben. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ mit den gleichen Endpunkten gilt: Ist $||\varphi - \tau|| < \epsilon$, so ist $W(\varphi) = W(\tau)$. (W ist lockal konstant.)*

Man müsste dies so formulieren: W ist eine stetige Funktion von der Menge der Parameterdarstellungen in die Menge $\mathbb{R}$

Sei $\epsilon = d/4$, $d = \inf\{|\varphi(t)| t \in [0,1]\}$. Es gibt eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$, so dass der Nullpunkt außerhalb eines jeden Dreiecks $[\tau(t_k), \varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$ und $[\tau(t_k), \tau(t_{k+1}), \varphi(t_{k+1})]$ liegt. Dann gilt für alle k:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\tau(t_k), \varphi(t_k)) + \sphericalangle(\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})) &= \sphericalangle(\tau(t_k), \varphi(t_{k+1})) \\ &= \sphericalangle(\tau(t_k), \tau(t_{k+1})) + \sphericalangle(\tau(t_{k+1}), \varphi(t_{k+1})).\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}W(\varphi) &= \sphericalangle(\tau(t_0, \varphi(t_0))) + \sphericalangle(\varphi(t_0), \varphi(t_1)) + \dots \\ &= \sphericalangle(\tau(t_0), \tau(t_1)) + \sphericalangle(\tau(t_1), \varphi(t_1)) + \dots \\ &= \vdots \\ &= \sphericalangle(\tau(t_0), \tau(t_1)) + \dots \\ &= W(\tau)\end{aligned}$$

Zwei Parameterdarstellungen $\varphi, \tau : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ heißen homotop, wenn we eine stetige Abbildung $H[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ gibt mit $H(0,t) = \varphi(t)$ und $H(1,t) = \tau(t)$ für alle $t \in [0,1]$.

Satz 8.51. *Seien $\varphi, \tau : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ zwei Kurven, die homotop sind, Dann haben sie gleiche Umlaufzahl.*

Es gibt eine stetige Funktion $H : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ mit $H(0,t) = \varphi(t)$ und $H(1,t) = \tau(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Für jedes x ist $\alpha(x) : [0,1] \ni t \mapsto H(x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ eine stetige Parameterdarstellung. Ich betrachte

$$U = \{x | W(\alpha(y)) = W(\varphi) = \text{ für alle } y \leq x\}$$

Es ist $0 \in U$, denn $W(\alpha(0)) = W(\varphi)$. Die beschränkte Menge U hat ein Supremeum s.
Beh.: Es ist $s = 1$ und $W(\alpha(s)) = W(\varphi)$.

Beweis: Angenommen $s < 1$. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle β mit $||\alpha(s) - \beta|| < \epsilon$ gilt: $W(\beta) = W(\alpha(s))$. Zu diesem ϵ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in [0,1]$ mit $|y - s| < \delta$ gilt: $|H(s,t) - Hy,t| < \epsilon$ für alle $t \in [0,1]$. Das heißt $||\alpha(s) - \alpha(y)|| < \epsilon$ für $|y - s| < \delta$ und daher ist $W(\alpha(s)) = W(\alpha(y))$. Wäre nun $W(\alpha(s)) \neq W(\varphi)$, so würde dies für alle y aus der $\delta-$ Umgebung von s gelten und s wäre nicht Supremum von U. Wäre andererseits $s < 1$, so gäbe es in der $\delta-$ Umgebung von s Zahlen $y > s$ mit $W(\alpha(y)) = W(\varphi)$. Dies widerspricht wieder der Wahl von s als Supremum von U. □

Satz 8.52. *Es gibt keine stetige Abbildung $f : D^2 \to S^1$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in S^1$.*

Angenommen $f : D^2 \to S^1$ sei stetig und $f(x) = x$ für alle $x \in S^1$. Es sei $\vec{a} = f(\vec{0}) \in S^1$. Dann ist $f(\vec{a}) = \vec{a}$. Sei $\alpha : [0,1] \ni t \mapsto \vec{a}\S^1$. α ist eine stetige Parameterdarstellung mit $W(\alpha) = 0$. Andererseits ist

$$\varphi : [0,1 \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$$

auch eine stetige Parameterdarstllung. Es ist $W(\varphi) = 1$. Wir betrachten die Abbildung:

$$H : [0,1] \times [0,1] \ni (s,t) \mapsto f(s \cdot \varphi(t)) \in S^1. \tag{8.12}$$

H ist stetig in s und t. Wir haben $H(0,t) = f(0\varphi(t)) = f(\vec{0}) = \vec{a}$ und $H(1,t) = f(1 \cdot \varphi(t)) = \varphi(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Das heißt H ist eine Homotopie zwischen den beiden Parameterdarstellungen α und φ. Es ist aber $W(\alpha) = 0$ und $W(\varphi) = 1$. Dies widerspicht Satz

Satz 8.53. *Es sei $||\vec{a}|| < 1$ und $\vec{b} \neq \vec{a}$ beliebig: Dann gibt es auf der Seite von $\vec{b}$ genau einen Schnittpunkt der Einheitskugel mit der Geraden durch $\vec{a}$,$\vec{b}$*

Wir müssen ein λ finden $\lambda > 0$, mit $||\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})\lambda|| = 1$. Ich schreibe zur Abkürzung $(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{c}$. $(\vec{a} + \vec{c}\lambda) \circ (\vec{a} + \vec{c}\lambda) = 1$. Das heißt es ist $||\vec{a}||^2 + 2\vec{a} \circ \vec{c}\lambda + ||\vec{c}||^2\lambda^2 = 1$. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung muss positiv sein. $D = 4|\vec{a} \circ \vec{c}|^2 - 4||\vec{c}||^2(1 - ||\vec{a}||)^2)$. Es ist $||\vec{a}||^2 < 1$ also ist $D > 4|\vec{a} \circ \vec{c}$. Wir erhalten:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\vec{a} \circ \vec{c} \pm \sqrt{D}}{2||\vec{c}||^2} \tag{8.13}$$

Es ist $\lambda_1 > 0$. Alsdo folgt die Behauptung. □

Folgerung 8.54. *Sind $\vec{a}, \vec{b}$ stetige Funktionen von $\vec{x}$, so ist auch λ eine stetige Funktion von $\vec{x}$*

Satz 8.55 (Fixpunktsatz). *Ist f eine stetige Funktion der Kreisscheibe in sich, so hat f einen Fixpunkt.*

Agenommen die Funktion $f : D^2 \to D^2$[1] hat keinen Fixpunkt. Dann ist für alle $\vec{a} \in D^2$: $f(\vec{a}) \neq \vec{a}$. Die Halbgreade $[f(\vec{a}), \vec{a}$ hat also mit S^1 genau einen Schnittpunkt $s(\vec{a})$. Ist $\vec{a} \in S^1$, so ist $s(\vec{a}) = \vec{a}$. Die Funktion s ist stetig. Dies widerspricht dem Satz 8.52. Daher folgt die Behauptung.

8.4.4 Satz von Borsuk Ulam

Bemerkung. *Sei $p : [0,1] \ni t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Ist $p(\alpha) = -p(\beta)$, so ist $\beta = \alpha + \frac{1}{2} + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$*

Es sei $p(\alpha) = p(\beta)$. Also ist:

$$\begin{aligned} (cos(\alpha), sin(\alpha)) &= (-cos(\beta), -sin(\beta)) \text{ und daher} \\ \cos(\alpha) &= -\cos(\beta) \\ \sin(\alpha) &= -\sin(\beta) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \beta &= (2n+1) \cdot \pi - \alpha && \text{oder } (2n+1)\pi + \alpha \\ \beta &= 2n\pi - \alpha && \text{oder } (2n+1)\pi + \alpha \end{aligned}$$

Es bleibt nur $\beta = (2n+1)\pi + \alpha$ übrig. Wenden wir das auf p an, so erhalten wir

$$(cos(2\pi\alpha), sin(2\pi\alpha)) = (-cos(2\pi\beta), -sin(2\pi\beta))$$

also $2\pi\beta = 2(n+1)\pi + 2\pi\alpha$. Das heißt $\beta = \alpha + \frac{1}{2} + (n+1)$. □

Satz 8.56. *Sei $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ eine stetige Funktion mit $f(-z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbf{S}^1$. Dann ist die Umlaufzahl von $f \circ p : [0,1] \to \mathbf{S}^1$ ungerade.*

[1] D^2 ist die Kreisschiebe vom Radius 1 um den Nullpunkt

Ich bezeichne wie bisher $p(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$; $p : [0,1] \to S^1$. Es gibt eine stetige Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(p(t)) = p(\varphi(t))$ Es ist $-f(p(t)) = -p(\varphi(t)) = f(-p(t))$. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} p(t+1/2) &= (cos(2\pi(t+1/2)), sin(2\pi(t+t/2))) \\ &= (cos(2\pi t+\pi), sin(2\pi t+\pi)) \\ &= (-cos(2\pi t), -sin(2\pi t)) = -p(t). \text{ Also erhält man} \\ f(-p(t)) &= f(p(t+1/2)) = p(\varphi(t+1/2)) = -p(\varphi(t)) = -f(p(t)). \end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\varphi(t+\frac{1}{2}) = \varphi(t) + \frac{1}{2} + k(t) \text{ mit } k(t) \in \mathbb{Z}.$$

Da φ stetig ist, ist $k(t)$ eine Konstante. Wir erhalten für die Umlaufzahl:

$$\begin{aligned} \varphi(1) - \varphi(0) &= (\varphi(1) - \varphi(\frac{1}{2})) + (\varphi(\frac{1}{2}) - \varphi(0)) \\ &= (\varphi(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k - \varphi(\frac{1}{2})) + (\varphi(0) + \frac{1}{2} + k - \varphi(0)) \\ &= (\frac{1}{2} + k) + (\frac{1}{2} + k) = 2k + 1. \end{aligned}$$

Dies ist eine ungerade Zahl. □

Satz 8.57. *Sei $g : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ eine stetige Funktion. Dann hat $h : g|\mathbf{S}^1$ die Umlaufzahl* 0.

Sei $H(s,z) = g(s \cdot z)$. Die Abbildung $H(0,z) = g(0 \cdot z) = g(0)$ is eine Konstante. Der Abbildungsgrad ist daher 0 oder anders ausgedrückt $g_0 \circ p$ hat die Umlaufzahl 0. Also hat auch $H(1,z) = g(z)$ die Umlaufzahl 0. Daher folgt die Behauptung. □

Satz 8.58 (Borsuk–Ulam). *Sei $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbf{S}^2$. Dann hat f eine Nullstelle.*

Falls g keine Nullstelle hat, erhalten wir durch

$$f : \mathbf{S}^2 \ni x \mapsto \frac{g(x)}{||g(x)||} \in \mathbf{S}^1 \tag{8.14}$$

eine stetige Abbildung mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbf{S}^2$. Wir zeigen, dass eine solche Abbildung nicht existieren kann. Sei $q : \mathbf{D}^2 \ni y \mapsto (y, \sqrt{1 - ||y||^2}) \in \mathbf{S}^2$.

Dann ist q stetig, also auch $f \circ q : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^1$. Ist $\iota : \mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{D}^2$ die Inklusionsabbildung, so ist $h = f \circ q \circ \iota$ stetig. $h : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$. Da h die Einschränkung einer stetigen Abbildung von $\mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ ist, ist die Umlaufzahl von h gleich 0. Andererseits ist für $z \in \mathbf{S}^1$ $\sqrt{1 - ||z||^2} = 0$ und $h(-z) = f(-z, 0) = -f(z, 0) = -h(z)$. Also ist der Grad von h ungerade. Dies wiederspricht sich. □

Folgerung 8.59. *Sei $h : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es ein $x \in \mathbf{S}^2$ mit $h(-x) = h(x)$.*

Sei $g(x) = h(x) - h(-x)$. Dann ist $g(-x) = h(-x) - h(x) = -g(x)$. Daher hat g eine Nullstelle x. $0 = g(x) = h(x) - h(-x)$. Daher ist $h(x) = h(-x)$. □

Folgerung 8.60. *Es gibt keine stetige Injektion $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

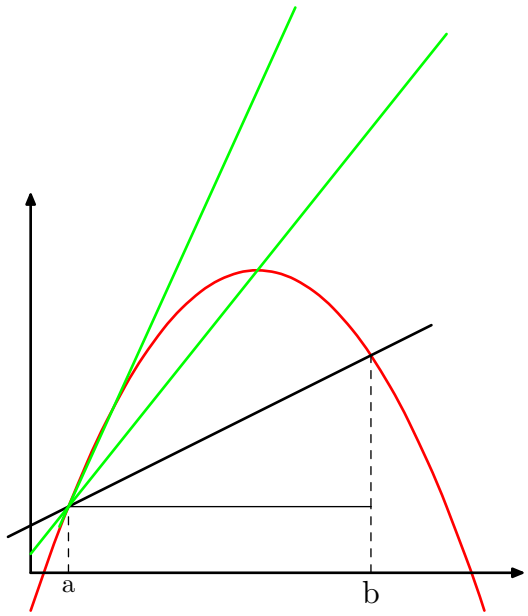
8.5 Topologie des Raumes

9 Differentialrechnung

9.1 Ableitung einer Funktion

9.1.1 Definition und Beispiele

Wir erklären den Begriff der Sekantensteigung an der Stelle a in Abhängigkeit von x:



Es sei eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$

Definition 16 Es sei a ein Häufungspunkt von A. $d : A \setminus \{a\} \ni x \mapsto d(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ heißt Sekantensteigung an der Stelle a. □

Beispiel:
$f(x) = x^2$ $sek(a, x) = \frac{x^2-a^2}{x-a} = x + a$. „Strebt“ x gegen a, so strebt $d(x)$ gegen $2a$. Genauer: Ist $(x(n)|n \in \mathbb{N})$ irgend eine Folge deren Grenzwert a ist, so ist der Grenzwert der Folge $d(x(n)) = 2a$. Anschaulich wird aus der Sekante beim Annähern eine *Tangente* .

Satz 9.1. *Sei f eine Funktion und $a \in A$ ein Häufungspunkt von A. Dann sind für f folgende Aussagen äquivalent.*

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existiert.*
2. *Es gibt eine in a stetige Funktion $d : A \to \mathbb{R}$,*
   so dass $f(x) = f(a) + (x - a) \cdot d(x)$ ist.
3. *Es gibt eine Zahl c und eine Funktion $r : A \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x-a)}{x-a} = 0$ und $f(x) = f(a) + c(x - a) + r(x - a)$.*

1. folgt 2.

$$d(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{für } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{für } x = a \end{cases}$$

Nach Definition ist d an der Stelle a stetig und für alle $x \in A$ ist die behauptete Gleichung erfüllt.
2. folgt 3.: Man betrachte die Funktion $r(x) = f(x) - f(a) - (x - a)d(x)$.
3. Folgt 1. Auch klar. □

Definition 137. Erfüllt f die äquivalenten Aussagen des Satzes, so heißt f im Punkte a differenzierbar. $\lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d(a)$ wird mit $f'(a)$ oder $\frac{df}{dx}(a)$ bezeichnet.

Satz 9.2. *Jede im Punkte a differenzierbare Funktion ist dort stetig.*

$f(x) = f(a) + (x - a)d(x)$. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen nur stetige Funktionen. Daher folgt die Behauptung. □

Satz 9.3 (Algebraische Eigenschaften). *Es gilt:*

1. *Sind f, g im Punkte a differenzierbar, so ist die Summenfunktion differenzierbar, und es ist: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
2. *Die Funktion $f \cdot g$ ist im Punkt a differenzierbar und es ist: $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$. (Produktregel)*
3. *Ist $g(a) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar und es ist:*
   $$\frac{f}{g}'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$
   (Quotientenregel)

Zu 1.: Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)\cdot d(x) \\ g(x) &= g(a) + (x-a)\cdot e(x) \\ (f+g)(x) &= (f+g)(a) + (x-a)\cdot (d+e)(x) \end{aligned}$$

Mit stetigen Funktionen $d+e$. Also ist $(d+e)$ stetig. Es folgt $f+g$ ist differenzierbar an der Stelle a und es ist: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
Zu 2.: Es ist:

$$(f\cdot g)(x) = (f\cdot g)(a) + (x-a)\cdot [f(a)e(x) + d(x)g(a) + (x-a)d(x)e(x)]$$

Die in der eckigen Klammer stehende Funktion h ist an der Stelle a stetig. Also ist $(f\cdot g)$ differenzierbar. $h(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$. Also ist $(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
Zu 3.: Da $g(a) \neq 0$ ist, gibt es eine ganze Umgebung von a für die gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(a)}{g(a)} + \left[\frac{f(a)+(x-a)d(x)}{g(a)+(x-a)e(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right] \\ &= \frac{f(a)}{g(a)} + (x-a)\left[\frac{g(a)\cdot d(x) - f(a)\cdot e(x)}{(g(a)+(x-a)e(x))g(a)}\right] \end{aligned}$$

In der eckigen Klammer ist die Nennerfunktion $n(x)$ stetig. Es ist $n(a) = g(a)^2)$. Außerdem ist die Zählerfunktion $z(x)$ stetig. Es ist $z(a) = f'(a)g(a) - f(a)g'(a)$. Insgesamt ergibt sich:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beispiele:

66. Mit obigen Regeln kann man sämtliche gebrochen rationalen Funktionen in ihrem Definitionsbereich ableiten.

Satz 9.4 (Ableitung von ln). *Die Funktion* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *ist überall differenzierbar. Es ist für alle* $x \in \mathbb{R}^+$*:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \tag{9.1}$$

Wegen der Funktionalgleichung und der Abschätzung der ln Funktion aus Satz 7.37 gilt:

$$1 - \frac{c}{x} \leq \ln(x) - \ln(c) \leq \frac{x}{c} - 1$$
$$\frac{x-c}{x} \leq \ln(x) - \ln(c) \leq \frac{x-c}{c}$$

$\frac{\ln(x)-\ln(c)}{x-c}$ liegt zwischen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{c}$. Es folgt $\lim\limits_{x\to c} \frac{\ln(x)-\ln(c)}{x-c} = \frac{1}{c}$. Das war behauptet worden. □

Satz 9.5 (Ableitung von arctan). $\arctan : \mathbb{R} \ni x \mapsto \arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ *ist überall differenzierbar und es ist:*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Betrachten wir zunächst die Stelle 0. Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$. Dies ergibt sich aus der Ungleichung des Satzes 7.45. Sei jetzt a beliebig aus $\mathbb{R}$. Wir betrachten

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(a)}{x-a} = \frac{\arctan(\frac{x-a}{1+xa})}{x-a}$$

Die Gleichung gilt für $a > 0$. Denn dann ist $-a < 0$ und infolgedessen $x(-a) < 1$ für jedes x, welches nahe genug bei a liegt. Das Additionstheorem kann daher angewendet werden. Da $\arctan(x) = -\arctan(-x)$ ist, genügt es die Behauptung für positive a zu zeigen. Weiter erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x) - \arctan(a)}{x-a} &= \frac{x-a}{1+xa} \cdot \frac{1}{x-a} \cdot \frac{\arctan(\frac{x-a}{1+xa})}{\frac{x-a}{1+xa}} \\ &= \frac{1}{1+xa} \cdot \frac{\arctan(v(x))}{v(x)}\end{aligned}$$

Dabei ist $v(x)\frac{x-a}{1+xa}$. Es ist $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$. Daher folgt $\lim\limits_{x\to a} \frac{arctan(v(x))}{v(x)} = 1$. Insgesamt ergibt sich: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\arctan(x)-\arctan(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{1+xa} \cdot 1 = \frac{1}{1+a^2}$. □

Satz 9.6 (Kettenregel). *Sei $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbb{R}$ und $f(a)$ ein Häufungspunkt von B. Außerdem sei f an der Stelle a differenzierbar und g an der Stelle $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle a differenzierbar und es ist: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Es ist:

$$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a)d(f(x))$$

wobei d eine in $f(a)$ stetige Funktion und $d(f(a)) = g'(f(a))$ ist. Weiter ist $f(x) = f(a)+(x-a)e(x)$, wobei e eine in a stetige Funktion ist mit $e(a) = f'(a)$. Es folgt:

$$g(f(x)) = g(f(a)) + ((x-a)e(x))d(f(x))$$

Wir erhalten: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. □

9.1.2 Umkehrfunktion

Satz 9.7 (Umkehrfunktion). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. In dem Punkt $c \in [a, b]$ sei f differenzierbar. Ist $f'(c) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion von f in $f(c)$ differenzierbar und es ist:*

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)} \tag{9.2}$$

Es gibt eine in c stetige Funktion $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(c) + (x - c)d(x)$. Es ist $d(c) = f'(c) \neq 0$. Weil f injektiv ist, verschwindet d auch in keinem weiteren Punkt aus $[a, b]$. Also ist

$$x = c + \frac{f(x) - f(c)}{d(x)}$$

für alle $x \in [a, b]$ Ist y aus dem Definitionsbereich von f^{-1} gegeben, so gibt es $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Für y erhalten wir daher:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(c)) + (y - f(c)) \cdot \frac{d \cdot f^{-1}(y)}{.}$$

Die Funktion d ist stetig im Punkt $c = f^{-1}(f(c))$. Außerdem ist f^{-1} stetig im Definitionsbereich. Daher ist $d \circ f^{-1}$ stetig in $f(c)$. . Daher ist $h = \frac{1}{d \circ f^{-1}}$ stetig in $f(c)$. Es folgt $h(f(c)) = \frac{1}{d \circ f^{-1}} f(c) = \frac{1}{d(c)} = \frac{1}{f'(c)}$. □

Der Satz von der Umkehrfunktion 9.7 können wir auf die Funktion anwenden. Das ln stetig und monoton wachsend ist hat ln eine Umkehrfunktion. Wir bezeichnen sie mit $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Satz 9.8 (Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $\exp(0) = 1$ *und* $\exp$ *ist streng monoton wachsend.*
2. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp$ *differenzierbar und es ist:*
$$\exp'(x) = \exp(x) \tag{9.3}$$
3. *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\exp(x + y) = \exp(x) + \exp(y)$
4. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.
5. *Für alle rationalen Zahlen* $r \in \mathbb{Q}$ *gilt:* $\exp(r \cdot x) = \exp(x)^r$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

1. Klar.
2. Sei $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}^+$ mit $y = \ln(x)$. Es folgt $\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(x)} = x = \exp(y)$.
3. Es ist $1 = \exp(0) = \exp(y+(-y)) = exp(y)\exp(-y)$. Daher ist $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$.

Satz 9.9 (Ableitung von Tangens). *Die Umkehrfunktion* $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ *von* $\arctan$ *ist überalle differenzierbar und es gilt:*

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Die Funktion arctan ist streng monoton wachsend und stetig. Daher ist tan streng monoton wachsend und stetig. Wir können den Satz von der Umkehrfunktion anwenden (siehe Satz 9.7). Es ist für ein $b \in]-\pi/2, \pi/2[$

$$\begin{aligned}\tan'(b) &= \tan'(\arctan(a)) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1+a^2}} = 1 + a^2 \\ &= 1 + \tan^2(b)\end{aligned}$$

9.2 Der Mittelwertsatz

Satz 9.10. *Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$. und a ein Punkt im Innern von A. Ist $f : A \to B$ an der Stelle a differenzierbar und besitzt f dort einen lokalen Extremwert, so ist $f'(a) = 0$*

Satz 9.11 (Satz von Rolle). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f(a) = f(b)$. Ist f im ganzen Intervall $[a, b]$ differenzierbar, so gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$.*

Ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist man fertig. Denn dann ist f die konstante Funktion. Deren Ableitung ist 0. Andernfalls gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f(c) = \max\{f(x)|x \in [a, b]\}$ oder $c \in]a, b[$ mit $f(c) = \min\{f(x)|x \in [a, b]\}$ Nach dem Satz 9.10 ist $f'(c) = 0$. Dies war zu zeigen. □

Satz 9.12 (Mittelwertsatz). *Sei $a < b$. Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und im Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Sei $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$. Dann ist $g(a) = f(a) = g(b)$. Auf g kann also der Satz von Rolle angewendet werden 9.11. Es gibt haer ein $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$. Es ist $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Daraus folgt die Behauptung.□

Anschaulich besagt der Satz: Zu jeder Sekanten gibt es eine parallele Tangente.

Satz 9.13 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien f und g in $[a, b]$ differenzierbare Funktionen und $g'(x) \neq 0$ in $[a, b]$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Wir betrachten die Funktion $F(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$. Es ist $F(a) = F(b)$, wie man nachrechnen kann. Außerdem ist F differenzierbar. Wegen dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $F'(c) = 0$. Damit ist $0 = g'(c)[f(b) - f(a)] - f'(c)[g(b) - g(a)]$. Daher folgt die Behauptung. □

Folgerung 9.14. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $[a, b]$ differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Ist $f'(x) = 0$ im ganzen Intervall, dann ist f konstant.*

2. *Ist $f'(x) > 0$ im ganzen Intervall, dann ist f streng monoton wachsend.*

3. *Ist $f'(x) < 0$ im ganzen Intervall, dann ist f streng monoton fallend.*

f sei eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Die Gleichung der Sekante durch die Punkte $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ ist:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \tag{9.4}$$

Jeder Punkt des Funktionsgraphen liegt unterhalb von dieser Sekante, wenn $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt: Jedes x aus dem Intervall $[a, b]$ kann in der Form $x = a + t \cdot (b - a)$ mit $t \in [0, 1]$ dargestellt werden. Dann ist $t = \frac{x-a}{(b-a)}$. Setzen wir das in 9.4 ein, so ergibt sich: $f(x) = f((1 - t)a + tb) \leq f(a) + (f(b) - f(a)) \cdot t$. und $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$.

Definition 138. f heißt konvex nach oben im Intervall $I = [a, b]$, wenn für alle $t \in [0, 1]$ gilt: $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$. f heißt streng konvex nach oben, wenn in der Ungleichung das Gleichheitszeichen nie gilt.

Satz 9.15. *Sei f auf $[a, b]$ stetig. Auf dem offenen Intervall $a < x < b$ existiere die zweite Ableitung f''. Für alle $x \in]a, b[$ ist $f''(x) > 0$. Dann ist f auf dem Intervall $[a, b]$ streng konvex nach oben.*

Sei $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ die Sekante, die die beiden Punkte $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ miteinander verbindet. Dann ist nach dem Mittelwertsatz $s'(x) = f'(c)$ ein $c \in [a, b]$, da es zu jeder Sekante eine parallele Tangente gibt. Wir betrachten die Funktion: $g(x) := s(x) - f(x)$. Es ist $g'(x) = f'(c) - f'(x) = (c - x) \cdot f''(d)$ für ein d zwischen x und c. Nun ist $f''(d) > 0$. Also ist $g'(x) > 0$ für $x < c$ und $g'(x) < 0$ für $x > c$. Das bedeutet g ist im Intervall $[a, c]$ monoton wachsend und im Intervall $[c, b]$ monoton fallend. Das □

10 Integralrechnung

10.1 Begriff des Integrales

Sei in diesem Abschnitt f eine beschränkte Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Außerdem sei g eine auf $[a, b]$ streng monoton wachsende stetige Funktion.

Definition 139. $Z = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ mit $x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$. heißt Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. $M_i = \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. $m_i = \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
$OS(Z, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot (g(x_i) - g(x_{i-1}))$ heißt obere Darboux Summe zur Zerlegung Z. $US(Z, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot (g(x_i) - g(x_{i-1}))$ heißt untere Darboux Summe zur Zerlegung Z. $Z - 1$ heißt Verfeinerung von Z genau dann, wenn $Z \subset Z_1$ ist. Das heißt jeder Teilpunkt von Z ist auch Teilpunkt von Z_1.

Satz 10.1. *Ist Z_1 eine Verfeinerung von Z so gilt:*

1. $US(Z, f) \leq US(Z_1, f) \leq OS(Z_1, f) \leq OS(Z, f)$.
2. *Jede Untersumme ist $\leq$ jeder Obersumme.*

Zu 1. Sei Z_1 eine Verfeinerung von Z. Es genügt die Behauptung zu zeigen, wenn Z_1 einen Teilpunkt mehr hat wie Z. Sei dieser weitere Teilpunkt $c \in [x_k, x_{k+1}$. Ist $A = \sup\{f(x)|x \in [x_k, c]\}$ und $B = \sup\{f(x)|x \in [c, x_{k+1}\}$ so ist $\max\{A, B\} \leq M_k$. Also ist $A \cdot (c - x_k) + B \cdot (x_{k+1} - c) \leq M_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} OS(Z_1, f) &= \sum_{i=1}^{k} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &+ A \cdot (c - x_k) + B \cdot (x_{k+1} - c) + \sum_{i=k+2}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) \end{aligned}$$

Zu 2. Seien Z_1 und Z_2 zwei beliebige Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$. Z sei eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Wegen dem ersten Teil des Satzes gilt: $US(Z_1, f) \leq US(Z, f) \leq OS(Z, f) \leq OS(Z_2, f)$. Dies war zu zeigen. □

Definition 140. M_u = Menge aller möglichen Untersummen. M_o = Menge aller möglichen Obersummen. M_u liegt unterhalb von M_o.

Satz 10.2 (Riemanns Integrationskriterium). *f sei eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion. M_u und M_o seien wie oben definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Zwischen M_u und M_o liegt nur eine Zahl.*
2. *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung Z mit $OS(Z, f) - US(Z, f) \leq \epsilon$.*

1. $\Longrightarrow$2: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da es zwischen M_u und M_o nur eine Zahl I gibt, exitiert in dem Intervall $[I-\epsilon/2, I+\epsilon/2]$ eine Untersumme und eine Obersumme. Es gibt also zwei Zerlegungen Z_1 und Z_2 mit $I - \epsilon/2 \leq US(Z_1, f) \leq I \leq OS(Z_2, f) \leq I + \epsilon/2$. Sei Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Diese erfüllt die Beziehung

$$I - \epsilon/2 < US(Z_1, f) \leq US(Z, f) < OS(Z, f) < I + \epsilon/2.$$

Daher ist $OS(Z, f) - US(Z, f) < \epsilon$
2. $\Longrightarrow$1. Angenommen es gebe zwei Zahlen $A < B$ zwischen M_u und M_o. Dann gilt für jede Zerlegung Z: $US(Z, f) \leq A < B \leq OS(Z, f)$. Das heißt für jede Zerlegung ist $OS(Z, f) - US(Z, f) < B - A$. Zu $\epsilon < B - A$ gibt es aber andererseits eine Zerlegung Z mit $OS(Z, f) - US(Z, f) < \epsilon$. Dies ist ein Widerspruch. □

Definition 141. f heißt in dem Intervall $[a, b]$ integrierbar in Bezug auf g genau dann, wenn der obige Satz auf f zutrifft. In diesem Fall wird die eindeutig bestimmte Zahl zwischen M_u und M_o mit $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ bezeichnet.

10.2 Integrierbare Funktionen

Satz 10.3. *Es gilt:*

1. *Ist g stetig (wir wollen das immer voraussetzen) und f monoton, so ist f integrierbar.*
2. *Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist dort auch integrierbar.*

3. Ist f in $[a,b]$ integrierbar, dann ist $|f|$ in $[a,b]$ integrierbar.

Zu 1. Sei $Z = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Wenn f eine monoton wachsende Funktion ist, so gilt:

$$\begin{aligned} OS(Z,f) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(g(x_i)-g(x_{i-1})). \\ US(Z,f) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(g(x_i)-g(x_{i-1})) \end{aligned}$$

Und also ist

$$OS(Z,f) - US(Z,f) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})\cdot(g(x_i)-g(x_{i-1}).$$

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. g ist als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig wegen Satz 7.67. Also gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, x' \in [a,b]$ gilt: $|x - x'| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Wir wählen nun irgend eine Zerlegung, deren größtes Teilintervall kleiner als δ ist. Dann gilt $OS(Z,f) - US(Z,f) = \sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})\left(\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\right) = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b) - f(a)) = \epsilon$.

Zu 2. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f wegen Satz 7.67 gleichmaessig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x', x'' mit $|x' - x''| < \delta$ gilt: $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\epsilon}{g(b)-g(a)}$. Sei $Z = \{x_o, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls mit $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ für alle i. Dann ist

$$\begin{aligned} OS(Z,f) - US(Z,f) &= \sum_{i=0}^{n}(M_i - m_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n}|M_i - m_i|(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{(g(b)-g(a))}\cdot(g(b)-g(a)) = \epsilon. \end{aligned}$$

Zu 3. Sei Z eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Beh: Für alle i gilt: $\sup\{|f(x)||x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{|f(x)||x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq M_i - m_i$. Dies überlege man sich als Übung. Hieraus ergibt sich die Behauptung leicht. Man muss es nur hinschreiben. □

Definition 142. Sei Z eine Zerlegung. Als Spanne der Zerlegung definieren wir: $\sigma(Z) = \max\{g(x_{i+1}) - g(x_i)|i = 1\ldots n\}$. Das ist die Länge des längsten Teilintervalls.

Satz 10.4. *Sei f beschränkt und g wie immer monoton wachsend und beschränkt. f ist integrierbar genau dann, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall Z : \sigma(Z) < \delta \Longrightarrow OS(Z, f) - US(Z, f) < \epsilon$$

$\Leftarrow$ Klar.
$\Rightarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f integrierbar ist, gibt eine Zerlegung Z_0 mit $OS(Z_0, f) - US(Z_0, f) < \varepsilon/2$. Sei k die Anzahl der Punkte der Zerlegung. Da g gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x, y gilt:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot k \cdot (M - m) + 1}$$

Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $\sigma(Z) < \delta$. $Z = \{a = x_0 < x_1 \dots x_n = b\}$. $Z_1 = Z \cup Z_0$ die gemeinsame Verfeinerung von Z und Z_0.

$$K = \{i \in \{1, \dots, n\} | [x_{i-1}, x_i] \text{ enthält einen Teilpunkt von } Z_0\}.$$

K enthält k Elemente. $I \setminus K = \{1, 2, \dots, n\} \setminus K$. Es gilt:

$$\begin{aligned} OS(Z, f) - US(Z, f) &= \sum_{i \in I} (g(x_i) - g(x_{i-1}))(M_i - m_i) \\ &= \sum_{i \in I \setminus K} (g(x_i) - g(x_{i-1}))(M_i - m_i) + \sum_{i \in K} (g(x_i) - g(x_{i-1}))(M_i - m_i) \\ S_1 := \sum_{i \in I \setminus K} (g(x_i) - g(x_{i-1}))(M_i - m_i) &\leq OS(Z_1, f) - US(Z_1, f) \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Die zweite Teilsumme enthält nur k Summanden. Es ist daher

$$S_2 = \sum_{i \in K} (g(x_i) - g(x_{i-1}))(M_i - m_i) \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{1k(M - m + 1)} < \varepsilon/2$$

Insgesamt folgt: $OS(Z, f) - US(Z, f) < \varepsilon$. □

Satz 10.5. *Sei f beschränkt und integrierbar in $[a, b]$, α monoton wachsend und stetig. Ist $(Z_n | n \in \mathbb{N})$ eine Zerlegungsfolge von $[a, b]$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(Z_n) = 0$, so gilt: $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} OS(Z_n, f) = \int\limits_a^b f(x) d\alpha(x) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} US(Z_n, f)$*

Der Beweis ist einfach.

Definition 143 (Vertauschung der Integrationsgrenzen). 1. $\int\limits_a^a f(x) d\alpha(x) = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = -\int\limits_b^a f(x)d\alpha(x)$

Satz 10.6. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $c \in [a,b]$. f sei integrierbar in $[a,c]$ und integrierbar in $[c,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ integrierbar und es gilt:*

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = \int\limits_a^c f(x)d\alpha(x) + \int\limits_c^b f(x)d\alpha(x) \tag{10.1}$$

Folgerung 10.7. *Ist f in $[a,b]$ stückweise monoton oder stückweise stetig, so ist f in $[a,b]$ integrierbar.*

Satz 10.8. *1. Die Menge der integrierbaren Funktionen über $[a,b]$ bilden einen reellen Vektorraum. Das Integral ist ein Funktional.*

2. Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \int\limits_a^b g(x)d\alpha(x)$.

3. $\left|\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|d\alpha(x)$

Einfach. □

10.3 Hauptsatz

Satz 10.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und α eine echt monoton wachsende Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit*

$$f(c) = \frac{1}{\alpha(b) - \alpha(a)} \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) \tag{10.2}$$

Sei $m = \inf\{f(x)|x \in [a,b]\}$ und $M = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$. Dann ist

$$\int\limits_a^b m d\alpha(x) \leq \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \int\limits_a^b M d\alpha(x)$$

Wie man leicht nachrechnet ist für ein $c \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_a^b d\alpha(x) = c \cdot (\alpha(b) - \alpha(a))$$

Es ergibt sich:

$$m \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

$$m \leq \frac{1}{\alpha(b) - \alpha(b)} \int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq M$$

f nimmt als stetige Funktion jeden Zwischenwert an. Daher gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\frac{1}{\alpha(b) - \alpha(b)} \int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(c)$$

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(c) \cdot (\alpha(b) - \alpha(a))$$

Satz 10.10. *Sei f integrierbar und beschränkt in $[a, b]$ und α monoton und stetig. Dann ist die Funktion:*

$$f(x) := \int_a^x f(x) d\alpha(x)$$

stetig.

Sei $c \in [a, b]$. Dann ist $|F(x) - F(c)| = \left| \int_c^x f(t) d\alpha(t) \right| \leq \int_c^x |f(t) d\alpha(t)| \leq M|\alpha(x) - \alpha(c)|$. Daraus folgt die Behauptung □

Satz 10.11 (Hauptsatz). *1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar und stetig in $c \in [a, b]$. Außerdem sei α in ganz $[a, b]$ setig differenzierbar und echt monoton wachsend. Dann gilt $F(x) := \int_a^x f(t) d\alpha(t)$ ist bei c differenzierbar und es ist $F'(c) = f(c) \cdot \alpha'(c)$.*

2. Es gelte dieselben Voraussetzungen wie in Teil 1. Ist G eine Stammfunktion von $f \cdot \alpha'$, so ist

$$G(x) = F(x) + C \text{ und } \int_a^x = G(X) - G(a) \tag{10.3}$$

1. Wir haben $\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \lim\limits_{c}^{c+h} f(t)d\alpha(t) = \frac{\alpha)c+h}{h} \cdot \frac{h}{\alpha(c+h)-\alpha(c)} \cdot \int\limits_{c}^{c+h} f(t)d\alpha(t) = \frac{\alpha(c+h)-\alpha(c)}{h} \cdot f'(c_1)$ mit einem c_1 zwischen c und $c+h$. Bildet man den Grenzwert $h \to 0$, so ergibt sich die Behauptung.

2. $(G(x)-F(x))' = f(x) \cdot \alpha'(x) - f(x) \cdot' \alpha(x) = 0$. Daher ist $G(x) = F(x)+C$. Es folgt: $\int\limits_{a}^{x} f(t)d\alpha(t) = F(x) = F(x) - F(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = G(x) - G(c)$. □

Beispiele:

67. Betrachten wir zunächst zwei Beispiele, die wir von anderer Stelle her schon kennen. Die Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{t} dt \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktionalgleichung: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$. Bew: Sei $a \in \mathbb{R}^+$ fest gewählt. Wir betrachten die Funktion $h(x) : \ln(a \cdot x)$. Es ist $h'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$. Es gibt daher eine Konstante c, so dass $h(x) = \ln(x) + c$ gilt. Es ist $h(1) = \ln(a) = \ln(1) + c$. Daher ist $c = \ln(a)$. Es folgt $\ln(a \cdot x) = \ln(a) + \ln(x)$ für alle x und daher die Behauptung.

68. Die Funktion

$$a : \mathbb{R} \ni x \mapsto \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

erfüllt die Funktionalgleichung:

$$a(x) + a(y) = a\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \text{ für alle } xy < 1$$

Bew. Sei y fest gewählt. Für $xy < 1$ betrachten wir die Funktion

$$F(x) = a\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Also ist $a(x) + c = a(\frac{x+y}{1-xy})$ für eine Konstante c und alle x mit $xy < 1$. Setzten wir $x = 0$ ein, so erhalten wir: $a(x) + a(y) = a\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

69. Wir suchen nach einer in einem Intervall definierten Funktion die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$y' = g(x) \cdot y; y > 0$$

Dabei soll g eine stetige Funktion sein. Zunächst rechnen wir formal.

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} &= g(x) \\
\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int g(x) dx \\
\ln(|y(x)|) = G(x) + c \quad G \text{ ist Stammfunktion von } g & \\
|y| &= \exp(G(x) + c)
\end{aligned}$$

Man kann nun die Probe machen.

10.3.1 Uneigentliche Integrale

Sei f eine reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für jedes $x \in]a, b]$ sei f beschränkt und integrierbar auf $[x, b]$.

Definition 144. Existiert $\lim\limits_{x>\to a} \int\limits_x^b f(t) d\alpha(t)$ dann heißt $\int\limits_a^b f(t) d\alpha(t) := \lim\limits_{x>\to a} \int\limits_x^b f(t) d\alpha(t)$ da uneigentliche Integral von f im Intervall $[a, b]$. Analog definiert man das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(t) d\alpha(t)$ bei b.

Beispiele:

70. $\int\limits_0^1 x^r dx$ existiert an der Stelle 0.

Sei $r \neq -1$ und $t > 0$. Die Funktion $f(t) = t^r$ ist stetig im jedem Intervall $[x, 1]$ mit $x \in]0, 1]$. Es gibt eine Stammfunktion $F(t) = \frac{t^{r+1}}{r+1}$. Sei $x \in]0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x>\to 0}^{1} t^r dt &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{r+1}(1 - x^{r+1}) \\
&= \frac{1}{r+1} - \lim_{x\to 0} e^{(r+1)\lg(x)} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{r+1} \text{ für } r > -1 \\ -\infty \text{ für r < -1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Satz 10.12. *$f :]a, b] \to \mathbb{R}^+$ sei für alle $x \in]a, b]$ im Intervall $[x, b]$ beschränkt, integrierbar und die Menge $M = \{\int\limits_x^b f(t) d\alpha(t) | x \in]a, b]\}$ sei beschränkt. Dann*

existiert $\int\limits_a^b f(t)d\alpha(t)$ *und es gilt:*

$$\int\limits_a^b f(t)\,d\alpha(t) = \sup(M)$$

Ich kürze ab: $F(x) := \int_x^b f(t)\,d\alpha(t)$ und $s := \sup(M)$. Die Funktion $F :]a,b] \ni x \mapsto F(x) \in \mathbb{R}^+$ ist monoton fallend wie man sich überlegt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $s - \varepsilon < F(x) \leq s$. Es sei $(x(n)|n \in \mathbb{N})$ eine Folge, welche gegen a konvergiert. Weiter sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu diesem ε gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $s - \varepsilon < F(x) \leq s$. Fast alle $x(n)$sind kleiner als x. Für fast alle $x(n)$ ist daher $s - \varepsilon < F(x) \leq F(x(n)) \leq s$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = s$ □

Beispiele:

71. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ existiert auf beiden Seiten.

    Ich beweise die Existenz bei 1. Ist $c < 1$ und $x \in]-1,c]$ so ist $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ in $[x,t]$ beschränkt und außerdem stetig also integrierbar. Außerdem ist f in diesem Intervall nicht negativ. Zu zeigen ist, dass

    $$M = \{\int\limits_x^c |x \in]-1,c]\}$$

    beschränkt ist.
    Es ist:

    $$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$$

    $$\begin{aligned}\int\limits_x^c \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &\leq \frac{1}{\sqrt{1-c}} \int\limits_x^c \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-c}} \left[2\sqrt{1+t}\right]_x^c \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-c}}(\sqrt{1+c} - \sqrt{1+x}) \leq \frac{2\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-c}}\end{aligned}$$

    Also sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Es folgt die Behauptung. □

Satz 10.13. *a) Ist* $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ *uneigentlich für* a *oder* b *so ist* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *stetig für all* $x \in [a,b]$.

b) Ist $\int_a^b f(t)\,dt$ *uneigentlich für* a *oder* b *und* f *stetig, so ist* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *differenzierbar für* $c \in]a,b[$ *und* $F'(c) = f(c)$. *(Haupsatzeigenschaft)*

Der Beweis ist analog wie beim Hauptsatz.

Weitere Eigenschaften, wie Linearität, Monotonie etc. übertragen sich.
Sei nun f definiert für $]-\infty, b]$ und für $x \in]-infty, b]$ sei f jeweils beschränkt und integrierbar.

Definition 145. Existiert $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,d\alpha(t)$, dann heißt $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,d\alpha(t)$, das uneigentliche Integral von f im Intervall $]-\infty, b]$. Analog definiert man diesen Begriff für das Intervall $]a, \infty[$ und $]-\infty, \infty[$.

Beispiele:

72. $\int_1^\infty \frac{1}{t^r}\,dt$ existiert für alle $r > 1$.

10.3.2 Bogenlänge

Abb. 10.1: Polygonzug

Definition 146. 1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $Z = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. $L(Z) = \sum\limits_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ heißt Länge des Polygonzuges, der zu der Zerlegung Z gehört.

2. f heißt rektifizierbar in $[a,b]$ genau dann, wenn für alle Zerlegungsfolgen $(Z_n | n \in \mathbb{N})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(Z_n) = 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} L(Z_n) = L$.

Satz 10.14. *1. Sei* f *stetig in* $[a,b]$. *Dann ist* f *rektifizierbar in* $[a,b]$ *genau dann, wenn die Menge* $\{L(Z) | Z$ *Zerlegung von* $[a,b]\}$ *nach oben beschränkt ist.*

2. Sei f *in* $[a,b]$ *differenzierbar und* $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ *eine integrierbare Funktion.. Dann existiert die Bogenlänge von* f *in* $[a.b]$ *und es ist* $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt$.

Die Beweise sind nicht besonders schwer und werden später in einer etwas allgemeineren Situation nachgetragen.

15. März 2017

Bogenlänge des Kreises und die arcusfunktionen. Wir wollen dies anwenden auf den Kreis.

Abb. 10.2: arcussinus

Der Einheitskreis ist die Punktmenge $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$. Also ist $y=\sqrt{1-x^2}$ der obere Halbkreis. α ist die Länge des Kreisbogens vom Punkt $(0,1)$ bis zum Punkt $(x,\sqrt{1-x^2})$ Nach dem Satz über die Bogenlänge gilt $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt$. Es ist $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ Wir erhalten

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\sqrt{1+f'^2(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Definition 147.

$$\arcsin(x)=\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \tag{10.4}$$

$$\arccos:=\int\limits_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \tag{10.5}$$

$$\tag{10.6}$$

Satz 10.15. *Für $x>0$ gilt:* $\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

Ich bezeichne $F(x)=\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ und $H(x)=\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=F(1)-F(\sqrt{1-x^2})$. Dann ist $H'(x)=F'(x)$. Außerdem ist $F(0)=0=H(0)$. Also ist $F=H$. □

Satz 10.16. *Für $x\in[-1,1]$ ist* $\arcsin(-x)=-\arcsin(x)$.

Sei zunächst $x\in]-1,1[$ aus dem offenen Intervall. Dann ist für $F(x):=\arcsin(-x)$ $F'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $H(x):=-\arcsin(x)$ $H'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Daher ist $H'(x)=f'(x)$. Außerdem ist $H(0)=F(0)=0$. Also ist $H=F$. Betrachten wir noch den Grenzwert an den Definitionsgrenzen. $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}=\arcsin(1)$. Und $\lim\limits_{x\to -1}\arcsin(x)=\lim\limits_{-x\to 1}\arcsin(-x)=\frac{-pi}{2}=\arcsin(-1)$ □

Satz 10.17. *Die Funktion*

$$\arcsin : [-1,1] \ni x \mapsto \arcsin(x) \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

ist streng monoton wachsend und stetig, daher umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni y \mapsto \sin(y) \in [-1,1]$$

ist infolgedessen auch stetig.

Sei $a < b$ mit $a, b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist $\arcsin(b) - \arcsin(a) = \int\limits_a^b \frac{1}{1-t^2}\, dt > 0$. Stetig ist die Funktion, da sie differenzierbar ist. Also ist sin auch stetig und streng monoton wachsend in diesem Intervall. □

Satz 10.18. $\lim\limits_{x\to -1} \arccos(x) = \pi$ *und* $\lim\limits_{x\to 1} \arccos(x) = 0$

$\int\limits_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \arcsin(1) - \arcsin(x)$. Für $x \to 1$ ergibt sich 0. Weiter $\lim\limits_{x\to -1}(\arcsin(1) - \arcsin(x)) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$. □

Satz 10.19. $\arccos : [-1,1] \ni x \mapsto \arccos(x) \in [0,\pi]$ *ist streng monoton fallend*

Sei $a < b$.

$$\int\limits_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt + \int\limits_b^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Daher ist $\arccos(a) > \arccos(b)$. □

Definition 148. Die Umkehrfunktion von arccos heißt cos.

$$\cos : [0, \pi \ni x \mapsto \cos(x) \in [-1,1].$$

Satz 10.20. *Für* $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ist* sin *differenzierbar und es ist* $\sin'(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

Sei zunächst $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ aus dem offenen Intervall. Es gibt genau ein $y \in]-1,1[$ mit $x = \arcsin(y)$. Daher ist $y = sin(x)$. Mit dem Satz über die Umkehrfunktion (siehe Satz 9.7) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \sin'(\arcsin(y)) \\ &= \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2(x)}\end{aligned}$$

Berechnen wir die Ableitung an der Stelle $\frac{\pi}{2}$. Dazu zunächst eine Bemerkung:

Bemerkung. *Für* $y \in [0,1]$ *gilt* $\arcsin(1) - \arcsin(y) \leq \frac{1-y}{\sqrt{1-y^2}}$

Es ist $\arcsin(1) - \arcsin(y) = \int\limits_y^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leq (1-y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. □

Sei nun $x < \pi/2$. Dann gibt es $y < 1$ mit $\arcsin(y) = x$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} &= \frac{y-1}{\arcsin(y) - \arcsin(1)} \\ &= \frac{1-y}{\arcsin(1) - \arcsin(y)} \leq \sqrt{1-y^2}\end{aligned}$$

Konvergiert x gegen $\pi/2$, so konvergiert das zugehörige y gegen 1 und daher der Differenzenquotient gegen $=$. Es ist daher $\sin'(\pi/2) = 0$. Entsprechend zeigt man das für $-\pi/2$. □

Satz 10.21. *Für* $xin[0, \pi/2]$ *gilt:* $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

10.4 Folgen und Reihen von Funktionen

10.4.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 149. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge. (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : M \to \mathbb{R}$.

1. $(f_n) : M \to \mathbb{R}$ heißt konvergent für $a \in M$ genau dann, wenn die Folge $(f_n(a))$ in $\mathbb{R}$ konvergent ist.
2. (f_n) konvergiert für M, wenn für alle $x \in M$ $(f_n(x))$ konvergent ist.
3. Ist (f_n) für M konvergent, dann heißt die durch $f : M \ni x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ definierte Funktion, die Grenzfunktion oder Limes der Folge (f_n).

Analoge Definitionen trifft man für Reihen von Funktionen.

Beispiel: Sei $M = [0,1]$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1[\\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Bei diesem Beispiel ist jede dieser Funktionen der Folge beliebig oft differenzierbar, also auch insbesondere stetig. Aber der Limes der Funktionenfolge ist weder differenzierbar noch stetig.

Definition 150. (f_n) heißt in M gleichmäßig konvergent gegen f, oder konvergiert in M gleichmäßig gegen f, genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M$ gilt: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Betrachtet man die Definition der punktweisen Konvergenz, so kann man dort schreiben:

$$\forall x \in M \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 (|f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

Hier ist das n_0 noch abhängig von dem x, im Gegensatz zur gleichmäßigen Konvergenz.

Definition 151. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i$ konvergiert in M gleichmäßig gegen g genau dann, wenn die Folge $(\sum\limits_{i=0}^{n} g_i)$ gleichmäßig gegen g konvergiert.

Beispiele:

73. Sei $M = [0,1]$ und $(f_n) = (x^n)$. Dann konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1[\\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

    Beweis: Sei $\epsilon = \frac{1}{2}$. Ist n beliebig, so wähle man $1 > x = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$. Dann ist $x^n = \frac{2}{3}$ und daher $|f(x) - x^n| = |x^n| = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Das heißt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in [0,1[$ mit $|f(x) - x^n| > \frac{1}{2}$. Also ist die Behauptung

    $$\exists n_0 \in \mathbb{B} \forall x \in [0,1] \forall n \geq n_o \left(|f(x) - x^n| < \frac{1}{2} \right)$$

    falsch. Das heißt x^n konvergiert nicht gleichmäßig in $[0,1]$, ja sogar nicht in $[0,1[$.

74. Ist $0 \leq b < 1$, so konvergiert (x^n) gleichmäßig in $[0,b]$

    Beweis: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $b^n < \epsilon$. Ist $x \in [0,b]$, so ist erst recht $x^n \leq b^n < \epsilon$. Das heißt (x^n) konvergiert gleichmäßig im Intervall $[0,b]$.

10.4.2 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz

Satz 10.22 (Satz von Dini). *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : I \to \mathbb{R}$ wachse (oder falle) für alle $x \in I$ monoton. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n(x)} = g(x)$ für alle x und ist g stetig, so ist (f_n) auf dem Intervall gleichmäßig konvergent.*

Zu zeigen ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in I$ gilt:$|g(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$g : I \ni x \mapsto g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

Zu jedem $x \in I$ gibt es ein $n(x) \in setN$ mit $|g(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n(x)$. Da g und $f_{n(x)}$ stetig sind, gibt es $V(x)$ eine Umgebung von x, so dass $|g(x) - g(x')| < \varepsilon/3$ und $|f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(x')| < \varepsilon/3$ für alle $x' \in V(x)$ gilt. Also ist

$$|g(x') - f_{n(x)}(x')| \leq |g(x') - g(x)| + |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$$

für all $n \geq n(x)$ und alle $x' \in V(x)$.
Die $\{V(x)|x \in I\}$ bilden eine offene Überdeckung von I. Diese enthält eine endliche Teilüberdeckung $V(x_1) \cup \cdots \cup V(x_k)$. Es sei $n_0 = \max\{n(x_1), \ldots, n(x_k)\}$. Ist x beliebig, so liegt x in einem $V(x_i)$. Für $\geq n_0$ folgt:

$$g(x) - f_{n(x)} \leq g(x) - f_{n_0(x)} \leq g(x) - f_{n(x_i)}(x) \leq \varepsilon$$

Dies war zu zeigen. □

Folgerung 10.23. *Es gibt eine Folge von reellen rationalen Funktionen (f_n), die für alle $x \in [0, 1$ monoton wächst und gleichmäßig gegegn $\sqrt{}:[0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ konvergiert.*

$$f_0(x) := 0$$
$$f_{n+1}(x) := f_n(x) + \frac{x - f_n(x)^2}{2 \cdot f_n(x) + 1}$$

Von der so definierten Folge zeigt man, dass sie die Voraussetzungen des satzes von Dini erfüllt. Ihr Grenzwert ist der behauptet Grenzwert. □

Satz 10.24 (Cauchy Kriterium). (f_n) *konvergiert gleichmäßig auf M genau dann, wenn*

$$\forall\varepsilon\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n, m \geq n_0\forall x \in M(|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$$

Sei zunächst (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt:

$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt:
$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Nun zur Umkehrung. Für jedes $x \in M$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ nach dem Cauchy Kriterium. Also konvergiert (f_n) punktweise. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge gleichmäßig konvergiert. Sei daher $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_1$ gilt: $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Außerdem gibt es zu jedem $x \in M$ ein $m_x \in \mathbb{N}$ mit $m_x \geq n_1$ und $|f(x) - f_{m_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit erhält man für beliebiges $x \in M$ und $n \geq n_1$: $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Satz 10.25 (Kriterium von Weierstraß). *Sei $\sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i$ eine Reihe von Funktionen. $g_i : M \to \mathbb{R}$ und sei $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ eine absolut konvergente Reihe von Zahlen mit $|g_i(x)| \leq |b_i|$ für alle $x \in M$ und alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i$ in M gleichmäßig konvergent und absolut konvergent. ($\sum\limits_{i=0}^{\infty} |g_i(x)|$ ist gleichmäßig konvergent.)*

Der Satz wird mit dem Cauchy Kriterium gezeigt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq n_0$ gilt: $\sum\limits_{i=m}^{n} |b_i| < \varepsilon$. Dann folgt: $\sum\limits_{i=m}^{n} |g_i(x)| < \sum\limits_{i=m}^{n} |b_i| < \varepsilon$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

10.4.3 Vertauschung von Limesprozessen

Satz 10.26. *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$. Die Folge (f_n) sei gleichmäßig konvergent. Dann ist die Grenzfunktion*
$f : I \ni x \mapsto f(x) = \lim\limits_{n} f_n(x) \in \mathbb{R}$ stetig. Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist also stetig.

Zu zeigen ist: Konvergiert eine Folge $(x_m | m \in \mathbb{N})$ gegen $a \in I$, so konvergiert die Folge $(f(x_m) | m \in \mathbb{N})$ gegen $f(a)$.
Konvergiere $(x_m | m \in \mathbb{N})$ gegen a. Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$|f(a) - f(x_m)| \leq |f(a) - f_n(a)| + |f_n)(a) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f(x_m)|$$

für alle n, m und alle x_m. Da $(f_n | n \in \mathbb{N})$ gleichmäßig gegen f konvergiert, ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und alle x:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$$

Insbesondere gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_k(x_m) - f(x_m)| < \varepsilon/3$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Da f_k stetig ist, konvergiert $(f_k(x_m)|m \in \mathbb{N})$ gegen $f_{k(a)}$. Für fast alle m ist daher

$$|f_k(a) - f_k(x_m)| < \varepsilon/3$$

Wir erhalten daher für fast alle m:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(x_m) &< |f(a) - f_k(a)| + |f_k(a) - f_k(x_m)| + |f_k(x_m) - f(x_m)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Die beiden Grenzübergänge können also vertauscht werden.

Satz 10.27. *Sei $f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten und integrierbaren Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f in I. Dann ist f beschränkt und integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt.$$

Der Grenzwert ist ein gleichmäßiger Limes

Nach diesem Satz können also die Grenzübergänge von Integral und Limes vertauscht werden. Zum Beweis des Satzes ist der folgende Hilfssatz notwendig.

Lemma 3 *Sei $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ und $J \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist beschränkt, integrierbar und $J = \int_a^x f(t)dt$.*
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\sigma_0 > 0$, so dass für jede Zerlegung Z des Intervalls $[a, x]$ und alle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt: Ist $\sigma(Z) < \sigma_0$, so ist*
   $|J - \sum_{i=1}^{n_Z} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon.$ □

Zunächst der Beweis des Hilfssatzes:

1. Für $a = x$ ist der Hilfssatz trivialerweise richtig.
2. Nach dem 2ten Integrabiltätskriterium gilt für jedes beschränkte $f : [a, x] \to \mathbb{R}$: f ist integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\sigma_0 > 0$ gibt, so dass für alle Zerlegungen von $[a, b]$ gilt:$(\sigma(Z) < \sigma_0 \Longrightarrow \overline{S_Z} - \underline{S_Z} < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und sei σ_0 wie in dem Integrabilitätskriterium. Dann ist für jede Zerlegung Z von $[a, b]$: $\underline{S_Z} \leq J = \int\limits_a^x f(t)dt \leq \overline{S_Z}$. Nun ist $\underline{S_Z} \leq S_Z \leq \overline{S_Z}$.
Damit folgt: $|J - S_Z| \leq \overline{S_Z} - \underline{S_Z} < \varepsilon$
Nun zur Umkehrung des Hilfssatzes. Zunächst zeigen wir die Beschränktheit von f. Diesen Beweis führen wir indirekt. Angenommen f ist nicht beschränkt in $[a, x]$ und Z sei eine Zerlegung des Intervalls $[a, x]$ mit $\sigma(Z) < \sigma_0$. Es gibt ein Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ in dem f nicht beschränkt ist. Es gibt also eine Folge $(\xi_j^k | k \in \mathbb{N})$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f(\xi_j^k) = \pm\infty$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\lim\limits_{k\to\infty} f(\xi_j^k) = \infty$ ist. Wir betrachten
$|J - (\sum\limits_{i\neq j} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi_j^k)(x_j - x_{j-1})| = |\alpha - f(\xi_j^k)(x_j - x_{j-1})|$
α ist eine feste Zahl und es ist $|\alpha - f(\xi_j^k)(x_j - x_{j-1})| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung. Dies heißt $\alpha - \varepsilon < f(\xi_j^k)(x_j - x_{j-1}) < \alpha + \varepsilon$ für alle k. Dies ergibt:

$$\frac{(\alpha - \varepsilon)}{(x_j - x_{j-1})} < f(\xi_j^k) < \frac{\alpha + \varepsilon}{(x_j - x_{j-1})}.$$

Dies ist ein Wiederspruch zur Unbeschränktheit der Folge $f(\xi_j^k)$. Also ist f beschränkt in $[a, x]$.
In einem zweiten Schritt ist die Integrierbarkeit von f im Intervall $[a, x]$ zu zeigen. Dafür ist zu zeigen:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\sigma_0 > 0 \forall Z(\sigma(Z) < \sigma_0 \Rightarrow \overline{S_Z} - \underline{S_Z} < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $\sigma > 0$, so dass für alle Zerlegungen des Intervalls $[a, x]$ mit $\sigma(Z) < \sigma_0$ gilt:

$$|J - \sum_{i=1}^{n_Z} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{8}$$

Sei $M_i = \sup\{f(t)|t \in [x_{i-1}, x_i]$ und $m_i = \inf\{f(t)|t \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f ein $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{8\cdot(x-a)}$ Außerdem gibt es ein $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $f(\xi_i') - m_i < \frac{\varepsilon}{8\cdot(x-a)}$. Es gilt nun:

$$\overline{S_Z} - \underline{S_Z} \leq |\overline{S_Z} - S_Z| + |S_Z - J| + |J - S_Z'| + |S_Z' - \underline{S_Z}|.$$

Die einzelnen Summanden kann man nun wie folgt abschätzen.

1. $|\overline{S_Z} - S_Z| = |\sum\limits_{i=0}^{n_Z}(M_i - f(\xi)) \cdot (x_i - x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{8}$.
2. $|S_Z - J| < \frac{\varepsilon}{8}$ nach Wahl.
3. $|J - S'_Z| < \frac{\varepsilon}{8}$.
4. $|S'_Z - \underline{S_Z}| = |\sum\limits_{i=0}^{n_Z}(f(\xi'_i) - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{8}$.

Es ergibt sich insgesamt: $\overline{S_Z} - \underline{S_Z} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Also ist f im Intervall $[a, x]$ integrierbar.
Zu zeigen bleibt: $J = \int\limits_a^x f(t)dt$. Es ist daher zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|J - \int\limits_a^x f(t)dt| < \varepsilon$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und S_Z so bestimmt wie oben. Dann gilt: $|J - \int\limits_a^x f(t)dt| \leq |J - S_Z| + |S_Z - \int\limits_a^x f(t)dt| < \frac{\varepsilon}{8} + |\overline{S_Z} - \underline{S_Z}| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.□

Nun zum Beweis des Satzes:

Für $a = b$ ist der Satz trivial. Also sei $a < b$. Wir zeigen den Satz mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums. Nach Voraussetzung gibt es zu $\frac{\epsilon}{b-a}$ ein n_0, so dass für alle $x \in I = [a, b]$ gilt: $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Damit folgt:
$|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f_m(t)dt| < \epsilon$. Der gleichmäßige Limes der Folge $|\int_a^x f_n(t)dt|$ existiert also.
Teil 2: Sei $J(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt$. Zu zeigen ist noch, dass $J(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist. Es ist also zu zeigen: Zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ gibt es $\sigma_0 > 0$, so dass für eine Zerlegung Z mit $\sigma(Z) < \sigma_0$ gilt: $|J(x) - \sum\limits_{i=1}^{n_Z} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$. Nach dem Hilfssatz folgt dann die Behauptung. Es ist :

$$
\begin{aligned}
&|J(x) - \sum_{i=1}^{n_Z} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| \\
&\qquad \leq |J(x) - \int_a^x f_n(t)dt| + |\int_a^x f_n(t)dt - \sum_{i=1}^{n_z} f_n(\xi)(x_i) - x_{i-1})| \\
&\qquad\qquad + |\sum_{i=1}^{n_Z} f_n(\xi_i)(x_i) - x_{i-1}) - \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})|
\end{aligned}
$$

1. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a, b]$ ist der erste Summand $< \varepsilon/3$, da $J(x)$ der gleichmäßige Limes der Folge $\int\limits_a^x f_n(t)dt$ ist.

2. Der zweite Summand kann für geeignetes Z kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ gemacht werden, da f_n integrierbar in $[a, x]$ ist.

3. Auch der dritte Summand kann für eine geeignetes Z kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ gemacht werden, da f gleichmäßiger Limes von (f_n) ist. □

Nach dem Hilfssatz folgt nun

$$\int_a^x f(t)dt = g(x) = glm \lim \int_a^x f_n(t)dt.$$

Satz 10.28. *Sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen in $I = [a, b]$. Es gebe ein $c \in [a, b]$, so dass $(f_n(c))$ konvergent ist. Außerdem sei f'_n gleichmäßig konvergent in I. Dann folgt:*

1. *(f_n) ist gleichmäßig konvergent in I.*

2. *Für die Grenzfunktion f gilt: $f'(x) = glm \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.*

Der Satz besagt, dass $\frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$.

Zu 1.Wir zeigen zunächst: (f_n) ist gleichmäßig konvergent. Sei $f_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$ und $f'_{n,m}(x) = f'_n(x) - f'_m(x)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein xi, so dass

$$\frac{f_{n,m}(x) - f_{n,m}(c)}{x - c} = f'_{n,m}(\xi) \tag{10.7}$$

$$f_{n,m}(x) = f'_{n,m}(\xi) \cdot (x - c) + f_{n,m}(c) \tag{10.8}$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(c) - f_m(c)| + |x - c| \cdot |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \tag{10.9}$$

Nach Voraussetzung ist für c die Folge $(f_n(c))$ konvergent und außerdem die Funktionenfolge (f'_n) gleichmäßig konvergent. Es gibt also ein n_1, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt: $|f_n(c) - f_m(c)| \leq \epsilon/2$ und $|x - c| \cdot |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \epsilon/2$. Daher gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_1 \forall M, n \geq n_1 \forall x \in I(|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon).$$

2. Teil Sei g der gleichmäßige Limes der Folge $(f'_n | n \in \mathbb{N})$. Zu zeigen ist, dass gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = g(x_0)$$

Dazu zeigen wir: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $h \neq 0$ und $|h| < \delta$ gilt: $|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0)| < \varepsilon$. Es ist:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0)\right| \leq & \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f_n(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| \\ & + \left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - \frac{f_m(x_0+h)-f_m(x_0)}{h}\right| \\ & + \left|\frac{f_m(x_0+h)-f_m(x_0)}{h} - f'_m(x_0)\right| \\ & + |f'_m(x_0) - g(x_0)|\end{aligned}$$

1. Weil f der gleichmäßige Limes der Folge $(f_n|n \in \mathbb{N})$ ist, gibt es n_1, so dass für alle $n \geq n_1$ und alle $x \in I$ gilt: $|f(x) - f_{n(x)}| < \frac{\varepsilon \cdot |h|}{8}$. Also ist der erste Summand ab n_1 kleiner als $\varepsilon/4$.

2. Es ist $\left|\frac{f_{n,m}(x_0+h)-f_{n,m}(x_0)}{h}\right| = |f'_{n,m}(\xi)$ mit einem ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$. Damit ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $f'_{n,m}$ der zweite Summand $< \varepsilon/4$ ab einem n_2.

3. Wegen der Differenzierbarkeit von f_m, gibt es ein $\delta > 0$,, so dass für $|h| < \delta$ folgt. Der dritte Summand ist $< \varepsilon/4$.

4. Es gibt n_3, so dass für alle $m > n_3$ der vierte Summand $< \varepsilon/4$ ist. Ist $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ und $|h| < \delta$, so ist

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0)\right| < \varepsilon$$

Dies war zu zeigen. □

Beispiele:

75. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} sin(i^2 \cdot x)$ ist zwar gleichmäßig konvergent in $\mathbb{R}$ aber wenn man gliedweise differenziert erhält man eine divergente Reihe.

    Nach dem Kriterium von Weierstrass. Da $\sin(x)| \leq 1$, ibt es eine absolut konvergente Majorante mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Nach dem Kriterium von Weierstrass ist die Reihe gleichmäßig konvergent. Aber die Ableitung ergibt $\sum \frac{1}{i^2} cos(i^2 x) = \sum \cos(i^2 x)$. Dies ist z.b. für $x = 0$ divergent.

10.4.4 Anwendung auf Potenzreihen

In 7.1.13 wurden folgende Sätze gezeigt:

Satz 10.29. *Konvergiert* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *für* x_0*, dann konvergiert* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *für jedes* x *mit* $|x| < |x_0|$ *absolut.*

Der Satz wurde mit dem Quotientenkriterium bewiesen.

Satz 10.30. *Entweder konvergiert* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *oder es gibt ein* $r \geq 0$*, so dass* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *für jedes* x *mit* $|x| < r$ *absolut konvergiert und für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| > r$ *divergiert.* r *heißt dann konvergenzradius der Reihe. Es ist*

$$r = \begin{cases} \infty & \textit{falls die Reihe für alle Zahlen konvergiert} \\ r & \textit{wie im Satz} \end{cases} \tag{10.10}$$

Sei im weiteren r der Konvergenzradius der Reihe.

Satz 10.31. *In jedem Intervall* $[a, b] \subset]-r, r[$ *konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *gleichmäßig und absolut.*

Sei $q = \max\{|a|, |b|\}$ Dann ist $|q| = q < r$. Es konvergiert also $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |c_i x^i|$. Für $x \in [a, b]$ gilt $|x| < q$ und also $|c_i x^i| \leq |c_i q^i|$. Nach dem Kriterium von Weierstrass folgt dann die gleichmäßige und absolute Konvergenz von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ in dem Intervall $[a, b] \subset]-r, r[$. □

Satz 10.32. *Die Reihen* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$*,* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^i$ *und* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i c_i x^i$*, also die Potenzreihe und die zugehörigen Differentialreihe und Integralreihe haben den gleichen Konvergenzradius.*

Sei r der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$. Und es sei r_1 der Konvergenzradius von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}$

Wir zeigen zunächst $r \leq r_1$: Wir müssen also zeigen: Ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ absolut konvergent, dann auch die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}$. Es gilt $\left|\frac{c_i}{i+1} x^{i+1}\right| \leq |c_i x^i|$ genau dann,

wenn $|x| \leq i+1$. Dies ist ab einem gewissen i für beliebiges vorher gegebenes x richtig.
Wir zeigen nun $r_1 \leq r$: Sei $q < r$. Dann gibt es ein x mit $0 \leq q < x < r$. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}$ konvergiert daher absolut. Kann man zeigen:

$$|c_i q^i| \leq \left| \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} \right|$$

ab einem gewissen i, so ist die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left| \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} \right|$ eine Majorante zur Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i q^i$. Wir dürfen $q \neq 0$ voraussetzen. Für $q = 0$ ist dies sowieso der Fall. Es gilt:

$$\begin{aligned} & |c_i \cdot q^i| \leq \left| \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} \right| \\ \iff \quad & \frac{i+1}{q} \leq \left(\frac{x}{q} \right)^{i+1} \\ \iff \quad & \ln(\frac{i+1}{q}) \leq (i+1) \ln(\frac{x}{q}) \end{aligned}$$

Da $\frac{x}{q} > 1$ ist, ist $\ln(\frac{x}{q}) > 0$ Die letzte Ungleichung gilt daher für fast alle i. Damit ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left| \frac{c_i}{i+1} \right| x^{i+1}$ eine Majorante von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i q^i$. Daher ist $r_1 \leq r$.
Die Reihen $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i c_i x^{i-1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1}$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Reihe $\sum\limits_{i=1} \frac{i c_i}{i} x^i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i x^i$. □

Satz 10.33. *Ist $r > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, so ist die Funktion $f :]-r, r[\ni x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i \in \mathbb{R}$ stetig.*

Die Funktionen Partialsummen sind alle stetig. Sei $x_0 \in]-r, r[$, dann gibt es $-r < a < x_0 < b < r$. Nach Satz 10.31 konvergiert die Potenzreihe in dem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig. Daher ist wegen 10.26 die Grenzfunktion stetig. □

Satz 10.34. *In jedem Intervall* $[a,b] \subset]-r,r[$ *gilt:* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *ist in* $[a,b]$ *integrierbar und*

$$\int\limits_a^x \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i\right) dt = glm \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int\limits_a^{xt} t^i dt$$

Satz 10.35. *Ist der Konvergenzradius der Reihe* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i = r$, *so ist* f *in jedem Intervall* $[a,b] subset]-r,r[$ *differenzierbar, und es ist* $f'(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i \cdot c_i \cdot x^{i-1}$.

Die Voraussetzungen des Satzes 10.28 sind erfüllt. Daher folgt die Behauptung. □

Satz 10.36. *Ist* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}$ *und* r *der Konvergenzradius der Reihe, so gilt für* $x \in]-r,r[$:

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}$$

Beispiele:

76. Für $|x| < 1$ ist:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist 1. Also ist im Intervall $]-1,1[$:

$$\int\limits_0^x \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} x^{i+1}$$

77. Für $|x| < 1$ ist $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$. Der Konvergenzradius der Reihe ist 1. Für $x \in]-r,r[$ ist:

$$\int\limits_{i=0}^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} x^{i+1}$$

78. Für $|x| < 1$ ist $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{i=0} (-1)^i x^{2i}$. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist wieder 1. Für $|x| < 1$ gilt daher:

$$\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

10.5 Taylorentwicklung

10.5.1 Der taylorsche Satz

Satz 10.37. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine im ganzen Intervall $(n + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $c \in]a, b[$ und $x \in [a, b]$:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i + R_n(x).$$

Dabei ist $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_c^x (x - t)^n f^{n+1}(t) dt$.

Durch Induktion nach n. Sei $n = 0$. Dann ist $R_0(x) = \int\limits_{i=0}^{x} (x - t)^0 \cdot f'(t) dt = f(x) - f(c)$ wegen dem Hauptsatz.Also ist $f(x) = f(c) + \int\limits_c^x f'(t) dt$.
Induktionsschluss: Sei die Behauptung des Satzes bis zu $k \geq 0$ richtig. Wir beweisen die Behauptung für $k + 1$ durch partielle Integration.

$$\begin{aligned}
R_k(x) &= \frac{1}{k!} \int\limits_c^x (x - t)^k f^{k+1)}(t) dt \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \cdot f^{(k+1)}(t) \right]_c^x - \frac{1}{k!} \int\limits_c^x -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \cdot f^{(k+2)}(t) dt \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot (x - c)^{k+1} \cdot f^{k+1}(c) + \frac{1}{(k+1)!} \int\limits_c^x (x - t)^{k+1} \cdot f^{(k+2)}(t) dt \\
\Rightarrow \quad f(x) &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{i!} (x - c)^i f^{(i)}(c) + R_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

Das war behauptet worden. □

Sei jetzt f beliebig oft differenzierbar. Das heißt $f^n(x)$ existiert für alle $x \in [a,b]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i$ heißt die zur Funktion f gehörende Taylorentwicklung. . Im allgemeinen gilt nicht $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i$.

Satz 10.38. *Sei $< f$ im Intervall $[a,b]$ unendlich oft differenzierbar und für $c, x \in [a,b]$ gelte $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ dann ist $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} \cdot (x-c)^i$.*

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $|R_n(x)| < \varepsilon$ Dann ist $\left| f(x) - \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i \right| = |R_n(x)| < \varepsilon$. □

Eine hinrechende Bedingung für $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ergibt:

Satz 10.39. *Ist $|f^{(i)}(x)| < M$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.*

Es ist

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{n!} \left| \int\limits_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} \int\limits_c^x |x-t|^n \cdot |f^{(n+1)}|dt \\ &\leq \frac{M}{n!}|x-c|^{n+1} \end{aligned}$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x-c|^{n+1}}{n!} = 0$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. □

Satz 10.40 (Cauchys Form des Restgliedes).

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}(x-c)(x-\xi)^n \cdot f^{n+1}(\xi)$$

mit einem ξ zwischen c und x,

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein ξ zwischen c und x mit

$$\frac{1}{x-c} \cdot \int\limits_c^x (x-t)^n f^{n+1}(t)dt = (x-\xi)^n \cdot f^{n+1}(\xi)$$

Satz 10.41 (Lagrange Restglied).

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} f^{n+1}(\xi)$$

mit einem ξ zwischen c und cx.

Für $x = c$ ist die Behauptung trivial erfüllt. Also sei $c < x$ (Für $c > x$ analog.)

$$m = \min\{f^{n+1}(t) | t \in [c, x]\}$$
$$M = \max\{f^{n+1}(t) | t \in [c, x]\}$$

m, M existieren, da f^{n+1} stetig ist. Dann ist:

$$\frac{m}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt \leq R_n(x) \leq \frac{M}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt$$
$$\frac{m}{n!} \cdot \frac{1}{n+1}(x-c)^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{n!} \cdot \frac{1}{n+1}(x-c)^{n+1}$$
$$m \leq \frac{n+1}{(x-c)^{n+1}} \int_c^x (x-c)^n f^n(t) dt \leq M$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ein $\xi \in [c, x]$ mit:

$$f^{n+1}(\xi = \frac{n+1}{(x-c)^{n+1}} \int_c^x (x-c)^n f^n(t) dt$$
$$\Rightarrow \quad R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

10.5.2 Die Taylorentwicklung der elementaren Funktionen

Exponentialfunktion $exp : \mathbb{R} \neq x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$.
Sei $c = 0$. Dann ist die Taylorentwicklung

$$f(x) = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Es ist $f(0) = 1$, $f'(0) = 1 \ldots$. Die Lagrange Form des Restgliedes ist: $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \exp(\xi)$ Mit einen ξ zwischen 0 und x. Dann ist:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{|x|} = 0$. Daher ist $e^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist ∞ wegen dem Quotientenkriterium. Für $x = 1$ gilt $e = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ Und wir erhalten

$$\begin{aligned}
0 < e - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right) \\
&< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right)\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung lässt sich leicht zeigen, dass e nicht rational ist. Angenommen $e \in \mathbb{Q}$. Es sei $e = \frac{p}{q}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{p}{q} - \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{i!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q} < 1 | \cdot q! \\
0 &< (q-1)! \cdot p - \sum_{i=0}^{q} \frac{q!}{i!} < \frac{1}{q} < 1
\end{aligned}$$

Das geht nicht, da auf der linken Seite ein Element aus $\mathbb{N}$ steht.

Sinus und Cosinus: Es ist:

$$\begin{aligned}
f(x) &= sin(x) \Rightarrow f(0) = 0 \\
f'(x) &= cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f^2(x) &= -sin(x) \Rightarrow f^2(0) = 0 \\
f^3(x) &= -cos(x) \Rightarrow f^3(0) = -1 \\
f^4(x) &= sin(x) \Rightarrow f^4(0) = 0
\end{aligned}$$

Als Taylorentwicklung von sin ergibt sich:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{10.11}$$

Es ist $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot \begin{cases} \pm \sin(\xi) \\ \pm \cos(\xi) \end{cases}$, wegen der Lagrangeschen Form des Restgliedes. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

15. März 2017

Definition 152. Für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{10.12}$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \tag{10.13}$$

Wegen $\frac{x^{2i+3}}{(2i+3)!} / \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{x^2}{(2i+2)(2i+3)} < 1$ für genügend großes i, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass der Konvergenzradius der Potenzreihen jeweils ∞ ist.

Satz 10.42. *Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$*

1. $\sin'(x) = \cos(x)$ *und* $\cos'(x) = -\sin(x)$.
2. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Zu 1. Dies sieht man durch gliedweises Differenzieren.
Zu 2. Differenziert man die linke Seite, so erhält man: $2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) = 0$. Das heißt $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ ist eine Konstante. Setzt man 0 ein, so erhält man $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. □

Mit einer kleinen Zusatzüberlegung sieht man, dass wir in 2. mehr gezeigt haben.
Dazu betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + D \cdot y = 0 \tag{10.14}$$

Satz 10.43. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung 10.14, so ist $D \cdot f^2 + f'^2$ eine Konstante.*

Dies sieht man durch differenzieren. □

Satz 10.44. *Die Differentialgleichung 10.14 hat genau eine Lösung mit $f(c) = a, f'(c) = b$ und wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben sind.*

Es gibt höchstens eine Lösung: Seien f, g Lösungen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} h &= fg' - f'g \\ h' &= f'g' + fg'' - (f''g + f'g') \\ &= fg'' - f''g = -Dfg + Dfg = 0 \end{aligned}$$

Also ist h eine Konstante. Es folgt $h(c) = f(c)g'(c) - f'(c)g(c) = ab - ba = 0$. Außerdem ist:

$$\begin{aligned} l &:= Dfg + f'g' \\ l' &= Df'g + Dfg' + f''g' + f'g'' = 0 \end{aligned}$$

Also ist l eine Konstante. $l(x) = D \cdot g(c)^2 + g'(c)^2$ für alle x. Wir erhalten die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} fg' - f'g &= 0 \\ Dfg + f'g' &= k \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit g' und die zweite mit g und addieren die beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} Dfg^2 + fg'^2 &= k \cdot g \\ f \cdot k &= k \cdot g \\ f &= g \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.
Es bleibt noch nachzuweisen, dass eine Funktion die Differentialgleichung löst. Es sei $\omega := \sqrt{D}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x) \\ f'(x) &= \alpha\omega \cos(\omega x)\beta\omega \sin(\omega x) \\ f''(x) &= -\alpha\omega^2 \sin(\omega x) - \beta\omega^2 \cos(\omega x) \\ &= -Df(x) \end{aligned}$$

f löst daher für beliebiges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung. Es müssen α, β noch derart bestimmt werden, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Wir müssen folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} \alpha \sin(\omega c) + \beta cos(\omega c) &= a \\ \alpha\omega \cos(\omega c) - \beta\omega \sin(\omega c) &= b \end{aligned}$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist $-(\omega \sin^2(\omega c) + \cos^2(\omega c)) = -\omega \neq 0$. Daher ist dieses Gleichungssystem für beliebiges a, b, c lösbar. □

Folgerung 10.45 (Additionstheorem). *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

1. Wir betrachten die beiden Funktionen $f(x) := \sin(x+b)$ und $g(x) := \sin(x)\cdot\cos(b) + \cos(x)\cdot\sin(b)$. Beides sind Lösungen der Differentialgleichung:

$$y'' + y = 0$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = \sin(b)$ und $f'(0) = \cos(b)$. Daher ist $f = g$.

2. Übung. □

Folgerung 10.46. *1.* $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$.

2. $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$

3. $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$.

Binomische Reihe Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.Nach Definition ist für $x > -1$: $f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha\cdot\lg(1+x)}$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow \quad f'(0) = \alpha \\
f^2(x) &= \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow \quad f^2(0) = \alpha\cot(\alpha-1) \\
\vdots &= \vdots \\
f^n(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

Es wird definiert:

$$\binom{\alpha}{i} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}; \binom{\alpha}{0} := 1 \tag{10.15}$$

Für $\alpha = k \in \mathbb{N}$ und $i \leq k$ stimmt dies mit der früheren Definition überein. Für $i > k$ ist $\binom{k}{i} = 0$. Dann ergibt sich als Taylorentwicklung:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i \tag{10.16}$$

Für $\alpha = k \in \mathbb{N}$ ist dies die bekannte Binomialentwicklung und es ist. $(1+x)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i$ ein Polynom.
Sei jetzt $\alpha \notin \mathbb{N}$. Dann ist:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n f^{n+1}(t) dt \\ &\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= \alpha \binom{\alpha-1}{n} \int\limits_0^x (1+t)^{\alpha-1} \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt \end{aligned}$$

Setzt man $t = \tau x$ mit $\tau \in [0,1]$ (da $t \in [0,x]$ geht da, erhält man:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-t}{1+t}\right| &= \left|\frac{x-x\tau}{1+x\tau}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right| \\ &\leq \begin{cases} |x| \frac{1}{1+x\tau} \leq |x| \text{ für } x \geq 0 \\ |x| \left|\frac{1}{1-x\tau}\right| \leq |x| \text{ für } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$|R_n(x)| \leq |\alpha| \cdot \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| |x|^n \cdot \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt$$

Es sei $A = |\alpha| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt$ und $b_n = \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| |x|^n$, $b_{n+1} = b_n \cdot \left|\frac{\alpha-n-1}{n}\right| |x|$. Sei jetzt $|x| < 1$ und q mit $|x| < q < 1$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$ ist für fast alle $\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| |x| < q$ und daher $b_{n+1} < b_n \cdot q$. Daher ist a einem gewissen n_0 $b_{n_0+i} \leq b_{n_0} \cdot q^i$. Es folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = \lim\limits_{n\to\infty} b_n A = 0$. Wir habe daher für $|x| < 1$ die Taylorentwicklung von $(1+x)^\alpha$.

arcsin

$$\begin{aligned} \arcsin &= \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ f'(x) &= (1-x)^{-1/2} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-1/2}{i} (x^2)^i \text{ für } |x| < 1 \end{aligned}$$

Mit der Binomialreihe ergibt sich:

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \dots \\ \frac{\pi}{2} &= 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \dots\end{aligned}$$

arctan: Es ist:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

Wir entwickeln an der Stelle 0.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^{2i}$$

für $|x| < 1$. Diese Darstellung gilt nicht nur für $|x| < 1$. sondern auch für $|x| = 1$
Es ist nach der geometrischen Summenformel:

$$1 + (-1)x^2 + ((-1)x^2)^2 + \dots + ((-1)x^2)^n = \frac{1 - ((-1)x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2} &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}dt \\ \left|\int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}dt\right| &\le \left|\int_0^x t^{2(n+1)}dt\right| = \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right| \\ &\le \frac{1}{2n+3} \text{ für } |x| \le 1\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

Für $x = 1$ ergibt sich: $\arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Folgerung 10.47. $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Eigentlich wissen wir das schon. Aber wir wollen es nochmal zeigen.
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Es ist $f(0) = 1$ und $f(\pi/2) = -1$. Im Intervall $]0, \pi/2$ hat die Funktion eine Nullstelle α. Es ist $0 < 2\alpha < \pi$. $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = 0$. Also ist 2α die erste positive Nullstelle von $\cos(x)$. Daher ist $2\alpha = \pi/2$ und daher $\alpha = \pi/4$. Es ist $\tan(\pi/4) = 1$ und daher $\arctan(1) = \pi/4$. □

An dieser Stelle sollte man das folgende ergänzen:

1. π ist nicht rational. Der Beweis in Krätzel ist zwar elementar aber gekünstelt.

2. e ist transzendent. π ist nicht rational. Der Beweis in Krätzel ist zwar elementar aber gekünstelt.

10.5.3 Anwendung auf die Kurvendiskussion

$f : A \to \mathbb{R}$ sei eine im Punkt $a \in A$ differenzierbare Funktion. Die Gerade durch $(a, f(a))$ mit der Steigung $f'a$ heißt Tangente im Punkt $(a, f(a))$ an den Graphen von f. Die Tangente hat die Gleichung:

$$t(x) = f(a) + (x - a) \cdot f'(a) \tag{10.17}$$

Das sind die ersten beiden Glieder der Taylorentwicklung von f im Punkt a.

Definition 153. $f : A \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $a \in A$ konvex, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so dass $f(x) \geq t(x)$ für alle $x \in U$ ist. f heißt im Punkt $a \in A$ konkav, wenn es eine Umgebung a gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt $f(x) \leq t(x)$.

Satz 10.48. *Sei f im Intervall $[a, b]$ differenzierbar für $c \in]a, b[$. Dann gilt: f hat im Punkt c einen relativen Extremwert genau dann, wenn $f'(c) = 0$ und f im Punkt c konkav oder konvex ist.*

$\Rightarrow$: $f'(c) = 0$ wurde früher gezeigt. Es ist $t(x) = f(c) + f'(c)(x - c) = f(c)$. Hat f an der Stelle c ein relatives Minimum, so gibt es eine Umgebung U von c mit $f(x) \geq f(c) = t(x)$ für alle $x \in U$. Daher ist f konvex an der Stelle c.
Hat f an der Stelle c ein relatives Maximum, so ist $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in U$. Daher ist $f(x) \leq f(c) = t(x)$. Also ist f konkav.
$\Leftarrow$: Es ist $t(x) = f(c)$. Ist f konvex, so ist $f(x) \geq t(x) = f(c)$ für alle x aus einer Umgebung U. Also hat f bei c ein relatives Minimum. □

Definition 154. $f : A \to \mathbb{R}$ hat in $a \in A$ einen Wendepunkt, wenn es eine Umgebung U von a gibtmit:

1. $f(x) \leq t(x)$ für alle $x \in U$ und $x \leq a$.
2. $f(x) \geq t(x)$ für alle $x \in U$ und $x \geq a$.

oder umgekehrt. Das Konvexitätsverhalten ändert sich bei a.

Satz 10.49. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ k mal stetig differenzierbar. Es gelte $f''(c) = \cdots = f^{(k-1)()}(c) = 0$ und $f^{(k)}(c) \neq 0$. Dann gilt:*

1. *Ist k gerade und $f^{(k)}(c) > 0$, so ist f konvex an der Stelle c.*
2. *Ist k gerade und $f^{(k)}(c) < 0$, so ist f konkav an der Stelle c.*
3. *Ist k ungerade und $f^{(k)}(c) > 0$, so ist an der Stelle c ein Wendepunkt (konkav nach konvex)*
4. *Ist k ungerade und $f^{(k)}(c) < 0$, so ist an der Stelle c ein Wendepunkt (konvex nach konkav)*

Mit der Taylorentwicklung von f. Am Anfang steht $t(x)$. $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + \frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$, mit einem ξ zwischen c und x. Es folgt

$$f(x) - t(x) = \frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(\xi).$$

1. Ist k gerade, so ist $\frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) \geq 0$ und > 0 falls $x \neq c$. Wegen $f^{(k)}(c) > 0$ und stetig $f^{(k)}$ gibt es eine Umgebung U von c, so dass $f^{(k)}$ in der ganzen Umgebung > 0 ist. Also ist auch $f^{(k)}(\xi) > 0$. Es folgt $f(x) - t(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dies war zu zeigen.
2. Analog.
3. Analog.
4. Analog. □

10.5.4 Unbestimmte Ausdrücke

Seien die Funktionen f, g mit $f(c) = g(c) = 0$ gegeben. Wir untersuchen die Frage wann es einen Grenzwert von $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ gibt und wie er sich berechnet. Beispielsweise: Was ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x}$

Satz 10.50. *Sei f in $[a, b]$ k mal stetig differenzierbar und g sei in $[a, b]$ l mal stetig differenzierbar. Für $c \in [a, b]$ gelte:*

$$f(c) = f'(c) = \dots f^{(k-1)}(c) = 0 \text{ und } f^{(k)}(c) \neq 0$$
$$g(c) = g'(c) = \dots f^{(l-1)}(c) = 0 \text{ und } g^{(l)}(c) \neq 0$$

Dann gilt:

$$\lim = \begin{cases} 0 \text{ für } k > l \\ \dfrac{f^k(c)}{g^{(k)}(c)} \text{ für } k = l \\ \pm\infty \text{ für } k < l \text{ und } l - k \text{ gerade} \\ \text{ existiert nicht für } k < l \text{ und } l\text{-}k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir benutzen die taylorsche Formel mit dem Lagrangeschen Restglied.

$$f(x) = R_{k-1}(x) = \frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) \text{ mit } \xi \text{ zwischen } x, c$$
$$g(x) = R_{l-1}(x) = \frac{(x-c)^l}{l!} g^{(l)}(\delta) \text{ mit } \delta \text{ zwischen } x, c$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitungen ist $\lim\limits_{x \to c} f^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(c)$ und $\lim\limits_{x \to c} g^{(l)}(\delta) = g^{(l)}(c)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{l!}{k!} \lim_{x \to c} (x-c)^{k-l} \cdot \frac{f^{(k)}(c)}{g^{(l)}(c)} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ für } k > l \\ \dfrac{f^{(k)}(c)}{g^{(k)}(c)} \text{ für } k = l \\ \pm\infty \text{ für } k < l \text{ und } l - k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem existiert $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{(x-c)^{l-k}}$ nicht, wenn $l - k$ ungerade ist. Es folgt die Behauptung. □

Beispiele:

79. $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

80. $f(x) = 1 - \cos(x), g(x) = \sin(x^2), c = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x^2)} = \frac{1}{2}$.

81. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$ existiert nicht.

82. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3} = \infty$.

Satz 10.51 (Regel von l' Hopital). *Seien f, g differenzierbar in dem offenen Intervall $]a, \infty$. Es gelte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ und es existiere $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ist $g'(x) \neq 0$ für alle x ab einem gewissen a, so gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \geq a$ gilt $g'(x) \neq 0$. Seien $x, y \geq a$ mit $x \neq y$. Es ist $\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(\alpha) \neq 0$ für ein $\alpha \geq a$ wegen dem Mittelwertsatz. Daher ist $g(x) \neq g(y)$ für alle $x, y \geq a$ mit $x \neq y$. Es gibt daher höchstens eine Nullstelle größer als a. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass a schon so groß gewählt ist, dass $g(y) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ ist für alle $x, y \geq a$. Es sei $\omega = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Es gilt:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \omega\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \omega\right| \text{ für alle } x, y \geq a$$

Wir schätzen jetzt die beiden Summanden ab.
Beginnen wir mit dem 2. Summanden. Da $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \omega$ ist, gibt es ein $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \geq K$ gilt: $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \omega\right| < \varepsilon/2$. Wieder können wir annehmen $a > K$. Dann ist $\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \omega\right| = \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - \omega\right|$ für ein $z \geq a$ zwischen x und y. Also ist für den 2ten Summanden: $\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \omega\right| < \varepsilon/2$ für alle $x, y > a$.
Es bleibt der erste Summand abzuschätzen. Hier unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. In dieser Situation gilt: $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Es gibt daher ein $c > 0$, so dass für alle $y > c$ gilt: $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| < \varepsilon/2$. Damit folgt die Behauptung.

2. Betrachten wir nun den ersten Summanden im Falle dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ ist. Es ist:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| \leq \left|\frac{f(x). - f(y)}{g(x)-g(y)}\right| \left|\frac{f(x)(g(x)-g(y))}{g(x)(f(x)-f(y))} - 1\right|$$

Der erste Faktor ist ab einem gewissen a in $\mathbb{R}$ beschränkt. Der zweite Faktor strebt für jedes $y \geq a$ gegen 0 falls $x \to \infty$ geht. Es ergibt sich die Behauptung. $\square$

Beispiele:

83. $f(x) = \lg(x)$ $g(x) = x^\alpha$ mit $\alpha > 0$. Es ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Man erhält § $\lim\limits_{xto\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0$.

84. $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = e^{\beta x}$ mit $\alpha, \beta > 0$. Man rechnet nach der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen

11.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

11.1.1 Explizite Differentialgleichungen

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Gleichung

$$y' = f(x, y) \tag{11.1}$$

heißt explizite Differentialgleichung 1ter Ordnung.
Wenn wir in Zukunft von einem Intervall reden, so kann diese Menge ein abgeschlossenes, offenes, halboffenes, eine Halbgerade oder die ganze reelle Zahlengerade sein.

Definition 155. Sei $\mathbb{J}$ ein Intervall. Eine in $\mathbb{J}$ differenzierbare Funktion

$$\varphi : \mathbb{J} \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$$

heißt Lösung der Differentialgleichung 11.1, wenn $(x, \varphi(x)) \in D$ für alle $x \in \mathbb{J}$ ist und es gilt: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Als eine Beispielklasse wollen wir die Differentialgleichung mit getrennten Variablen betrachten.

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{11.2}$$

Zunächst behandeln wir sie lax heuristisch. Es ist also $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ oder $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Durch Integration gewinnen wir die Gleichung:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Diese Gleichung lösen wir nach y auf. Dies Verfahren präzisisieren wir nun. Wir wollen die Differentialgleichung 11.2 mit dem Anfangswertproblem $\varphi(\xi) = \eta$ lösen. Es sei f im Intervall J_x und g im Intervall J_y stetig. $\xi \in J_x$ und $\eta \in J_y$.

Satz 11.1. *Sei η ein innerer Punkt von J_y und $g(\eta) \neq 0$. f sei im Intervall J_x stetig und g im Intervall J_y. Dann gibt es eine Umgebung (falls ξ ein Randpunkt von J_x ist, eine einseitige) vonξ in der es genau eine Lösung φ der 11.2 gibt mit $\varphi(\xi) = \eta$.*

Es gibt eine ganze Umgebung von η in der $g(s) \neq 0$ ist für alle s aus dem Intervall. Also ist $\int\limits_{\eta}^{y} \frac{1}{g(s)} ds$ wohldefiniert. Da $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ ist, ist G local invertierbar. Sei etwa H die Umkehrfunktion. Sei $F(x) = \int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt$. Wir lösen die Gleichung

$$G(y) = F(x)$$

nach y auf und erhalten: $y(x) = H(F(x))$. Wir wollen zeigen, daß $y(x)$ Lösung der Differentialgleichung 11.2 ist. Es ist $G(y(x)) = F(x)$. Differenzieren wir nach x, so erhalten wir: $G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x) = f(x)$. Mit $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ folgt: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$. Außerdem ist $F(\xi) = 0$ und $G(\eta) = 0$. Damit ist $H(0) = \eta$. Also erfüllt unsere Lösung die Anfangsbedingung.
Wir wollen nun noch nachweisen, daß die Lösung zu dieser Anfangsbedingung eindeutig ist. Sei $z(x)$ eine weitere Lösung. Ist nun $z(x) \neq 0$, dies ist in einer Umgebung von ξ sicherlich richtig, so folgt: $\frac{z'(x)}{g(z(x)} = f(x)$. Integriert man diese Identität in einem Bereich zwischen ξ und x, so folgt: $\int\limits_{\xi}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t))} = \int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt$. Nun ist nach der Substitutionsregel $\int\limits_{\xi}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t)} dt = \int\limits_{\eta}^{z(x)} \frac{ds}{g(s)} ds$. Also ist $F(x) = G(z(x))$. Also $z(x) = H(F(x)) = y(x)$. □

12 Funktionentheorie

12.1 Analytische Funktionen

12.1.1 Differenzierbare Funktionen

Definition 156. Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in A$. $f : A \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar an der Stelle a genau dann, wenn es eine stetige Funktion $\delta : A \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = f(a) + (z - a) \cdot \delta(z)$.

12.1.2 Analytische Funktionen

12.1.3 Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen

12.2 Integrationstheorie

12.2.1 Wegintegrale

Wege

Definition 157.

1. Jede stetige Abbildung $\omega : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt Parameterdarstellung.
2. Zwei Parameterdarstellungen $\omega_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\omega_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ heißen äquivalent $\sim$ genau dann, wenn es eine stetige Bijektion $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ gibt mit
   a) $\Phi(a) = c$ und $\Phi(b) = d$.
   b) $\omega_1 = \omega_2 \circ \Phi$.

Bemerkung 23 Es gilt:

1. Eine stetige Bijektion $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ mit $\Phi(a) = c$ und $\Phi(b) = d$ ist stets streng monoton wachsend und ein Homöomorphismus.
2. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
3. $\omega_1 \sim \omega_2$, dann ist $Bi(\omega_1) = Bi(\omega_2)$

1. Wir zeigen zunächst, dass Φ streng monoton wachsend ist. Angenommen das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es zwischen a und b ein $x < y$, so dass $\Phi(y) \geq \Phi(x)$ ist. Man hat also

$$c = \Phi(a) < \Phi(y) \leq \Phi(x) < d$$

   Nach dem Zwischenwertsatz muß es ein $z \in [c, x]$ geben mit $\Phi(y) = \Phi(z)$. Da aber $z \leq x < y$ ist, widerspricht das der Bijektivität von Φ.

   Mit Φ ist auch die Umkehrfunktion $\Phi^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ streng monoton wachsend also stetig.

2. Sicherlich ist die Relation reflexiv. Es sei $\omega_1 \sim \omega_2$. Es gibt daher eine stetige Bijektion $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ mit $\omega_1 = \omega_2 \circ \Phi$. Also ist $\omega_2 = \omega_1 \circ \Phi^{-1}$. Daher ist $\omega_2 \sim \omega_1$. Die Symmetrie ist daher richtig.

3. Transitivität rechnet man nach. □

Definition 158. 1. Der Weg $\mathcal{W}_0 = \{\omega|$ Parameterdarstellung ω und $\omega \sim \omega_0\} =$ Von ω_0 erzeugte Äquivalenzklasse.

2. Sei Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Z}_{[\mathrm{a,b}]}$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$

   a) $l(\omega, Z) = \sum_{i=1}^{n} |\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})|$

   b) $L(\omega) := \{l(\omega, Z)|Z \in \mathcal{Z}_{[\mathrm{a,b}]}\}$

   c) ω heißt rektifizierbar genau dann, wenn $L(\omega)$ beschränkt ist.

   d) Ist ω rektifizierbar, so definiert man: Länge(ω): $= l(\omega) = sup(L(\omega))$

Satz 12.1. *Sei $\omega_1 \sim \omega_2$. Dann gilt:*

1. *ω_1 ist genau dann rektifizierbar, wenn ω_2 rektifizierbar ist.*

2. *$\omega_1 \sim \omega_2$ und ist ω_1 und also auch ω_2 rektifizierbar, so ist $l(\omega_1) = l(\omega_2)$.*

Beh: $L(\omega_1) = L(\omega_2)$
Sei Z_1 eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist

$$l(\omega_1, Z_1) = \sum_{i=1}^{n} |\omega_1(t_i) - \omega_1(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |\omega_2\Phi(t_i) - \omega_2\Phi(t_{i-1})|$$

Da Φ streng monoton wächst, ist $\{\Phi(a) = c, \Phi(t_1), \ldots, \Phi(b) = d\}$ eine Zerlegung Z_2 von $[c, d]$. Also folgt: $l(\omega_1, Z_1) = l(\omega_2, Z_2)$. Damit ergibt sich: $L(\omega_1) = L(\omega_2)$ □

15. März 2017

Die folgende Definition ist also sinnvoll.

Definition 159. Ein Weg $\mathcal{W}$ heißt rektifizierbar, wenn es aus der Äquivalenzklasse $\mathcal{W}$ eine Parameterdarstellung ω gibt, die rektifizierbar ist. Damit sind natürlich alle äquivalenten Parameterdarstellungen rektifizierbar.

Wegintgerale

Sei $B = B_{[a,b]}$ =Menge der beschränkten Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$

Definition 160. Auf B wird eine Norm definiert: $||f|| = sup\{f(t)|t \in [a, b]\}$. Dazu gehört die Metrik $\rho = ||f - g||$.
g heißt Treppenfunktion von $[a, b]$ genau dann, wenn es eine Zerlegung $\{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so daß g auf allen offenen Teilintervallen $]t_{i-1}, t_i[$ konstant ist.

$\mathbb{T}_{[a,b]} = \mathbb{T} :=$ Menge der Treppenfunktionen von $[a, b]$.

Folgerung 12.2. *Es gilt:*

1. *(B, ρ) ist ein vollständiger metrischer Raum.*
2. *Jede Treppenfunktion ist beschränkt.*
3. *Die Menge der Treppenfunktionen bilden eine $\mathbb{C}$ – Algebra über $\mathbb{C}$*

Die Aussagen 1) und 2) sind allgemein bekannte Tatsachen. Siehe zum Beispiel das Buch von Serge Lang Lang, *Analysis*.
Zu 3): Sei Z_1 eine Zerlegung zu der Treppenfunktion g_1 und Z_2 eine Zerlegung zu der Treppenfunktion g_2. Z sei die gemeinsame Verfeinerung etwa $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Ist $]t_{i-1}, t_i[$ ein Teilintervall von Z, so ist (t_{i-1}, t_i) ein Teilintervall von Z_1 und Z_2. Also ist g_1 und g_2 auf diesem Teilintervall konstant. Daher ist ihre Summe und ihr Produkt konstant. Der Rest der Aussage ist trivial. □

Satz 12.3. *Es gilt:*

1. *Die abgeschlossene Hülle von $\mathbb{T}$ also $\overline{\mathbb{T}}$ ist eine $\mathbb{C}$– Algebra.*
2. *Jede stetige Funktion gehört zur abgeschlossenen Hülle von $\mathbb{T}$.*

Zu 1): Seien h_1 und $h_2 \in \overline{\mathbb{T}}$. Dann gibt es Treppenfunktionen g_1 und g_2 mit:

$$||h_1 - g_1|| < \frac{\epsilon}{2} \quad ||h_2 - g_2|| < \frac{\epsilon}{2}$$

Damit ist

$$||h_1 + h_2 - (g_1 + g_2)|| \leq ||h_1 - g_1|| + ||h_2 - g_2|| < \epsilon$$

Die Behauptung für das Produkt zeigt man so:
$||h_1 \cdot h_2 - g_1 \cdot g_2|| = ||h_1 \cdot h_2 - g_1 \cdot h_2 + g_1 \cdot h_2 - g_1 \cdot g_2|| \leq ||h_2|| \cdot ||h_1 - g_1|| + ||g_1|| \cdot ||h_2 - g_1||$.
Daraus folgt mit ein wenig Epsilontik die Behauptung.
Zu 2): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f auf dem kompakten Intervall gleichmäßig stetig. Das heißt es gibt ein $\delta > 0$, so daß für alle x, x' mit $|x - x'| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.
Wir wählen nun eine Zerlegung Z derart, daß jedes Teilintervall kürzer als δ ist.
Sei dazu $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{m} < \delta$ und $t_i := a + i \cdot \frac{b-a}{m}$

$$g(t) := \begin{cases} h(t_{i-1}) & \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i) \\ h(b) & \text{für } t = b \end{cases}$$

g ist eine Treppenfunktion und es gilt:

$$|h(t) - g(t)| = \begin{cases} |h(t) - h(t_{i-1})| & \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i) \\ |h(b) - h(b)| = 0 & \text{für } t = b \end{cases}$$

In jedem Fall ist $|h(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ Also ist $||h - g|| < \epsilon$. □

In dem Buch von Dieudonné J.Dieudonné, *foundation of modern analysis*Seite werden halbstetige Funktionen betrachtet. Auch sie sind in $\overline{\mathbb{T}}_{[a,b]}$ enthalten.
Sei nun $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Parameterdarstellung. Wir erklären ein lineares Funktional vom Vektorraum $\overline{\mathbb{T}}$ nach $\mathbb{C}$, indem wir dieses Funktional zuerst auf der Menge der Treppenfunktionen betrachten und dann hochziehen.

Definition 161. Ist g eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z, so sei

$$I_w^0(g) := \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \cdot (w(t_i) - w(t_{i-1}))$$

Bemerkung 24 $I_w^0(g)$ ist unabhängig von der Zerlegung, wenn nur g auf jedem Teilintervall der Zerlegung konstant ist. □

Da also zu jeder Treppenfunktion g $I_w^0(g)$ eindeutig bestimmt ist, kann nun definiert werden:

Definition 162. $I_w^0 : \mathbb{T} \ni \mathrm{g} \mapsto \mathrm{I_w^0(g)} \in \mathbb{C}$

Bemerkung 25 I_w^0 ist linear und wenn w rektifizierbar ist, so ist I_w^0 gleichmäßig stetig □

Die erste Aussage ist trivial.
Zur zweiten Aussage: Es ist $|I_w^0(g)| \leq ||g(t)|| \cdot l(w)$. Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Dann sei $\delta = \frac{\epsilon}{l(w)+1}$. Sind g_1, g_2 zwei Treppenfunktionen mit $||g_1 - g_2|| < \delta$, so ist $|I_w^0(g_1 - g_2)| \leq ||g_1 - g_2|| \cdot l(w) < \epsilon$. Damit ist I_w^0 gleichmäßig stetig. □

Es existiert eine Fortsetzung I_w von I_w^0 auf $\overline{T}$, wobei die Fortsetzung eindeutig bestimmt und wieder gleichmäßig stetig ist.
Sei nun im weiteren w stets als rektifizierbar vorausgesetzt. Wir erklären dann:

Definition 163. $\displaystyle\int_a^b f(t)dw(t) := I_w(f)$

Satz 12.4. *I_w ist linear also ein $\mathbb{C}$–Homomorphismus.*

I_w ist additiv: Seien $f_1, f_2 \in \overline{T}$. Da I_w gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$||f_1 - f_2|| < \delta \Longrightarrow |I_w(f_1) - I_w(f_2)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Da f_1 und f_2 aus der abgeschlossenen Hülle von $\mathbb{T}$ ist, gibt es $g_1, g_2 \in \mathbb{T}$ mit $||f_1 - g_1|| < \frac{\epsilon}{3}$ und $||f_2 - g_2|| < \frac{\epsilon}{3}$.
Damit ergibt sich für alle $t \in [a, b]$ $|f_1(t) + f_2(t) - g_1(t) - g_2(t)| \leq |f_1(t) - g_1(t)| + |f_2(t) - g_2(t)| < \frac{2}{3} \cdot \delta$. Damit ist $||(f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)|| < \delta$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von I_w ergibt sich nun : $|I_w(f_1 + f_2) - I_w(g_1 + g_2)| < \frac{\epsilon}{3}$.
So erhält man:

$$\begin{aligned}
& |I_w(f_1 + f_2) - (I_w(f_1) + I_w(f_2))| \\
= \; & |I_w(f_1 + f_2) - I_w(g_1 + g_2) - I_w(f_1) + I_w(g_1) - I_w(f_2) + I_w(g_2)| \\
= \; & |I_w(f_1 + f_2) - I_w(g_1 + g_2)| + |I_w(g_1) - I_w(f_1)| + |I_w(g_2) - I_w(f_2)| \\
< \; & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Das heißt I_w ist additiv.
Zu zeigen bleibt: Für $z \in \mathbb{C}$ und $f \in \overline{\mathbb{T}}$ gilt: $I_w(z \cdot f) = z \cdot I_w(f)$.
Sei dazu ein $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$||f_1 - f_2|| < \delta \Longrightarrow |I_w(f_1) - I_w(f_2)| < \frac{\epsilon}{3 \cdot |z|}$$

Zu diesem δ gibt es eine Treppenfunktion g_1 mit $||f - g_1|| < \frac{\delta}{(|z|+1) \cdot 2}$. Daraus folgt: $|z \cdot f(t) - z \cdot g(t) = |z| \cdot |f(t) - g(t)| < \frac{\delta}{2}$. Und also $|I_w(z \cdot f) - z \cdot I_w(g)| =$

$|I_w(z\cdot f)-I_w(z\cdot g)-z\cdot I_w(g)+z\cdot I_w(g)| \leq |I_w(zf)-I_w(zg)|+|z\cdot I_w(f)-z\cdot I_w(g)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}$ □

Beispiele:

85. $w = 1_{[a,b]}$. Das heißt $w(t) = t$. Ist dann $f \in \overline{T}$ so ist $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$. Dabei sind u, v reelle Funktionen. Daher folgt:

$$\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

86. $\int_a^b e^{it}dt = \int_0^{2\pi} cos(t)dt + i \cdot \int_0^{2\pi} sin(t)dt$

Satz 12.5. *Ist $f \in \overline{T}$, dann ist*

$$\left|\int_a^b f(t)dw(t)\right| \leq l(w) \cdot ||f||$$

Für eine Treppenfunktion g gilt: $|I_w(g)| \leq |\sum_{i=1}^{n} g(\frac{t_i+t_{i-1}}{2})\cdot(w(t_i)-w(t_{i-1})| \leq ||g|| \cdot \sum_{i=1}^{n} |w(t_i) - w(t_{i-1}| \leq ||g|| \cot l(w)$

Sei nun $f \in \overline{T}$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Weiter sei $\delta > 0$, sodaß für jedes $h \in \overline{T}$ mit $||f - h|| < \delta$ gilt: $|I_w(f) - I_w(g)| < \frac{\epsilon}{2}$. Nun sei $\delta_0 := \frac{1}{l(w)+1} \cdot min(\delta, \frac{\epsilon}{2})$. Ist dann $||f - g|| < \delta_0$, so folgt für beliebige $t \in [a, b]$: $|g(t)| \leq |f(t)| + \delta_0$ und also $||g|| \leq ||f|| + \delta_0$.

Damit folgt $|\int_a^b f(t)dw(t)| \leq |I_w(f) - I_w(g)| + |I_(g)| \leq \frac{\epsilon}{2} + ||g|| \cdot l(w) \leq \frac{\epsilon}{2} + (||f|| + \delta_0) \cdot l(w) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + ||f|| \cdot l(w)$ □

Satz 12.6. *$w_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $w_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ seien zwei äquivalente rektifizierbare Parameterdarstellungen. Außerdem sei $F : A \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist. Dabei sei das Bild von w_1 und also das Bild von w_2 in A. Dann gilt:*

$$\int_a^b F(w_1(t))dw_1(t) = \int_c^d F(w_2(t)dw_2(t).$$

Sei etwa $w_1 = w_2 \circ \Phi$. Wobei $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ eine eigentlich monoton wachsende stetige Bijektion ist.

$$\int_a^b F(w_1(t))dw_1(t) = \int_a^b (F \circ w_2 \circ \Phi)(t)d(w_2\Phi)(t)$$

Bezeichnen wir mit $f := F \circ w_2$, dann sieht die Behauptung des Satzes folgendermaßen aus:

$$\int_a^b (f \circ \Phi)(t) d(w_2 \circ \Phi)(t) = \int_c^d f(t) dw_2(t).$$

Wir zeigen den Satz in 4 Schritten:
1) Ist g eine Treppenfunktion über $[c, d]$, so ist $g \circ \Phi$ eine Treppenfunktion über $[a, b]$.
Sei $Z = \{c = t_0, t_1, \ldots, t_n = d\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[c, d]$ derart, daß g eine Treppenfunktion zu dieser Zerlegung ist. $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ ist eine monoton wachsende Bijektion. Also gibt es eine Zerlegung $Z_1 = \{a = s_0, \ldots, s_n = b\}$ mit $\Phi(s_i) = t_i$. Damit ist natürlich $g\Phi$ eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z_1.
2) Sind $f_1, f_2 \in \overline{T_{[c,d]}}$ und $f \in \overline{T_{[c,d]}}$ dann gilt:

1. $||f_1 - f_2|| = ||f_1 \circ \Phi - f_2 \circ \Phi||$.
2. $f \circ \Phi \in \overline{T[a, b]}$ □

Beweis: Es ist $||f_1 - f_2|| = \sup\limits_{t \in [c,d]}$. Zu einem $t \in [c, d]$ gibt es ein $s \in [a, b]$ mit $t = \Phi(s)$. Daher folgt $|f_1(t) - f_2(t)| = |f_1\Phi(s) - f_2\Phi(s)|$. Und daher ist: $\sup\limits_{t \in [c,d]} |f_1(t) - f_2(t)| \leq \sup\limits_{s \in [a,b]} |f_1\Phi(s) - f_2\Phi(s)|$ Die umgekehrte Ungleichung gilt sowieso. Denn für $s \in [a, b]$ und $t = \Phi(s)$ ist ja $|f_1\Phi(s) - f_2\Phi(s)| = |f_1(t) - f_2(t)|$.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Treppenfunktion $g \in T_{[c,d]}$ mit $||f - g|| = ||f\Phi - g\Phi|| < \epsilon$. Das heißt $f \circ \Phi \in \overline{T_{[a,b]}}$
3) Die Behauptung des Satzes gilt für Treppenfunktionen.
Sei $g \in T_{[c,d]}$ eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z. Dann ist $Z = \{c = t_0, \ldots, t_n = b\} = \{\Phi(a), \Phi(s_1), \ldots, \Phi(s_n) = \Phi(b) = d\}$ Dann ist zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{m} g(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}) \cdot [w(t_i) - w(t_{i-1})] \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{m} g \circ \Phi(\frac{s_i - s_{i-1}}{2} \cdot [w\Phi(s_i) - w\Phi(s_{i-1})]$$

wobei $s_i = \Phi^{-1}(t_i)$ ist. Wir zeigen dazu:

$$(*) \quad g(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}) = g\Phi(\frac{\Phi^{-1}(t_i) + \Phi^{-1}(t_{i-1})}{2})$$

Nun ist Φ und damit Φ^{-1} eigentlich monoton wachsend. Also ist:

$$\Phi^{-1}(t_{i-1}) < \frac{\Phi^{-1}(t_i) + \Phi^{-1}(t_{i-1})}{2} < \Phi^{-1}(t_i)$$

Daher ist:

$$t_{i-1} < \Phi(\frac{\Phi^{-1}(t_i) + \Phi^{-1}(t_{i-1})}{2}) < t_i$$

Und also ist $\Phi(\frac{s_i+s_{i-1}}{2}) \in]t_{i-1}, t_i[$. Auf diesem Intervall ist aber g konstant. Damit folgt die Behauptung.
4) Die Behauptung gilt für eine beliebige Funktion, die stetig ist.
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Treppenfunktion, so daß $||f - g|| < frac\epsilon 2 \cdot l(w)$ ist. Dann hat man:

$$\begin{aligned}
& |\int_a^b (f \circ \Phi)(t) d(w \circ \Phi)(t) - \int_a^b (g \circ \Phi)(t) d(w \circ \Phi)(t) + \int_c^d g(t) dw(t) - \int_c^d f(t) dw(t)| \\
\leq\ & |\int (f \circ \Phi)(t) d(w \circ \Phi)(t) - \int_a^b (g \circ \Phi)(t) d(w \circ \Phi)(t)| + |\int_c^d g(t) dw(t) - \int_c^d f(t) dw(t)| \\
\leq\ & l(w) \cdot ||f \circ \Phi - g \circ \Phi|| + l(w) \cdot ||f - g|| \\
=\ & 2 \cdot l(w) \cdot ||f - g|| < \epsilon
\end{aligned}$$

Satz 12.7. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\xi \in [a, b]$, dann gilt:*

1. $\int_a^b f(t) dw(t) = \int_a^\xi f(t) dw(t) + \int_\xi^b f(t) dw(t)$
2. *Die Abbildungen*
   a) $[a, b] \ni \xi \mapsto \int_a^\xi f(t) dw(t)$
   b) $[a, b] \ni \xi \mapsto \int_\xi^b f(t) dw(t)$

   sind stetig.

Beweis: Zu 1): Zuerst wird wieder gezeigt, daß die Behauptung des Satzes für eine beliebige Treppenfunktion richtig ist. Sei dazu g eine solche Treppenfunktion und Z^* eine Zerlegung, daß g bei dieser Zerlegung eine Treppenfunktion ist. Sei weiter $\xi \in [a, b]$. Für $\xi = a$ oder $\xi = b$ gilt die Behauptung sowieso. Wir nehmen zu Z^* als weiteren Teilpunkt ξ hinzu und erhalten die Zerlegung Z. ξ soll der $k-$ te Teilpunkt sein. Zur Abkürzung bezeichnen wir noch $m_i = \frac{t_i+t_{i-1}}{2}$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(t) dw(t) &= \sum_{i=1}^k g(m_i)(w(t_i) - w(t_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^n g(m_i)(w(t_i) - w(_{i-1}) \\
&= \int_a^\xi g(t) dw(t) + \int_\xi^b g(t) dw(t).
\end{aligned}$$

Es wird nun gezeigt, daß dei Behauptung für beliebige $f \in \overline{T}$ gilt.
Sei dazu $f \in \overline{T}$ und g eine Treppenfunktion mit $||f-g|| < \frac{1}{3} \cdot \frac{\epsilon}{l(w)+1}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)dw(t) - \int_a^\xi f(t)dw(t) - \int_\xi^b f(t)dw(t)\right| \\
\leq &\left|\int_a^b f(t)dw(t) - \int_a^b g(t)dw(t)\right| + \left|\int_a^\xi g(t)dw(t) - \int_a^\xi f(t)dw(t)\right| \\
&+ \left|\int_\xi^b g(t) - \int_\xi^b f(t)dw(t)\right| \\
\leq &3 \cdot ||f-g|| \cdot l(w) \\
< &\epsilon
\end{aligned}$$

Unmittelbar aus dem soeben bewiesenen ergeben sich die folgenden Regeln.

1. $\displaystyle\int_x^\xi f(t)dw(t) = \int_a^\xi f(t)dw(t) - \int_a^x f(t)dw(t)$
2. $\displaystyle\int_x^\xi f(t)dw(t) = -\int_\xi^x f(t)dw(t)$

Beweis zu 2):
a) Beweis der Behauptung für eine Treppenfunktion.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$|t' - t''| < \delta \Longrightarrow |w(t') - w(t'')| < \frac{\epsilon}{||g|| \cdot l(w) + 1}$$

Sei Z^* die zu g gehörige Zerlegung und außerdem $\xi \in [a,b]$ gegeben. Sei $x \in [a,b]$ beliebig mit $|x-\xi| < \delta$. Dann kann Z^* durch hinzufügen der Punkte ξ und x verfeinert werden. Sei etwa x der l–te Teilpunkt und ξ der k–te Teilpunkt. Dann gilt: $|\int_a^x g(t)dw(t) - \int_a^\xi g(t)dw(t)| = |\int_\xi^x g(t)dw(t)| \leq ||g|| \cdot \sum_{i=k+1}^{l} |w(t_i) - w(t_{i-1}| \leq ||g|| \cdot \frac{\epsilon}{||g|| \cdot l(w) + 1} \cdot l(w) < \epsilon$.
Sei nun $f \in \overline{T_{[a,b]}}$ beliebig und sei $\epsilon > 0$ und $\xi in [a,b]$. Dann gibt es eine Treppenfunktion g mit:

$$|\int_x^\xi f(t) - \int_x^\xi g(t)dw(t)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei nun$\delta > 0$ derart, daß für $|x - \xi| < \delta$ folgt $|\int_a^\xi g(t)dw(t)| < \frac{\epsilon}{2}$. Damit folgt: $|\int_a^\xi f(t)dw(t) - \in_a^x f(t)dw(t)| = |\int_\xi^x f(t)dw(t)| \leq |\int_x^\xi f(t)dw(t) - \int_x^\xi g(t)dw(t)| + |\int_x^\xi g(t)dw(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$. Damit ist F stetig.
Analog zeigt man, daß die Funktion

$$F : [a, b] \ni \xi \mapsto \int_\xi^b f(t)dw(t)$$

stetig ist.

Satz 12.8. *Seien w_1 und w_2 zwei rektifizierbare Parameterdarstellungen mit der gleichen Quelle $[a, b]$ und $f \in \overline{T}$, dann gilt:*

1. *$w_1 + w_2$ ist eine rektifizierbare Parameterdarstellung und*

$$\int_a^b f(t)d(w_1 + w_2)(t) = \int_a^b f(t)dw_1(t) + \int_a^b f(t)dw_2(t).$$

2. *$w_1 \cdot w_2$ ist eine rektifizierbare Parameterdarstellung und*

$$\int_a^b f(t)d(w_1w_2)(t) = \int_a^b f(t)w_1(t)dw_2(t) + \int_a^b f(t)w_2(t)dw_1(t)$$

Beweis später. Bemerkung: Es gehört zunächst das Wissen über rektifizierbare Parameterdarstellungen zusammengetragen.

Satz 12.9. *Sei $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine rektifizierbare Parameterdarstellung. φ sei eine analytische Funktion mit offener Quelle, die das Bild von w enthält. Weiter sei f eine reguläre Funktion. $f \in \overline{T}$. Dann gilt:*

1. *$\varphi \circ w$ ist eine rektifizierbare Parameterdarstellung.*
2. $\int_a^b f(t)d(\varphi \circ w)(t) = \int_a^b f(t)\varphi'(w(t))dw(t).$

Zum Beweis ist zunächst ein Hilfssatz notwendig.

Lemma 4 *Sei φ eine analytische Funktion und außerdem enthalte die Quelle von φ eine kompakte Umgebung von $W = Bi(w)$. Weiter gebe es ein $r > 0$, so daß $\bigcup_{z \in W} K(z, r) \subset A$ ist. Dann gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $r > 0$, so daß für alle $z \in W$ und alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: Ist $0 < |h| < r$, so ist $|\frac{\varphi(z+h)-\varphi(z)}{h} - \varphi'(z)| < \epsilon$* □

Beweis des Hilfssatzes:
Vorbemerkung: Sei $h = h_1 + h_2 i$. $|h| < r$. Ist $|h_1^*| \leq |h_1|$ und $|h_2^*| \leq |h_2|$, dann ist $|h^*| = \sqrt{(h_1^*)^2 + (h_2^*)^2} \leq |h|$. Und also, wenn $|h| < r$, $z + h^* \in A$. Nun zum Beweis des Hilfssatzes. Es ist $\varphi(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} \\
= \; & \frac{1}{h} \cdot [u(x+h_1, y+h_2) + iv(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) - i \cdot v(x,y)] \\
= \; & \frac{1}{h}[u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y+h_2) + u(x, y+h_2) - u(x,y)] \\
& + \frac{1}{h} \cdot i[v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y+h_2) + v(x, y+h_2) - v(x,y)] \\
= \; & \frac{1}{h} \cdot [h_1 \cdot u_x(x+h_1^*, y+h_2) + h_2 \cdot u_y(x, y+h_2^*)] \\
& + \frac{1}{h} \cdot i \cdot [h_1 \cdot v_x(x+h_1^{**}, y+h_2) + h_2 \cdot v_y(x, y+h_2^{**})]
\end{aligned}$$

mit gewissen $h_1^*, h_1^{**}, h_2^*, h_2^{**}$ zwischen 0 und h. nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die obige Bezeihung gilt für ganz beliebiges $z \in \mathcal{W}$ und $|h| < r$, da dann alle auftretenden Argumente in $A \subset Qu(\varphi)$ liegen.
Weiter hat man mit den Cauchuy Riemannschen Differentialgleichungen: $\varphi'(z) = \frac{h_1+ih_2}{h} \cdot [u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \frac{h_1+ih_2}{h} \cdot [v_y(x,y) - u_y(x,y)] = \frac{h_1}{h} u_x(x,y) + i \cdot \frac{h_2}{h} v_y(x,y) + \frac{i \cdot h_1}{h} v_x(x,y) + \frac{h_2}{h} u_y(x,y)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} \right| \\
\leq \; & \left| \frac{h_1}{h} \right| |u_x(x+h_1^*, y+h_2) - u_x(x,y)| + \left| \frac{h_2}{h} \right| u_y(x, y+h_2^* - u_y(x,y)| \\
& + \left| \frac{h_1}{h} \right| |v_x(x, h_1^{**}, y) - v_x(x,y)| + \left| \frac{h_2}{h} \right| |v_y(x, y+h_2^{**}) - v_y((x,y)|
\end{aligned}$$

Es ist $\left|\frac{h_j}{h}\right| \leq 1$ für $j = 1, 2$. Da φ' eingeschränkt auf die kompakte Menge A gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\frac{\epsilon}{4}$ ein $\delta > 0$, $\delta < r$, so daß die Beträge in den 4 Klammern alle $< \frac{\epsilon}{4}$ sind. Für $|h| < r$ gilt dann $\left|\frac{\varphi(z+h)-\varphi(z)}{h} - \varphi'(z)\right| < \epsilon$ □

Nun zum Beweis des Satzes:
1) Sei $\mathcal{W} = \mathrm{Bi(w)} \subset \mathrm{Qu}(\varphi)$ offen. Im Laufe des ersten Beweisschrittes wird eine kompakte Menge A so angegeben, daß $\mathcal{W} \subset \mathrm{A}$ und $A \subset Qu(f)$ ist. Auf diese Situation kann dann der Hilfssatz angewendet werden.

Bemerkung 26 Es existiert ein $\delta > 0$für das gilt: $\bigcup_{z \in \mathcal{W}} \mathrm{K(z,\delta)} \subset \mathrm{Qu}(\varphi)$. □

Wir führen den Beweis indirekt. Also angenommen, für alle $\delta > 0$ wäre $\bigcup_{z\in\mathcal{W}} \mathrm{K(z,\delta)}$ nicht in $Qu(\varphi)$ enthalten. Zu $\delta = 1$ gibt es ein $z_1 \notin Qu(\varphi)$ und ein $t_1 \in [a,b]$, so daß $|z_1 - w(t_1)| < 1$. Wir erhalten induktiv eine Folge mit: $|z_j - w(t_j)| < \frac{1}{j}$. Da $[a,b]$ beschränkt ist, exiistiert eine konvergente Teilfolge t_{n_j}. Sei $\lim_j t_{n_j} = t_0$. So folgt: $lim_j w(t_{n_j}) = w(t_0) = \lim z_{n_j}$. Nun ist $\lim z_{n_j} \in \mathbb{C} \setminus Qu(\varphi)$, da diese Menge abgeschlossen ist. Aber $w(t_0) \in Bi(w) \subset Qu(\varphi)$. Das ist aber ein Widerspruch.

Definition 164. $A := \bigcup_{z\in\mathcal{W}} \overline{\mathrm{K(z,\frac{\delta}{2})}}$. Dann ist $\mathcal{W} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{Qu}(\varphi)$. A ist beschränkt, da $\mathcal{W}$ beschränkt ja sogar als stetiges Bild des kompakten Intervalls $[a,b]$ kompakt ist

Behauptung: A ist abgeschlossen.
Beweis: Sei $(a_i | i \in \mathbb{N})$ eine Folge aus A mit $\lim_j a_j = a_0$. Zu zeigen ist, daß $a_0 \in A$ ist. Zu a_j gibt es nach Voraussetzung gewisse $t_j \in [a,b]$ mit $|a_j - w(t_j)| \leq \frac{\delta}{2}$. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(t_{n_j} | j \in \mathbb{N})$ mit $\lim_j t_{n_j} = t_0 \in [a,b]$. Es ist $lim_j a_{n_j} = a_0$ und $|a_{n_j} - w(t_{n_j}| \leq \frac{\delta}{2}$. Und $\lim_j w(t_{n_j}) = w_0 \in \mathcal{W}$. Also folgt: $|a_0 - w(t_0)| \leq \frac{\delta}{2}$ und daher $a_0 \in \bigcup_{z\in\mathcal{W}} \overline{\mathrm{K(z,\frac{\delta}{2})}}$
2.Schritt: Nachdem nun eine kompakte Menge A mit den gewünschten Eigenschaften vorhanden ist, wird mit dem Hilfssatz gezeigt, daß $\varphi \circ w$ rektifizierbar ist.
Sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Nach dem Hilfssatz gibt es ein $r > 0$, so daß für alle $z \in \mathcal{W}$ und alle $h \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(0 < |h| < r \Longrightarrow \left| \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \varphi'(z) \right| < \epsilon$$

Da w in $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\forall t', t'' \in [a,b](|t' - t''| < \delta_1 \Longrightarrow |w(t') - w(t'')| < r)$$

Wir können ohne Einschränkung $r < \epsilon$ annehmen. Sei Z^* eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ und Z eine Verfeinerung mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta_1$. Daraus folgt $l(\varphi \circ w, Z^*) \leq l(\varphi \circ w, Z)$. Wir setzen nun $z_j = w(t_j)$, $z = z_{j-1}$ und $h := z_j - z_{j-1}$.

Auf diese Situation wenden wir den Hilfssatz an. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi(z_j)-\varphi(z_{j-1})}{z_j - zj-1} - \varphi'(z_{j-1})\right| &< \epsilon \\
|\varphi(z_j)-\varphi(z_{j-1})| &< (|\varphi(z_j)|+\epsilon)\cdot|z_j - z_{j-1}| \\
&\leq \sup_{z\in\mathcal{W}} |\varphi'(z)+\epsilon)\cdot|z_j - z_{j-1}| \\
l(\varphi\circ w, Z) &\leq \sup_{z\in\mathcal{W}}(|\varphi'(z)|+\epsilon)\cdot\sum_{i=1}^{m}|w(t_i)-w(t_{i-1}| \\
&\leq \sup_{zinA}(|\varphi'(z)|+\epsilon)\cdot l(w)
\end{aligned}$$

Also ist $\varphi\circ w$ rektifizierbar.

Folgerung 12.10. *Ist $w:[a,b]\to\mathbb{C}$ eine rektifizierbare Parameterdarstellung und w analytisch in $[a,b]$ dann gilt:*

$$\int_a^b f(t)dw(t) = \int_a^b f(t)w'(t)dt = \int_a^b Ref(t)w'(t)dt + i\cdot\int_a^b Imf(t)w'(t)dt.$$

Beispiele für die Berechnung von Wegintegralen

12.2.2 Cauchys Integralsatz und seine Integralformel

Lemma 5 *Sei Sei f eine komplexe stetige Funktion und $Q=\{(t,x)|a\leq t\leq b,$ und $c\leq y\leq d\}\subset Qu(f)$ und $Qu(f)$ offen. f_y existiere und sei stetig in ganz Q und w sei eine rektifizierbare Parameterdarstellung $w:[a,b]\to\mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Für alle $y\in[c,d]$ existiert $A(y):=\int_a^b f(t,y)dw(t)$.*
2. $A'(y)=\int_a^b f_y(t,y)dw(t)$. □

Lemma 6 *Seien ω_0, ω_1 rektifizierbare Parameterdarstellungen mit $Qu(\omega_0)=Qu(\omega_1)=[a,b]$ und F eine analytische Funktion und für alle $t\in[a,b]$ und alle $y\in[0,1]$ gelte: $\omega_y(t)=\omega_0(t)+(y(\omega_1(t)-\omega_0)\in Qu(F)$ dann ist*

$$\int_{W_0} F(z)dz = \int_{W_2} F(z)dz \tag{12.1}$$

Die Bedingung an die Wege heißt: Die Verbindungsstrecke zwischen $w_1(t)$ und $w_0(t)$ ist ganz in der Quelle von F. Insbesondere sind w_0 und w_1 homotop. □

Definition 165. Eine Parameterdarstellung $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt geschlossen genau dann, wenn $w(a) = w(b)$. Ein Weg $\mathcal{W}$ heißt geschlossen, wenn es ein $w \in \mathcal{W}$ gibt welches geschlossen ist.

Definition 166. $S \subset \mathbb{C}$ heißt Sternberich in Bezug auf einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn für jeden Punkt $z \in S$ die ganze verbindungsstrecke $[z_0, z]$ in S liegt. S heißt Sternbereich, wenn es einen Punkt $z_0 \in S$ gibt, so dass S ein Sternbereich in Bezug auf diesen Punkt ist.

Satz 12.11 (Cauchys Integralsatz für Sternbereiche). *Sei O ein offener Sternbereich und sei F analytisch in O. Dann gilt für jeden rektifizierbaren geschlossenen Weg $\mathcal{W}$ in O:*

$$\int_{\mathcal{W}} F(z)dz = 0 \tag{12.2}$$

Definition 167. Die rektifizierbare geschlossene Parameterdarstellung $\omega : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt sternförmig in Bezug auf den Punkt z_0, wenn

1. $z_0 \notin Bi(\omega)$.
2. $[a, b[\ni t \mapsto \dfrac{\omega(t) - z_0}{|\omega(t) - z_0} \in Rd(K(0, 1))$ ist bijektiv.

Satz 12.12 (Cauchys Integralformel für sternförmige Wege). *Sei $\mathcal{W}$ ein geschlossener, rektifizierbarer Weg, der sternförmig in Bezug auf z_0 ist, O sei offen uhd sternförmig in Bezug au z_0 und $Bi(\mathcal{W}) \subset O$ und f analytisch in O. Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{W}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{12.3}$$

12.3 Analytische Funktionen als Potenzreihen

12.3.1 Integration gleichmäßig konvergenter Reihen

Satz 12.13. *Sei $(f_j | j \in \mathbb{N})$ eine Folge komplexer, stetiger Funktionen und $\mathcal{W}$ ein rektifizierbarer Weg. $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ sei gleichmäßig konvergent für $Bi(\mathcal{W})$. Dann gilt:*

$$\int_{\mathcal{W}} (\sum_{i=0}^{\infty} f_j(z))dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{W}} f_j(z)dz \tag{12.4}$$

Da $(f_n|n \in \mathbb{N})$ gleichmäßig konvergiert ist die Grenfunktion $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ stetig für alle $z \in Bi(\mathcal{W})$ also auch integrierbar. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|r_n(z)| = \left|\sum\limits_{j=n_0+1}^{\infty} f_j(z)\right| < \dfrac{\epsilon}{l(\omega)+1}$ für $z \in Bi(\mathcal{W})$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathcal{W}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)dz\right) - \int\limits_{\mathcal{W}} \left(\sum_{j=0}^{n} f_j(z)dz\right)\right| &= \left|\int\limits_{\mathcal{W}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)dz\right) - \sum_{j=0}^{n}\int\limits_{\mathcal{W}} f_j(z)dz\right| \\ &= \left|\int\limits_{\mathcal{W}} r_n(z)dz\right| \leq l(\mathcal{W}) \cdot \frac{\epsilon}{l(\mathcal{W}+1)} < \epsilon\end{aligned}$$

Satz 12.14 (Taylorscher Satz). *Sei f analytisch für den Kreis $K(z_0, r_0)$. $\mathcal{W}$ sei ein geschlossener, rektifizierbarer und in Bezug auf z_0 sternförmiger Weg mit $Bi(\omega) \subset K(z_0, r_0)$. Dann ist*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j; z \in K(z_0, r_0) \tag{12.5}$$

Wobei

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{W}} \frac{f\xi}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi, j \in \mathbb{N} \tag{12.6}$$

Beispiel für einen Weg $\mathcal{W}$: Sei $0 < r < r_0$. $k_r : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + e^{it}$. Der zugehörige Weg sei K_r, das ist der Kreis um z_0 mit Radius r.

Sei $z \in K(z_0, r_0)$ und sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit $|z - z_0| < r < r_0$. Sei $k_r : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \xi = z_0 + re^{it}$ ein Kreis mit Radius r um z_0. Dann gilt:

$$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{r \cdot e^{it}}\right|$$

k_r ist in Bezug auf z sicherlich ein sternfömiger Weg und es gilt nach der Cauchyschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= = \frac{1}{\xi - z_0}\left(1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \dots\right)\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für alle $\xi \in k_r$. Also folgt:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{k_r} \frac{f(\xi)(z - z_0)^j}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j\end{aligned}$$

Wobei $a_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{W}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi$ da $\mathcal{W}$ ein sternförmigerr Weg in Bezug auf z_0 ist und wegen dem Beweis für die Integralformel. □

Folgerung 12.15. *1.* $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{W}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

2. f ist analytisch in $K(z_0, r_0)$ genau dann, wenn $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$ ist. Wobei der Konvergenzradius $\geq r_0$ ist.

12.3.2 Identitätssatz für analytische Funktionen

Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

Satz 12.16 (Identitätssatz). *Seien g, f analytische Funktionen in dem Gebiet O. Außerdem gebe es eine Folge $(z_n | n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ mit $z_n \neq z_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in O$. Außerdem sollen f und g für alle Folgenglieder übereinstimmen. Dann stimmen f und g auf dem Gebiet überein.*

z_0 ist sicherlich ein Häufungspunkt der Folge $(z_j | j \in \mathbb{N})$. Sei $h := f - g$ und $S = \{z | z \in O \text{ und } h(z) = 0\}$ $S' =$ Menge der Häufungspunkte von Zahlen aus S in O.

Beh.: $S' \subset S$, $S' \neq \emptyset$ und S' ist offen und abgeschlossen in O.
Kann diese Behauptung gezeigt werden, so ist $S' = O$, da O zusammenhängend ist.
Bew: Die $z_j \in S$ und daher $z_0 \in S'$. Also ist S' nicht leer. Sei jetzt z_0 beliebig aus S' und $(z_j | j \in \mathbb{N})$ eine beliebige Folge aus S mit $z_j \neq z_0$, die gegen z_0 konvergiert. Da O offen ist gibt es ein $r_0 > 0$ mit $K(z_0, r_0) \subset O$. Es ist $h = f - g$ analytisch in O und daher analytisch in $K(z_0, r_0)$. Nach dem Taylorscvhen Satz ist daher $h(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$ für $z \in K(z_0, r_0)$. Wegen $\lim\limits_{j \to \infty} z_j = z_0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $j \geq n_0$ gilt: $z_j \in K(z_0, r_0)$. Es ist $\lim\limits_{j \geq n_0} h(z_j) = h(\lim\limits_{j} z_j) = a_0 = 0$, da h analytisch also erst recht stetig ist. Induktiv wird nun geschlossen, dass alle $a_j = 0$ sind.
Annahme: $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$. Sei $h_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k+j}^{j-1}$, dann hat h_k den gleichen Konvergenzradius wie h und es ist $h(z_j) = (z_j - z_0)^{k+1} h_k(z_j)$. Da der erste Faktor $\neq 0$ ist muss der zweite Faktor 0 sein. h_k erfüllt daher die gleichen Voraussetzungen wie h. Also ist $a_{k+1} = 0$. Also ist $h(z) = 0$ für alle $z \in K(z_0, r_0)$. Insbesondere ist $h(z_0) = 0$. Also ist $S' \subset S$. Außerdem folgt, dass S' offen ist, da $K(z_0, r_0) \subset S'$ ist; denn jeder Punkt aus $K(z_0, r_0)$ ist Häufungspunkt von $K(z_0, r_0)$. Außerdem ist S' sicherlich abgeschlossen in O. Daher ist $S' = O$. Dies wurde behauptet. □

Anstatt $z_j \neq z_0$ wird auch oft $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$ verlangt. Dies ist im wesenlichen dasselbe.

Folgerung 12.17. *Sei f_1 analytisch in der offenen Menge O_1 und $O_1 \subset O_2$, wobei O_2 offen und zusammenhängend ist. Dann gibt es höchstens eine auf O_2 analytische Fortsetzung von f_1.*

Folgerung 12.18. *Die Funktionen e^z, $\sin(z)$ und $\cos(z)$ sind die einzigen für ganz $\mathbb{C}$ analytischen Funktionen, deren Einschränkung auf $\mathbb{R}$ mit e^x, $\sin(x)$ beziehungsweise $\cos(x)$ übereinstimmt.*

12.3.3 Prinzip vom Maximum

Lemma 7 *Sei f analytisch in O und $\overline{K(z_0, r_0)} \subset O$. Für alle $z \in Rd(K(, z_0, r_0))$ sei $|f(z_0)| \geq |f(z)|$. Dann ist für alle $z \in Rd(K z_0, r_0) : f(z) = f(z_0)$.* □

Sei $|f(z_0)| = 0$. Dann ist $f(z_0) = 0$ und daher $f(z) = f(z_0)$ für $z \in Rd(K(z_0), r_0)$, da $|f(z_0)| \geq |f(z)|$. Sei nun $|f(z_0)| > 0$ Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{K_{r_0}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_0 e^{it}) \cdot r_0 e^{it}}{r_0 e^{it}} dt \\ 1 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_0 e^{it})}{f(z_0)} dt \\ 0 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \frac{f(z_0 + r_0 e^{it})}{f(z_0)}\right) dt \end{aligned}$$

Nun ist $\dfrac{f(z_0) + r_0 e^{it}}{f(z_0)} = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ also insbesondere $|\alpha| \leq 1$. Daher ist $Re\left(1 - \dfrac{f(z_0) + r_0 e^{it}}{f(z_0)}\right) \geq 0$. Da das Integral über den Realteil Null ist folgt $\alpha = 1$ und daher $\beta = 0$. Daher ist $\dfrac{f(z_0 + r_0 e^{it})}{f(z_0)} = 1$. Das ergibt die Behauptung. □

Satz 12.19 (Prinzip vom Maximum). *Sei f analytisch in der offenen Menge O und $K(z_0, r_0) \subset O$. Dann gibt es ein z_1 aus dem Rand der Kreisscheibe, derart dass*

$$|f(z_1)| = \max\{|f(z)| z \in \overline{K(z_0, r_0)}\}$$

Redeweise: Jede analytische Funktion nimmt ihr Maximum auf dem Rand an.

Sei $\max\{|f(z)||z \in \overline{K(z_0, r_0)}\} = f(z^*)$. Falls z^* auf dem Rand der Kreisscheibe liegt ist man fertig. Also kann angenommen werden, dass z^* nicht auf dem Rand der Kreisscheibe liegt. Sei $r^* = r_0 - |z^* - z_0|$. Für $K(z^*, r^*)$ sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt. Also ist $f(z^*) = f(z)$ für alle $z \in Rd\overline{K(z^*, r^*)}$. Sei $z_M \in Rd(K(z_0, r_0)) \cap Rd(K(z^*, r^*))$. Dieses z_M erfüllt die Behauptung des Satzes. □

Folgerung 12.20. *1. Ist f analytisch in $K(z_0, r_0)$*

12.4 Ganze Funktionen

12.4.1 Allgemeine Eigenschaften

Definition 168. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ganze Funktion, wenn f in ganz $\mathbb{C}$ analytisch ist.

Beispiele: $\exp(z)$, $\sin(z)$, und $\cos(z)$ sind ganze Funktionen.

Bemerkung 27 Ist f eine ganze Funktion, dann läßt sich f in eine Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ entwickeln. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. □

Satz 12.21. *Sei* $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *ganz.* $M_r = \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$. *Dann ist* $|a_j| \leq \frac{M_r}{r^j}$.

Nach dem Taylorschen Satz ist:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_r} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(r \cdot e^{it}) i \cdot r \cdot e^{it}}{r^{j+1} e^{it(j+1)}} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(r \cdot e^{it})}{r^j e^{i \cdot tj}} dt \end{aligned}$$

Es folgt:

$$|a_j| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{M_r}{r^j \cdot e^{i \cdot tj}} \right| dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{M_r}{r^j} dt = \frac{M_r}{r^j}$$

Folgerung 12.22 (Satz von Liouville). *Ist f ganz und beschränkt, dann ist f konstant.*

Sei M eine Schranke von f. Dann ist $|a_j| \leq \frac{M_r}{r^j} \leq \frac{M}{r^j}$. Das gilt für beliebig großes r. Damit ist $a_j = 0$ für $j > 0$. Also ist $f(z) = 0$. □

Satz 12.23. *Sei f ganz. Es gebe ein $M > 0$, ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $R > 0$, derart daß für alle $|z| < R$ $|f(z)| \leq M \cdot |z|^m$ ist, so ist f ein Polynom.*

12.4.2 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 12.24. *Jedes nicht konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle*

Angenommen für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $P(z) \neq 0$. Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |z|^n \cdot |a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}|) \\
&\geq |z| \cdot |a_n + \frac{a_{n-a}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}|) \\
&\geq |z| \cdot (|a_n| - (|\frac{a_{n-1}}{z}| + \ldots + |\frac{a_0}{z^n}|)) \\
&\geq |z| \cdot (|a_n| - \frac{c}{|z|}) \\
&= |z| \cdot |a_n| - c \\
c &= |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|
\end{aligned}$$

Wählt man $|z| > R$ mit $R = \max\{1, \frac{|a_n|+c}{|a_n|}\}$, dann folgt: $|f(z)| \geq |z| \cdot |a_n| - c \geq \frac{|a_n|+c}{|a_n|} \cdot |a_n| - c = |a_n|$.
Sei nun $\gamma_0 = \min\{|f(z)||z| \leq R\}$. Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so daß $f(z_0) = \gamma_0$ ist, weil stetige Funktionen auf einer kompakten Menge ihr Minimum annehmen. Es ist $f(z_0) \neq 0$, weil f keine Nullstelle hat. Sei nun $\gamma = \min\{|a_n|, |f(z_0)|\}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist dann $|f(z)| \geq \gamma$. Wir betarchten die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Dies ist eine ganze Funktion. Außerdem ist $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{\gamma}$. Also ist g eine ganze und beschränkte Funktion. Dann muß aber wegen dem Satz von Liouville 12.22 $g(z) = c$ eine Konstante. Damit ist $f(z) = \frac{1}{c}$ eine Konstante. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 12.25 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei f ein Polynom vom Grade n. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ und $z_1, \ldots, z_n$ mit $f(z) = c \cdot (z - z_o) \cdot \cdots \cdot (z - z_n)$.*

Mit dem Satz 12.24 und dem euklidischen Algorithmus ergibt sich der Beweis durch eine einfache Induktion. □

12.4.3 Verhalten von ganzen Funktionen für $|z| \to \infty$

Nach dem Vorhergehenden gilt:

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \begin{cases} a_0 & \text{wenn } f(z) = a_0 = \text{konstant} \\ \infty & \text{falls } f(z) \text{ nicht konstant} \end{cases}$$

Satz 12.26. *Sei f eine ganze Funktion und $f \neq 0$. Weiterhin habe f die Nullstellen z_1, $Z_2, \ldots, z_n$. Dann ist $f(z) = p(z) \cdot g(z)$, wobei p ein Polynom ist und $p(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (z - z_m)^{k_m}$ und g ganz ist mit $g(z_j) \neq 0$.*

Da f ganz ist, kann f um den Punkt z_1 entwickelt werden. Es ist also $f(z) = a_0 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)^2 \ldots$. mit dem Konvergenzradius ∞. Da $f(z_1) = 0$ ist folgt $a_0 = 0$. Sei $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots a_{k-1} = 0$ und $a_k \neq 0$. Dies gibt es, da $f \neq 0$. Dann ist $f(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (a_{k_1} + a_{k_1+1}(z - z_1) + \ldots) = (z - z_1)^{k_1} \cdot h(z)$. $h(z)$ ist ganz und $h(z_1) \neq 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $z_\nu \neq z_\mu$ Dann ist $0 = f(z_2) = (z_2 - z_1)^{k_1} \cdot h(z_2)$. Also ist $h(z_2) = 0$. Mit Induktion ergibt sich nun die Behauptung. $\square$

12.5 Laurententwicklung und Singularität

12.5.1 Existenz der Laurententwicklung

12.5.2 Singularitäten

13 Banachräume und Banachalgebren

13.0.1 Stetige Abbildungen

Satz 13.1. *Seien (X, ρ) und (Y, τ) metrische Räume. Außerdem sei Y ein Ring, derart dass die Addition und die Multiplikation stetig sind. Dann ist $R = \{f | f : X \to Y$ und f stetig in $a\}$ ein Ring*

Folgerung 13.2. *Alle Polynome sind als Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig.*

Satz 13.3. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig für alle $x \in X$. Dann ist f beschränkt.*

Angenommen f ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge $a_n \in X$ mit $f(a_n) > n$ für alle n. In einem kompakten metrischen Raum besitzt jede Folge einen Häufungspunkt. Also besitzt (a_n) einen Häufungspunkt a. Es gibt eine konvergente Teilfolge $(a_{t(n)}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{t(n)} = a$. Dann ist $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_{t(n)}) > t(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch. □

Satz 13.4. *Sei X ein kompakter metrischer Raum. $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $a \in X$ und ein $b \in X$ mit: $f(a) = \inf\{f(x) | x \in X\}$ und $f(b) = \sup\{f(x) | x \in X\}$*

inf und $M = \sup$ existieren. Es existiert eine monoton wachsende Folge $f(a_n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = M$. Die Folge $(a_n | n \in \mathbb{N})$ enthält einen Häufungspunkt b. Also ist $f(b) = M$. Rest genauso. □

Zur Formulierung und dem Beweis des Zwischenwertsatzes siehe Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Seite 44.

Definition 169. Eine Funktion von einem metrischen Raum (X, ρ) in einen metrischen Raum (Y, μ) heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $r > 0$ ein $s > 0$ gibt, so dass für alle $x, x' \in X$ gilt: Ist $\rho(x, x') < s$, so ist $\mu(f(x), f(x')) < r$

Satz 13.5. *Jede stetige Funktion von einem kompakten metrischen Raum in einen metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Sei $r > 0$ gegeben. Da f in X stetig ist, gibt es zu jedem $x \in X$ ein s_x, so dass für alle $x' \in X$ gilt: Ist $\rho(x, x') < s_x$, so ist $\mu(f(x), f(x')) < r/4$. Sei $T_x := K(x, s_x/4)$. Dann ist $(T_x | x \in X)$ eine offene Überdeckung von X. Diese enthält eine endliche Überdeckung $T_{x_1}, \ldots, T_{x_n}$. Sei $s = \min\{s_{x_1}, \ldots, s_{x_n}\}$ und x, x' mit $\rho(x, x') < 1/4 \cdot s$. Es gibt ein $x_l, l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in K(X_l, s_{x_l}/4)$. Dann ist: $\mu(f(x), f(x_l)) < r/4$. Es ist $\rho(x', x_l) \leq \rho(x', x) + rho(x, x_l) < s_{x_l}$. Also ist $\mu(f(x'), f(x_l)) < r/4$. Wir erhalten: $\mu(f(x), f(x')) \leq \mu(f(x), f(x_l)) + \mu(f(x_l), f(x')) < r/4 + r/4 < r$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Beispiele:

87. $f(x) = 1/x$ ist auf dem halboffenen Intervall $]0, 1]$ zwar stetig aber nicht gleichmäßig stetig.

    Bew: Sei $r = 1$ und $s > 0$ beliebig. Dann gibt es eine natürliche Zahl m mit $1/(m+2) < 1/m < s$. Es ist dann $|1/m - 1/(m+2)| < s$ aber $|f(1/m) - f(1/(m+2))| = 2 > r = 1$. Also ist f nicht gleichmäßig stetig.

13.0.2 Der Fixpunktsatz von Banach

Satz 13.6. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann gilt:*

1. *Für alle $a \in X$ ist die Folge $(a_n) = (f^n(a))$ konvergent.*
2. *Ist $b = \lim\limits_{n\to\infty}$, so ist b ein Fixpunkt von f.*
3. *f hat genau einen Fixpunkt.*

Zu 1. Sei $a \in X$ und $(a_n) = (f^n(a))$. Damit folgt: $d(a_{n+m+1}, a_n) \leq \sum\limits_{i=0}^{m} d(a_{n+i+1}, a_{n+i}) \leq c^n \sum\limits_{i=0}^{m} d(a_{i+1}, a_i) \leq c^n \sum\limits_{i=0}^{m} c^i d(a_1, a_0) = c^n \cdot d(a_1, a_0) \cdot \sum\limits_{i=0}^{m} c^i \leq c^n \cdot d(a_1, a_0) \cdot \frac{1}{1-c} = \frac{c^n}{1-c} \cdot d(a_1, a_0)$.
Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{c^n}{1-c} \cdot d(a_1, a_0) \leq \epsilon$ (wegen c<1). Die hergleitete Ungleichumg besagt dann„ daß (a_n) eine Cauchyfolge ist. Diese konvergiert in dem vollständigen Raum gegen einen Grenzwert b.
Zu 2. f ist stetig. Außerdem hat man: $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(b)$.

13.1 Banachräume

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. V sei ein Vektorraum über K. Eine Abbildung $|| - || : V \ni x \mapsto ||x|| \in \mathbb{R}$ heißt *Norm*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$.
2. $||r \cdot x|| = |r| \cdot ||x||$ für alle $r \in K$ und alle $x \in V$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in V$.

Ein *normierter Vektorraum* ist ein Paar $(V, || - ||)$ bestehend aus V und einer Norm $|| - ||$).

Satz 13.7. *Sei $(V, || - ||)$ ein normierter Vektorraum. Dann wird durch*

$$d(x, y) := ||x - y||$$

für $x, y \in V$ eine Metrik defieniert.

Der Beweis versteht sich von selbst. In Zukunft lasse ich die Doppelstriche weg bei der Norm.
Beispiele:

88. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\sigma : V \times V \ni (a, b) \mapsto \sigma(a, b) \in \mathbb{R}$ die positiv definierte Bilinearform. Dann ist $|x| = \sqrt{\sigma(x, x)}$ eine Norm auf V.
89. Dies ergibt auf dem $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $x \circ y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ die euklidische Norm $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. Daraus ergibt sich der abgeleitete Abstand $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
90. Eine andere Norm erhält man, wenn man die Maximumsnorm betrachtet. $|x| := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ Zwischen der Maximumsnorm und der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ besteht die Beziehung $|x| \leq ||x|| \leq |x| \cdot \sqrt{n}$
91. Sei X eine beliebige Menge und $B(X)$ der Vektorraum aller beschränkten reelwertigen Funktionen. $f : X \to \mathbb{R}$. Für diese Funktionen gilt also $||f||_X = \sup\{|f(x)|; x \in X\} < \infty$. Hierdurch ist eine Norm definiert. Die ersten beiden Eigenschaften erkennt man sofort. Sei nun $x \in X$. Dann ist $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup\{|f(x)|; x \in X\} + \sup\{|g(x)|; x \in X\} = ||f||_X + ||g||_X$. Diese gilt für alle $x \in X$. Damit folgt auch die Dreiecksungleichung.

13.2 Banachalgebren

Definition 170. Ein komplexer normierter Raum R heißt normierte Algebra, wenn R eine $\mathbb{C}$- Algebra ist und für alle $x, y \in R$ gilt: $x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$. Ist R zusätzlich ein Banachraum, so heißt R Banachalgebra. Ist R zusätzlich ein unitärer Ring, so heißt R Banachalgebra mit 1.

Satz 13.8. *Seien (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen in der normierten Algebra R. Dann gilt:*

1. *$(a_n + b_n)$ ist eine Cauchyfolge.*
2. *$(a_n \cdot b_n)$ ist eine Cauchyfolge.*
3. *Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, so ist $(a_n + b_n)$ eine Cauchyfolge und es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*
4. *Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, so ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Cauchyfolge und es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

13.3 Potenzreihen in Banachalgebren

Sei R ein nicht unbedingt kommutativer Ring. $R[[X]]$ der formale Potenzreihenring. Dann gilt:

Satz 13.9. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Ein Element $\sum\limits_{i=0}^{\infty}$ ist eine Einheit in $R[[X]]$.*
2. *a_0 ist eine Einheit in R.*

1. $\Longrightarrow$2.
Sei $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ eine Einheit. Dann gibt es ein $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ mit: $(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i X^i) \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i X^i = 1$
Damit ist $a_0 \cdot b_0 = 1$. Da das umgekehrte Produkt der Potenzreihen auch 1 ist, ist auch $b_0 \cdot a_0 = 1$.
2. $\Longrightarrow$1. Sei a_0 eine Einheit. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, dß $a_0 = 1$ ist. Man berechne: $(1 - (1 - f)) \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty}(1 - f)^i = 1$. Das umgekehrte Produkt genauso. □

Definition 171. Ein Ring heißt lokaler Ring, wenn die Summe zweier Nichteinheiten wieder eine Nichteinheit ist.

Folgerung 13.10. *R ist genau dann lokal, wenn $R[[X]]$ lokaler Ring ist.*

Wir setzen zunächst voraus, daß R ein lokaler Ring ist. Seien $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ Nichteinheiten. Dann sind a_0 und b_0 in dem Ring R Nichteinheiten. Also ist $f + g$ eine Nichteinheit in $R[[X]]$. Die Umkehrung ist klar. □

Folgerung 13.11. *Sei K ein Schiefkörper. (kommutativ).*

1. *$K[[X_1, \ldots, X_n]]$ ist ein lokaler Ring für alle $n \in \mathbb{N}$*
2. *$K[[X]]$ ist ein lokaler Hauptidealring.*

Zu 1. Klar.
Zu 2. Nach dem Satz ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ genau dann eine Einheit, wenn $a_0 \neq 0$ ist. Sei nun $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $K[[X]]$. Es gibt in $\mathfrak{a}$ ein Element kleinsten Untergrades n etwa $\sum_{i=n}^{\infty} b_i X^i = X^n \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+n} X^i = X^n g$. Es ist g eine Einheit. Also ist $X^n \in \mathfrak{a}$. Ist f nun irgend ein Element aus $\mathfrak{a}$, so ist der Untergrad von $f \geq n$. Also ist $f = X^n \cdot h$ mit einem $h \in K[[X]]$. Das heißt $f \in X^n K[[X]]$, was behauptet wurde. □

14 Hilberträume

14.1 Hermitesche Formen

Für jede komplexe Zahl $\lambda = a + bi$ sei $\overline{\lambda} = a - bi$ die zugehörige konjugiert komplexe Zahl.

Definition 172. E sei ein reeller oder komplexer Vektorraum und $\sigma : E \times E \to E$ sei eine Abbildung. σ heißt hermitesche Form, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. σ ist ein Homomorphismus abelscher Gruppen in jedem Argument.
2. $\sigma(\lambda a, b) = \lambda\sigma(a, b)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bezw $(\mathbb{C})$
3. $\sigma(a, \lambda b) = \overline{\lambda}\sigma(a, b)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bezw $(\mathbb{C})$.
4.

15 Differentialrechnung in Banachräumen

15.1 Stetig lineare Abbildungen

Satz 15.1. *Für einen Homomorphismus $\lambda : E \to F$ zwischen normierten Räumen sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *λ ist stetig.*
2. *Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x \in E$ gilt: $|\lambda(x)| < C \cdot |x|$.*

1. $\Longrightarrow$2: Zu 1 gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle v mit $|v| < 2\delta$ gilt: $|\lambda(v)| < 1$. Ist $x \in E$ beliebig, dann ist $|\delta x/|x|| < \delta < 2\delta$. und daher $\lambda(\delta \cdot x/|x|) < 1$. Also ist $|\lambda(x)| < \frac{1}{\delta}|x|$. Mit $C = \frac{1}{\delta}$ folgt die Behauptung.
2. $\Longrightarrow$1. Sei $a \in E$ und $h \in E$. Man hat $|\lambda(a+h) - \lambda(a)| = |\lambda(h)| < C \cdot |h|$. Daraus ergibt sich die Stetigkeit. □

Beispiele:

92. Ist $f : \mathbb{R} \to F$ eine lineare Funktion, dann ist f stetig. Denn für $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = x \cdot f(1)$ und daher $|f(x)| \leq |f(1)| \cdot |x|$. Also ist f stetigt.
93. Jede Projektion $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig. Denn sei $x = \sum\limits_{i=0}^{n-1} e_i x_i \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $p_i(x) = x_i$. Es ist $|p_i(x)| = |x_i| \leq 1 \cdot |x|$. Also ist p_i stetig.
94. Jede lineare Abbildung L von $\mathbb{R}^n$ in einen normierten Vektorraum ist stetig.

    Ist $f : \mathbb{R}^n \to F$ eine lineare Funktion, so ist f stetig. Denn es ist $f = f \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_i p_i$.

    Dabei sind p_i die Projektionen und q_i die Injektionen. Es folgt $f = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (fq_i)p_i$.

    Die fq_i sind stetig und die p_i. Als endliche Summe steiger Funktionen ist auch f stetig.
95. Wir betrachten $C[a,b] =$ Menge der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Es ist $C[a,b]$ mit der Maximumsnorm $|f| = \max t \in [a,b]|f(t)|$ ein Banachraum. Die Abbildung

$$C[a,b] \ni f \mapsto \int\limits_a^b f(t)dt \in \mathbb{R} \tag{15.1}$$

ist eine stetige lineare Abbildung. Denn $|L(f)| = \left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|dt \leq |b-a||f|$.

Satz 15.2. *Seien E, F, G drei Banach Räume und $\sigma : E \times F \to G$ eine Bilinearform. Dann sind äquivalent.*

1. *Es gibt ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|\sigma(x,y)| \leq c \cdot |x| \cdot |y|$*
2. *σ ist stetig.*

1. $\Longrightarrow$2. Sei (x_n, y_n) eine Folge in $E \times F$, deren Grenzwert (a,b) ist. Es gilt dann, $|\sigma(x_n,y_n) - \sigma(a,b)| = |\sigma(x_n - a, y_n) + \sigma(a, y_n - b)| \leq |\sigma(x_n - a, y_n)| + |\sigma(a, y_n - b)| \leq c \cdot (|x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|)$. (y_n) ist eine konvergente und damit beschränkte Folge. Also ist der erste Summand eine Nullfolge. Auch der zweite Summand ist eine Nullfolge. Daher konvergiert (x_n, y_n) gegen (a,b). Das heißt σ ist stetig an der Stelle (a,b). 2. $\Longrightarrow$1. Sei σ stetig. Es gibt eine Kugel K um den Nullpunkt $K(0,r)$ mit folgender Eigenschaft. Ist $|(x,y)| = \sup\{|x|,|y|\} \leq r$, so ist $\sigma(x,y)| \leq 1$. Sei nun $(x,y) \in E \times F$ beliebig. Wir setzten zunächst voraus, dass $|x| \neq 0$ und $|y| \neq 0$ und betrachten $u = \frac{r \cdot x}{|x|}$ und $v = \frac{r \cdot y}{|y|}$. Dann ist $|u| \leq r$ und $|v| \leq r$. Also ist $|\sigma(u,v)| \leq 1$. Wir erhalten daher: $\sigma\left(\frac{r \cdot x}{|x|}, \frac{r \cdot y}{|y|}\right) = \frac{r^2}{|x||y|}|\sigma(x,y)| \leq 1$. Und also ist $|\sigma(x,y)| \leq \frac{1}{r^2}|x||y|$. Für $|x| = 0$ oder $|y| = 0$ gilt die Behauptung sowieso. Dies war zu zeigen. □

Beispiele:

96. Wieder betrachten wir $C[a,b]$. Die Multiplikation von Funktionen ist eine stetige Bilinearform. $f \cdot g : [a,b] \ni t \mapsto f(t) \cdot g(t) \in \mathbb{R}$ ist eine stetige Bilinearform. Denn es ist $|f \cdot g| \leq 1 \cdot |f| \cdot |g|$.
97. Die Funktion $C[a,b] \times C[a,b] \ni (f,g) \mapsto \int\limits_a^b f(t) \cdot g(t)dt$ ist eine stetige Bilinearform. Denn es ist: $|(f,g)| \leq |b-a| \cdot |f| \cdot |g|$.

15.2 Die Ableitung einer Funktion

E und F seien Banach Räume und $A \subset E$ eine offene Teilmenge. $f : A \to F$ heißt *differenzierbar*, oder auch total differenzierbar, an der Stelle $a \in A$, wenn es eine stetige lineare Funktion $L : E \to F$ gibt mit

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + |x-a|Q(x) \tag{15.2}$$

Dabei ist Q eine in a stetige Funktion und $Q(a) = 0$

Satz 15.3. *1. Ist $f : A \to F$ differenzierbar an der Stelle a, so gilt für alle $v \in E$. $L(v) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + t \cdot v) - f(a))$.*

2. Ist f differenzierbar, so ist die lineare Abbildung L eindeutig bestimmt. Diese eindeutig bestimmte Abbildung heißt Ableitung von f an der Stelle a, oder auch totales Differential von f an der Stelle a. Die Ableitung von f an der Stelle a wird mit $f'(a)$ bezeichnet.

Zu 1. Sei $v \in E$. Man hat

$$\begin{aligned} f(a + t \cdot v) - f(a) &= L(t \cdot v) + |t| \cdot Q(a + t \cdot v) \\ &= t \cdot L(v) + |t| \cdot Q(a + t \cdot v) \\ \frac{1}{t} \cdot (f(a + tv) - f(a)) &= L(v) + \frac{|t|}{t} \cdot Q(a + t \cdot v) \end{aligned}$$

Da Q stetig an der Stelle a ist und $Q(a) = 0$ ist folgt: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) = L(v)$.
Zu 2. Ergibt sich sofort aus 1. □

Beispiele:

98. Ist $f : A \to F$ eine konstante Funktion, so gilt: $f'(a) = 0$ für alle $a \in A$.

    Sei $f(x) = c$. Dann ist $R(x - a) = f(x) - f(a) - 0 = c - c - 0$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

99. Ist $f : \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{x} \circ \vec{x} \in \mathbb{R}$ das Skalarprodukt mit sich selber, so ist $f'(a) : \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto 2\vec{a} \circ \vec{x} \in \mathbb{R}$.

    Ist $f : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto x \circ x \in \mathbb{R}$ das natürliche Skalarprodukt, so hat man: $f(x) - f(a) = x \circ x - a \circ a = 2a \circ (x - a) + (a - x) \circ (a - x) = 2a \circ (x - a) + |x - a|^2$. Hieraus folgt die Behauptung. □

100. Ist $u : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung, so ist $u'(a) = u$ für alle $a \in E$.

     Es ist $u(x) - u(a) = u(x - a) + 0$. □

101. Seien E, F, G drei Banachräume. $\sigma : E \times F \ni (x, y) \mapsto \sigma(x, y) \in G$ eine stetige bilineare Abbildung. Dann ist diese Abbildung in jedem Punkt $(x, y) \in E \times F$ differenzierbar und die Ableitung ist $E \times F \ni (s, t) \mapsto \sigma(x, t) + \sigma(s, y)$.

Satz 15.4. *Sei $F = F_1 \times F_2 \times \ldots F_n$ ein Produkt von Banach Räumen, A eine offene Teilmenge des Banachraumes E und $f : A \to F$ eine stetige Abbildung. Äquivalent sind:*

1. *f ist differenzierbar an der Stelle a.*
2. *Für alle $i = 1, \ldots, n$ ist f_i differenzierbar an der Stelle a*

Ist dies der Fall, so ist $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a))$. dabei ist $Hom(E, F)$ mit $\prod_{i=1}^{n} Hom(E, F_i)$ identifiziert.

1. $\Longrightarrow$2. Seien $p_i : \prod_{i=1}^{n} F_i \to F_i$ die Projektionsabbildungen und $q_i : F_i \to \prod_{i=1}^{n} F_i$ die Injektionen. Sei f differenzierbar an der Stelle a. Das heißt es gibt eine lineare Funktion $f'(a)$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + |x-a|Q(x) \tag{15.3}$$

Dabei ist Q an der Stelle a stetig und es ist $Q(a) = 0$. Wendet man auf diese Gleichung die Projektion p_i an, so erhält man $f_i(x) = f_i(a) + p_i f'(a)(x-a) + |x-a|p_i Q(x)$. Die $p_i Q$ sind aber auch an der Stelle a stetig und $p_i Q(a) = 0$. Damit folgt 2.
2. $\Longrightarrow$1. Seien die f_i alle differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} q_i p_i (f(x) - f(a)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} q_i f_i'(x-a) + |x-a| Q_i(x) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} q_i f_i' \right)(x-a) + |x-a| \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i(x) \end{aligned}$$

Da für jedes i von 1 bis n $q_i Q_i$ stetig an der Stelle a und dort gleich 0 ist, ist dies auch für die Summe dieser Funktionen richtig. □

Definition 173. Sei $A \subset E$ eine offene Teilmenge des Banach Raumes E. f heißt differenzierbar in A, wenn f in jedem Punkt aus A differenzierbar ist. Die Abbildung

$$D : A \ni x \mapsto f'(x) = Df(x) \in Hom(E, F)$$

wird mit f' bezeichnet oder Df und die Ableitung von f in A genannt.

Beispiele:

102. **Parameterdarstellungen:** I sei eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen. Jede stetige Abbildung von I in einen Banachraum F heißt Parameterdarstellung .

   a) Seien a, b Elemente aus dem Vektorraum V. Die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto a + b \cdot t \in V$ ist eine Parameterdarstellung. Die Bildmenge ist die Gerade durch a in Richtung b.

      Man zeichnet sie etwa durch `gnuplot` durch

```
#Parameterdarstellung einer Geraden
set terminal x11
set parametric
set trange [-2:4]
set border
set xtics
set ytics
set title "Eine Gerade"
x(t)=1+2*t
y(t)=-1-t;
set xrange [-3:10]
set yrange [-4:3]
plot x(t),y(t) with lines lw 4
set terminal postscript portrait
set output "gerade.ps"
replot
```

      Die Ableitung erhält man: $\varphi(x+h)-\varphi(x) = a+b\cdot(x+h)-(a+b\cdot x) = b\cdot h$. Die zugehörige Abbildung ist also $\mathbb{R} \ni h \mapsto b \cdot h \in V$.

   b) Eine Strecke ergibt sich durch die Parameterdarstellung

$$\varphi : [0,1] \ni t \mapsto a \cdot t + b \cdot (1-t) \in V.$$

      Die Ableitung ist $l(t) = (a-b) \cdot t$.

   c) $\varphi : [0,1] \ni t \mapsto (a \cdot cos(2\pi t), b \cdot sin(2\pi t)) \in \mathbb{R}^2$ ergibt eine Ellipse. Nach dem Satz vorher ist die Ableitung die lineare Abbildung:

$$l(h) = (-a2\pi sin(2\pi t), b2\pi cos(2\pi t))h \tag{15.4}$$

103. Ein Teilchen bewege sich in gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreis um einen Mittelpunkt M. Der Mittelpunkt M selber bewegt sich in gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Geraden senkrecht zur Kreisebene. Die Bahn dieses Teilchens ist eine Helix. Die Spirale des Archimedes(?). Die Parameterdarstellung dieser Bahn ist

$$\varphi(t) = (a \cdot cos(t), a \cdot sin(t), b \cdot t) \tag{15.5}$$

104. Ptolemäus meinte, dass der Mars sich in komplizierter Weise um die Erde bewege. Der Mittelpunkt eines Leitkreises bewegt sich um die Erde. Der Mars

selber bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diesen Mittelpunkt. Tatsächlich ist dies ungefähr mit der Erde und dem Mond so auf ihrem Weg um die Sonne. Als Parameterdarstellung ergibt sich beispielsweise: $\varphi(t) = (a \cdot cos(12 \cdot 2\pi t), a \cdot sin(12\pi \cdot t)) + (4 \cdot a \cdot cos(2\pi t), 4 \cdot a \cdot sin(2\pi \cdot t))$ Das ergibt die folgende Bahn:

Ist φ eine differenzierbare Parameterdarstellung so bezeichnen wir mit $\varphi'(t) \circ \varphi'(t)$ die kinetische Energie.
Aufgaben:

148. Ein Teilchen bewegt sich auf einer Ellipse. Die kinetische Energie ist konstant, was kann über die Ellipse gesagt werden?
149. Zeige: Ist die Parameterdarstellung eines bewegten Teilchens eine archimedische Spirale, so ist die kinetische Energi konstant
150. In welchem Winkel schneidet die Tangente an den Graphen der archimedischen Spirale die $x - y$ Ebene?

Satz 15.5. *Sei $A \subset E$ eine offene Teilmenge des Banachraumes E. Ist $f : A \to F$ differenzierbar in a, so ist f dort stetig.*

Es ist $f(x) = f(a) + L(x - a) + |x - a|Q(x)$. Da L, die Betragsfunktion und Q an der Stelle a stetig sind ist f an der Stelle a stetig. □

15.3 Formale Ableitungsregeln

Satz 15.6 (Summe). *Seien E und F zwei Banach Räume und $A \subset E$ eine offene Teilmenge von E. $f, g : A \to F$ seien zwei in $a \in A$ differenzierbar Funktionen. Dann ist die $(f + g)$ eine in A differenzierbare Abbildung und es gilt: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + L(x - a) + |x - a|Q_1(x) \\ g(x) &= g(a) + K(x - a) + |x - a|Q_2(x) \\ (f + g)(x) &= (f + g)(a) + (L + K)(x - a) + |x - a|(Q_1(x) + Q_2(x)) \end{aligned} \tag{15.6}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 15.7 (Kettenregel). *E, F, G seien drei Banach Räume, $A \subset E$ eine offene Teilmenge und $a \in A$. $f : A \to F$ und $f(a)$ sei in einer offenen Teilmenge $B \subset F$ enthalten. Ist f differenzierbar an der Stelle a und g differenzierbar an der Stelle $f(a)$, so ist $(g \circ f)$ an der Stelle a differenzierbar und es ist*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Um den Beweis einfacher formulieren zu können, möchte ich zuerst eine Bemerkung machen.

Es ist

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + Q_g(f(x)) \cdot |f(x) - f(a)| \\ &= g(f(a)) + (g'(f(a)) \circ f'(a))(x - a) \\ &\quad + |x - a| \cdot [g'(f(a))(Q_f(a)) + |f'(a)(\frac{(x-a)}{|x-a|}) + Q_f(x)| \cdot Q_g(f(x))] \end{aligned}$$

Dies gilt für $x \neq a$. Nennt man den Term in eckigen Klammern $H(x)$ und definiert $H(a) = 0$, so ist dieses H stetig n der Stelle 0. Damit folgt die Behauptung. □

Satz 15.8. *Seien E, F, G drei Banachräume. $\sigma : E \times F \to G$ eine stetige Bilinearform. σ ist differenzierbar an jeder Stelle (a, b) und die Ableitung ist die lineare Abbildung:*

$$E \times F \ni (s, t) \mapsto \sigma(s, b) + \sigma(a, t) \in G$$

$\sigma(a+s, b+t) - \sigma(a, b) = \sigma(a, t) + \sigma(s, b) + \sigma(s, t)$. Nun gibt es eine Konstante c, mit $|\sigma(s, t)| \leq c \cdot |s| \cdot |t|$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Ist $\sup\{|s|, |t|\} < \frac{\epsilon}{c}$ folgt $|\sigma(s, t)| \leq c \cdot |s| \cdot |t| \leq \epsilon \cdot |(c, t)|$ □

15.4 Partielle Ableitung

f bilde die offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ in den Banachraum E ab. f heißt *partiell* nach der i–ten Koordinate an der Stelle a differenzierbar, wenn $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + e_i h) - f(a))$ existiert. Dieser Grenzwert wird mit $\frac{\delta f}{\delta x_i} f(a)$ oder $D_i f(a)$ bezeichnet.
Beispiele:

105. Sei $f(x, y) = cos(x \cdot y)$. Das zugehörige Funktionsgebirge sieht so aus :
     Es ist $D_x f(x, y) = -sin(x, y) * x$ und $D_y f(x, y) = -sin(x, y) \cdot x$

Satz 15.9. *Sei $f : U \to E$ differenzierbar an der Stelle a. Dabei ist U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ist f total differenzierbar an der Stelle $a \in U$, so ist f für $i = 1, \ldots, n$ partiell differenzierbar und es gilt:*

$$f'(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f(a)) \cdot h_i \tag{15.7}$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ ist $h = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i h_i$. Dabei ist $(e_i | i = 1, \ldots, n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$. Es ist

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'(a)(h) + |h| \cdot Q(a+h) \\ &= f'(a)\left(\sum_{i=1}^{n} e_i h_i\right) + |h| Q(a+h) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f'(a)(e_i) h_i\right) + |h| Q(a+h) \end{aligned}$$

Für $h = e_i h_i$ ergibt sich: $f(a + e_i h_i) - f(a) = f'(a)(e_i)h_i + |h_i| Q(a + e_i h_i)$. Teilt man durch h_i und bildet den Grenzwert mit h_i gegen 0 so ergibt sich die Behauptung. □

Bezeichnungen:

- $Df(a) := L = f'(a)$ totales Differential von f an der Stelle a.
- $grad(f, a) : (\frac{\delta f_1}{\delta x_1}(a), \ldots, \frac{\delta f_n}{\delta x_n}) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a))$ = Gradient von f an der Stelle a
- Man kürzt im Sinne der Matrixmultiplikation ab: $Df(a)(h) = L(h) = grad(f, a) \circ h = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(a) h_i = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i$

Satz 15.10. *Sei $r > 0$. f sei für jedes $x \in K(a, r)$ nach jeder Koordinate x_i stetig partiell differnzierbar, dann ist f in a total differenzierbar.*

Beim Beweis wird der Mittelwertsatz entscheidend gebraucht. Er geschieht in 4 Schritten.

1. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n), a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $z = (a_1, \ldots a_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ wobei z_i zwischen x_i und a_i liegt. Dann ist $|z - a| = \sqrt{(z_i - a_i)^2 + \sum\limits_{j=i+1}^{n} (x_j - a_j)^2} \leq |x - a|$. Also ist $z \in K(a, r)$.
2. Sei jetzt $x \in K(a, r)$ und f eine Funktion. Das heißt die Zielmenge ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(z_i) - f(z_{i+1}). \end{aligned}$$

Da f eine Funktion ist, gibt es jeweils β_i zwischen a_i und X_i, so dass gilt:

$$\begin{aligned}(f(z_i) - f(z_{i-1})) &= \frac{\delta \hat{f}_i}{\delta x_i}(\beta_i) \cdot (x_i - a_i) \\ &= \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(a_1, \ldots, a_{i-1}, \beta_i, \ldots x_n)\end{aligned}$$

Es ist also $f(x) - f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(\hat{z}_i)$

mit $\hat{z}_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, \beta_i, \ldots x_n)$.

3. Betrachte $f(x) - f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(a)(x_i - a_i) + R(x-a)$. Zu zeigen ist, dass $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R(x-a)}{|x-a|} = 0$ gilt. Man hat:

$$\begin{aligned}|R(x-a))| &= |f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(a)(x_i - a_i) \\ &= |\sum_{i=1}^{n} (\frac{\delta f_i}{\delta x_i}(\hat{z}_i) - \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(a))(x_i - a_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |(\frac{\delta f_i}{\delta x_i}(\hat{z}_i) - \frac{\delta f_i}{\delta x_i}(a))||(x_i - a_i)|\end{aligned}$$

Ist $\epsilon > 0$ gegeben, dann gibt es wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Punkt a ein $\delta > 0$, so dass gilt: $|x - a| < \delta$ so ist $|D_i(x) - D_i(a)| < \frac{\epsilon}{n}$, für alle $x \in K(a, \delta)$. Also auch für $\hat{z}_i$. Man erhält also: $|R(x-a)| \leq \epsilon/n \cdot n|x-a|$. Da außerdem $|x_i - a_i| \leq |x - a|$ ist folgt die Behauptung. Für den Spezialfall, dass f eine Funktion (Wertebereich ist Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist die Behauptung bewiesen.

4. Sei jetzt f eine beliebige Abbildung. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen. Partiell stetig differnzierbar in $K(a, r) \iff$ Für alle $j = 1, \ldots, m$ ist f_j stetig partiell differenzierbar. Also für alle j ist f_j total differenzierbar. Damit ist f total differenzierbar. □

Spezialfälle und Bezeichnungen

1. Ist f total differenzierbar im Punkt a so ist $Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} D_i(f) \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} D_i(f) \cdot p_i(h)$. Man schreibt nun für p_i, das sind die $i$ten Projektionen auch dx_i. Also ist $Df(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i(f) dx_i$.

2. **Parameterdarstellung:** Ist g eine stetige Abbildung mit $Qu(g) \subset \mathbb{R}$ und $Zi(g) \subset \mathbb{R}^n$, so heißt g Parameterdarstellung und es ist: $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$. Es ist $Dg(t)(h) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t)) \cdot h$. Also $Dg(t) = \frac{\delta g}{\delta t}(t)dt$

3. **Kettenregel für Parameterdarstellung:** Sei g eine Parameterdarstellung und f eine Abbildung mit $Bi(g) \subset \mathbb{R}^n$. Weiter seien f und g differenzierbar. Dann ist $Df \circ g(a) = D(fg(a)) \circ dg(a)$. Schreibt man das ganze mit Argument, so ergibt sich: $D(f(g))(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(g(a)) \cdot \frac{dg_i}{dt}(a)h$. Und für $h = 1$ ergibt sich: $D(f(g))(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(g(a)) \cdot g_i'(a)$.

Jetzt können wir besser Beispiele zur Kettenregel angeben:
Beispiele:

106. Sei $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + 2xy \in R$ und $g : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r \cdot (cos(t), sin(t)) \in \mathbb{R}^2$. Die Verkettung der beiden funktionen erghibt: $h(t) := f(g(t)) = (r\cos(t))^2 + 2(r\cos(t)\sin(t))$. Dies ist eine Funktion in einer Variablen. Leiten wir ab, so erhalten wir: $h'(t) = -2r^2\cos(t)\sin(t) - 2r^2\sin^2(t) + 2r^2\cos^2(t)$ Verwenden wir die Kettenregel, so erhalten wir: $D_x f(x, y) = 2x+2y$ und $D_y f(x, y) = 2x$. Damit ist anch der Kettenregel: $D(f \circ g)(t) = Df(g(t)) \circ g'(t) = (2x + 2y)r(-\sin(t)) + 2xr\cos(t) = -2r^2\cos(t)\sin(t) - 2r^2\sin^2(t) + 2r^2\cos^2(t)$. Wie nicht anders zu erwarten war kommt dasselbe heraus.

Richtungsableitung Sei $f : E \to F$ eine Abbildung und a ein innerer Punkt von $Qu(f)$. Also gibt es ein $r > 0$, so dass $\overline{K(a, r)} \subset Qu(f)$. Ist nun $b \in E$, so gibt es ein $h_0 > 0$, so dass für alle $|h| < h_0$ gilt $a + b \cdot h \in K(a, r)$.

Definition 174. Existiert $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + b \cdot h) - f(a)}{h}$, so heisst dieser Grenzwert Ableitung von f an der Stelle a nach dem Vektor b und wird mit $f_b(a)$ bezeichnet. Ist $|b| = 1$, dann heisst $f_b(a)$ die Richtungsableitung von f an der Stelle a. Waählt man als Spezialfall $b = e_i$ (Im Falle $E = \mathbb{R}^n$) den $i$ten Einheitsvektor der kanonischen Basis, so erhällt man die $i$te partielle Ableitung.

Satz 15.11. *Ist $f : \mathbb{R}^n \mapsto F$ im Punkt a total differenzierbar, so existiert für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f in Richtung b und es ist:*

Aufgaben:

151. Finde bei den folgenden Funktionen alle Stellen a bei denen die Ableitung der Nullhomomorphismus ist. Das sind die sogenannt kritischen Punkte.
    a) $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$.
    b) $f(x, y) = x + y \cdot \sin(x)$.
    c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$.
    d) $f(x, y) = (x + y)e^{-xy}$.
    e) $f(x, y) = xy + xz$.
    f) $f(x, y) = x^2y^2$
    g) $f(x, y) = x^4 + y^2$.
    h) $f(x, y) = (x - y)^4$.
    i) $f(x, y) = x \sin(y)$
    j) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$.
    k) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
    l) $f(x, y) = e^{(x^2+y^2+z^2)}$.

152. a) Sei U eine offene Teilmenge in einem Banachraum. $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dei an der Stelle $a \in U$ differenzierbar ist. Besitzt f an der Stelle a ein lokalen Extremwert, so ist $f'(a)$ der Nullhomomorphismus.

    Lösung: Ich führe den Beweis für den Fall, dass f bei a ein lokales Maximum hat. Im anderen Fall geht der Beweis genauso. U enthält eine Kugel $K(a, r)$ i der $f(a)$ größter Funktionswert ist. Für $|h| < r$ folgt: $f(a + h) - f(a) = Df(a)(h) + |h| \cdot Q(a + h) \leq 0$. Angenommen $Df(a)$ ist nicht die Nullabbildung. Dann gibt es ein x mit $|x| = 1$ und $Df(a)(x) \neq 0$. Betrachten wir die Folge: $(h_n) = \frac{1}{n} \cdot x$. Dann ist $|h_n| = \frac{1}{n}$ und man hat:

    $$\frac{f(a + h_n) - f(a)}{\frac{1}{n}} = Df(a)(x) + Q(a + h_n) \leq 0$$

    Bildet man den Grenzwert für $n \to \infty$ und beachtet, dass $Q(a) = 0$ ist, so folgt $Df(a)(x) \leq 0$. Betrachtet man die Folge $(h_n) = -\frac{1}{n}$, so ergibt sich $Df(a)(x) \geq 0$. Beides zusammen kann nicht sein. Daher gibt es kein x mit $Df(a)(x) \neq 0$. Es ist also $Df(a)$ die Nullabbildung.

    b) Welcher unter allen Quadern mit der Oberfläche a hat das größte Volumen?

    c) Welcher unter allen Quadern, deren Kantensumme a ist, hat das größte Volumen?

d) Nach der heronischen Formel ist der Flächenihalt eines Dreiecks

$$f(x, y, z) = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

Dabei ist s der halbe Umfang. Welches Dreieck hat bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt?

16 Integralrechnung

16.1 Das Integral nach Riemann

16.1.1 Zerlegung in Quader

Seien $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ Elemente aus $\mathbb{R}^n$

Definition 175. $[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} | a_i \leq x_i \leq b_i$ für alle $i\}$ heißt der von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannte Quader.

Folgerung 16.1. *1. $[\vec{a}, \vec{b}] = \emptyset$ genau dann, wenn es ein i gibt mit $a_i > b_i$.*

2. Das Innere von $\overset{\circ}{[\vec{a}, \vec{b}]} = \{\vec{x} | a_i < x_i < b_i\}$

3. Nennt man $A_i = \{\vec{x} | \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]$ und $x_i = a_i\}$ und $B_i = \{\vec{x} | \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]$ und $x_i = b_i\}$. So ist $Rand([\vec{a}, \vec{b}]) = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i)$. Es sind A_i und B_i Quader, deren Inneres leer ist.

4. Der Durchschnitt zweier Quader ist ein Quader. Die Vereinigung zweier Quader ist im allgemeinen kein Quader.

1. Angenommen $a_i \leq b_i$ für alle i. Dann ist $\vec{a} \in [\vec{a}, \vec{b}]$. Gibt es umgekehrt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i > b_i$, so ist für kein x_i: $a_i \leq x_i \leq b_i$. Also ist $[\vec{a}, \vec{b}] = \emptyset$.

2. Sei $\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $K(\vec{x}, r) \subset [\vec{a}, \vec{b}]$. Wir betrachten $\vec{y} = (x_1, \ldots, x_i + r/2, \ldots, x_n)$. Es ist $|\vec{y} - \vec{x}| = r/2$. Also ist $y \in K(\vec{x}, r) \subset [\vec{a}, \vec{b}]$. Wir erhalten $a_i \leq x_i + r/2 \leq b_i$. Daher ist $x_i < b_i$.

   Analog betrachten wir $\vec{y'} = (x_1, \ldots, x_i - r/2, \ldots, x_n)$. Es ist $|\vec{y'} - \vec{x}| = r/2$. Also ist $a_i \leq x_i - r/2 \leq b_i$. Daher ist $a_i < x_i$.

   Sei umgekehrt $a_i < x_i < y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gibt es ein $0 < r$ mit $r < \min\{x_i - a_i, b_i - x_i | i = 1 \ldots n\}$. Dann ist $K(\vec{x}, r) \subset [\vec{a}, \vec{b}]$. Denn sei $\vec{y} \in K(\vec{x}, r)$ und etwa $y_i \geq x_i$. Dann ist $y_i - x_i = |y_i - x_i| \leq |\vec{y} - \vec{x}| < r < b_i - x_i$. Also ist $y_i < b_i$. Ist $y_i \leq x_i$, so ist $x_i - y_i = |y_i - x_i| \leq |\vec{y} - \vec{x}| < r < x_i - a_i$. Also ist $a_i < y_i$. In jedem Fall ist $a_i \leq y_i \leq b_i$. Also ist $\vec{y} \in [\vec{a}, \vec{b}]$. Das heißt $k(\vec{x}, r) \subset [\vec{a}, \vec{b}]$.

3. Es ist $Rand([\vec{a},\vec{b}]) \setminus Inneres([\vec{a},\vec{n}])$. Wenn also $\vec{x}$ ein Randpunkt ist, so muss es mindestens ein i geben mit $x_i = a_i$ oder $x_i = b_i$. Daher ist $\vec{x}$ in mindestens einem A_i oder B_i.

4. Es ist $\vec{x} \in [\vec{a},\vec{b}] \cap [\vec{c},\vec{d}] \iff a_i \leq x_i \leq b_i \wedge c_i \leq x_i \leq d_i$ für alle $i = 1\ldots,n \iff \max\{a_i,c_i\} \leq x_i \leq \min\{b_i,d_i\}$. □

Definition 176. Das Volumen eines Quaders $[\vec{a},\vec{b}]$ ist: $V([\vec{a},\vec{b}]) := \prod_{j=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Bemerkung 28 Das Innere eines Quaders ist leer, genau dann, wenn das Volumen 0 ist. □

Ist $Innen([\vec{a},\vec{b}]) = \emptyset$, so gibt es ein $n \in \{1,\ldots,n\}$ mit $a_i = b_i$. Dann ist $b_i - a_i = 0$. Also ist $\prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = 0$, da ein Faktor $= 0$ ist.

Die Umkehrung gilt auch. Denn ist $0 = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$, so muss ein Faktor $= 0$ sein. Daher ist $a_i = b_i$ für ein i. Das Innere von $[\vec{a},\vec{b}]$ ist also leer. □

Definition 177. Eine Menge A heißt in Quader zerlegbar, wenn es eine endliche Menge von Quadern $(Q_i|i = 1,\ldots,n)$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

1. Je zwei verschieden Quader haben keine inneren Punkte gemeinsam.

2. A ist Vereinigung der Quader.

Die Menge der Quader $(Q_i|i = 1,\ldots,n)$ heißt Zerlegung von A

Satz 16.2. *Ist Q ein Quader und ist $(Q_i|i,\ldots,n)$ eine Zerlegung von Q so ist* $V(Q) = \sum_{i=1}^{n} V(Q_i)$

Besteht die Zerlegung nur aus einem Quader, so ist die Behauptung klar. Gelte die Behauptung für jede Zerlegung der Länge s und sei $Q = \bigcup_{j=1}^{s+1} Q_j$ zerlegt durch die $(Q_j|j = 1,\ldots,s+1)$. Es sei $\vec{a} \in Q_1 = [\vec{a},\vec{c}]$ und $Q_2 = [\vec{d},\vec{e}]$. Dann kann nicht für alle j gelten: $d_j < c_j$, da sonst für $\vec{y}$ mit $y_j = \frac{d_j+c_j}{2}$, $\vec{y} \in Inneres(Q_1 \cap Q_2)$ gelten würde. Als gibt es ein erstes i mit $c_i \leq d_i$. Sei

$$P_1 := \{\vec{x}|a_j \leq x_j \leq b_j \text{ für } i \neq j \text{ und } a_i \leq x_i \leq c_i\}$$
$$P_2 := \{\vec{x}|a_j \leq x_j \leq b_j \text{ für } i \neq j \text{ und } c_i \leq x_i \leq b_i$$

Dann gilt:

1. $V(P_1 \cup P_2) = V(P_1) + V(P_2)$.

   Es ist

$$\begin{aligned} V(P_1) + V(P_2) &= \prod_{j \neq i}(b_j - a_j)(c_i - a_i) + \prod_{j \neq i}(b, -aj)(b_i - c_i) \\ &= \prod_{j \neq i}(b_j - a_j)(b_i - a_i) = V(Q) \end{aligned}$$

2. Ist Q_j beliebig aus der Zerlegung, etwa $Q_j = [\vec{f}, \vec{g}]$, so ist $V(Q_j) = V(P_1 \cap Q_j) + V(P_2 \cap Q_j)$.

   Es gibt drei Möglichkeiten

   a) $g_i \leq c_i$: Dann ist $Q_j \subset P_1$ und also ist $\mathring{Q}_j \subset \mathring{P}_1$. Da $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$ ist auch $\mathring{Q}_j \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$. Daher ist $V(Q_j) = V(Q_j \cap P_1) + 0 = V(Q_j \cap P_1) + V(Q_j \cap P_2)$.

   b) $f_i \geq c_i$: Dann $\square$

Stichworte

$K^{(X)}$, 140
$[U]$= kleinste abgeschlossene Teilmenge, die U enthält. , 36
$\widehat{\mathcal{S}}$ = Kategorie der Mengen mit Selbstabbildung., 46
$\bigsqcup_{i\in I} X_i$= elementfremde Vereinigung., 18
arccos, 282
arcsin(x), 282
$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen, 31
$\mathbb{R}$=Menge der reellen Zahlen, 31
Äquivalenrelation
    verträglich mit α, 47
Äquivalenzklasse, 18
Äquivalenzrelation, 18
Äquivalenzsatz von Bernstein, 102

Abbildung
    monoton wachsend, 161
    n-flache, 126
    ordnungstreu, 161
abgeschlossen, 198
    gegen α, 109
abgeschlossen gegen f, 35
abgeschlossene Hülle, 232
Ableitung
    Arcustangens, 266
Ableitung von f, 341
additive Schreibweise., 54
Algebra
    einstellige, 31
        freie, 62
        projektive, 62
    normierte, 336
Anfangsobjekt, 46
Antikette, 113
Aristoteles, 92
Augustinus, 66, 85
Auswahlaxiom, 16, 21, 216
Axiom
    Auswahlxiom, 21
    Paarmengenaxiom, 9
    Potenzmengenaxiom, 10
azyklisch, 85

Bahn, 36
    ohne Wiederkehr, 85
Banachalgebra, 336
Basis, 59
Berührpunkt, 215, 232
berührt, 232
Bernstein, 102
Betrag, 165
bijektiv
    Korrespondenz, 14
Bild
    epimorphes, 66
Bildmenge, 123
    Korrespondenz, 12
Bizette, 194
Bolzano Bernhard, 90
Bruno Giordano, 91
Busch
    Wilhelm, 94

Cantor
    Georg, 64, 91
Cauchy Kriterium, 286
Cauchyfolge, 191, 238
Champaux Wilhelm, 6

Darboux Summe, 272
Dedekind, 63
Definitionsbereich

Korrespondenz, 12
Descartes, 138
dicht, 233
Differentialgleichung
explizit, 310
getrennte Variable, 310
differenzierbar, 340
Differenzkerne, 55, 56
Differenzkokern, 55, 56
Differntial
totales, 346
disjunkt, 8
Diskriminante, 170
Dreiecksungleichung, 145, 166
Dreifaltigkeit, 7
Dreipunkteform
Ebene, 153
Durchschnitt, 7
dynamisches System
diskretes, 31

Ebene
durch den Nullpunkt, 151
einfach unendlich, 66
Einheitsvektor, 146
Element
minimales, 77
Endobjekt, 46
Endomap, 46
epiunendlich, 65
Erzeugendensystem, 37
einer einstelligen Algebra, 36
Euler, 173
eulersche Zahl, 199
extensiv, 115
extremal, 116

f-abgeschlossen, 35
fast ebener Raum
einfacher, 130
endlich erzeugt, 130
Feigenbaumdiagramm, 34
Fibonacci-Zahlen, 33
Fibonaccifolge, 141
Fixpunkt, 219
Fixpunktsatz, 43
Brouwer, 249
von Banach, 238
von Bourbaki, 118
Folge
beschränkte, 182
konvergente, 184
frei bezüglich B, 58
Fundamentalfolge, 191
fundiert
Menge, 114
Funktion, 15
differenzierbare, 265
ganze, 329
stetig, 217
Funktionsalgebra
n-stellige, 105
Funktor
kovarianter Potenzmengenfunktor, 123
Potenmengenfunktor
kontravariant, 25
treu, 24

Galilei, 91
Gebiet, 327
gefiltert
nach oben, 179
nach unten, 180
Gerade, 141
in der Ebene, 137
Gerade und Kreis, 136
Geraden
parallele, 142
Gernzwert
Folgendefiinition, 216
Gleichheit
von Mengen, 5
gleichmäßig stetig, 333
gleichmässig stetig, 236
Graph
gerichteter, 32, 109
Grenzfunktion, 284
Grenzwert
einer Folge, 184

einer Funktion, 216
UmgebungsDefinition, 216
Gruppe
abelsche, 65
Gruppoid, 104

Häufungspunkt, 233
Halbordnung, 113
Hausdorff, 10
Heidegger, 93
heronische Formel, 350
Hilbert, 64
Homomorphismus, 55, 130
einstelliger Algebren, 45
homotop, 250
Homotopie, 250
Homotopieklasse, 251

Inklusionsabbildung, 59
innerer Punkt, 231
integrierbar, 273
Integritätsring, 66
isolierter Punkt, 233

Körper
archimedisch, 184
vollständig, 197
Kategorie, 15
Produkt, 23
Kegel, 176
Kern, 156
Kette, 31, 54, 113
einfach, 54
Kreis, 54
freie, 62
Kettenregel, 267, 345
koabgeschlossen, 35
Kogenerator, 82
kompakt, 198
Komplementmenge, 8
konkav, 305
konvergent, 232
Konvergenz
punktweise, 241
Konvergenzradius, 215
konvergiert
gleichmäßig, 285
konvex, 175, 305
nach oben, 270
konvex Hülle, 175
Koprodukt, 19
Korrespondenz, 12
Verkettung, 13
kounendlich, 65
Kriterium
Leibniz, 214
Kuratowski, 9
Körper
reell abgeschlossen, 171
Körper'
maximal geordneter, 171

Lagrange, 173
Lemma von Sperner, 247
linear abhangig, 141
linear unabhangig, 141
Linearkombination, 153
Liouville, 330
Lisp
menge(a), 11
union(a b), 11
lokaler Ring, 337
Lukrez, 90

Magma, 104
Majorantenkriterium, 213
maximal
in V, 113
Menge, 31
abgeschlossene, 198
endlich, 63
kompakte, 198
leere, 5
offene, 198, 231
Mengen
disjunkte, 8
metrischer Raum, 230
minimal
in V, 113
minimales Element, 77

Mittelwertsatz
verallgemeinerter, 270
Monoid
halbgeordnet, 160
Homomorphismus, 71
kürzbar
kommutativ, 71
prägeordnet, 160
regulärer
kommutativer, 71
Monomorphismus, 65
Morphismus, 45

Netz, 180
konvergentes, 181
Neutralelement, 54
Norm, 144, 335
normierter Raum, 231
Nullfolge, 183
Nullnetz, 181
Nullobjekt, 46

offen, 198, 230
offene Menge, 231
offene Überdeckung, 239
Orbit, 36
ordentliche Erweiterung, 167
Ordnung, 77
orthogonal, 146
Orthogonalraum, 146

Paar, 9
Paarmengenaxiom, 9
parallel
Ebenen, 152
parallele
Geraden, 142
Pfeile, 142
Parameterdarstellung, 312, 343, 348
äquivalente, 312
Parameterform
der Ebene, 152
Partialsumme, 213
partielle Ableitung, 345
Partition, 18

Polygon, 255
geschlossen, 255
Porphyrius, 6
Potenz, 76
Potenzmenge, 123
Potenzreihe, 214
Potenzreihen, 214
Prinzip
Maximum, 329
Produktregel, 265
Ptolemäus, 204
Punkt
innerer, 231
Punkt Richtungsform
der Ebene, 152

Quelle
Korrespondenz, 12
Quotientenkriterium, 213
Quotientenregel, 265

Raum
metrischer, 230
normierter, 231
Reihe, 213
konvergente, 213
rektifizierbar, 281, 313
Relation, 109
Relationsalgebra
einstellige, 109
Relationsmorphismus, 131
Restglied
Cauchy, 297
Lagrange, 298
Ring
halbgeordnet, 162
linear geordnet, 165
totalgeordnet, 165
Rolle, 269

Satz
Taylor, 326
von Bernstein, 102
Satz:von Rolle, 172
schließlich positiv, 180

Sekantensteigung, 264
separabel, 240
Skalarprodukt, 145
Sperner, 247
Sternbereich, 325
stetig, 234
    ln, 217
    an der Stelle a, 234
    gleichmäßig, 220
Summe
    von Unterräumen, 156
surjektiv
    Korrespondenz, 14

Tangente, 264, 305
Taylorentwicklung, 297
Teilfolge, 183, 188
Teilklasse, 4
Teilmenge, 4
    bewchränkt, 87
Theorem
    Artin Schreier, 168
Topologie, 230
total differenzierbar, 340
Treppenfunktion, 314

Umgebung, 232
    eines Punktes, 217
unendlich, 63
Ungleichung
    Cauchy, 174
    Cauchy,Schwarz, 145
Untermonoid, 71
Unterraum, 146

Vektor, 140
Vektorraum, 139, 140
    normiert, 335
Vereinigung, 7
    disjunkt, 16
    elementfremde, 19
Verfeinerung, 272
Verknüpfungsgebilde, 104
Verschwindungspunkt, 160
vollständiger
    metrischer Raum, 243
Volumen
    Quader, 352
von A erzeugter Unterraum, 155

Weg
    in α, 112
    rektifizierbar, 314
Wiederkehr, 85
windschief, 150, 228
Wurzelkriterium, 214

Zarathustra, 83
Zerlegung, 272, 352
Ziel
    Korrespondenz, 12
Zweipunkteform, 142
Zwischenwertsatz, 218
zählbar, 86

15. März 2017

Personen

A
Abel 44
Anselm von Canterbury 6
Aristoteles 6, 93
Aryabhata 33
Augustinus 93

B
Bernstein 42
Bernstein Felix 41
Bernstein Felix 43
Boethius 6
Bruno Giordano 91, 93

C
Cantor
    Georg 7
Cantor Georg 2, 41–43
Cavaillés-Paris 43

D
Dedekind Richard 2, 31, 42 f.
Descartes René 135, 225 f.
Descartes René 92

F
Fraenkel 1

G
Galilei 226
Gast Peter 83
Gauß 4, 7

H
Hausdorff Felix 3
Heidegger 5, 93
Hilbert David 63

J
Johannes Scotus 6

K
Kronecker 3 f.
Kuratowski Kazimierz 9

N
Nelböck 96
Nietzsche 83
Noether Emmy 42

P
Petrus 34
Plotin 6

R
Roscellanus von Compiègne 6

S
Schlick Moritz 96
Schumacher 7

W
Wagner Richard 83
Wilhelm von Champaux 6

X
Xenophanes 1

Z
Zermelo 1

Orte

R
Recoaro 83

S
Silvaplana 83
Soissons 7
Surlei 83

V
Venedig 83
Vicenza 83

Literatur

Aquin, Thomas von. *Summe gegen die Heiden.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft erster Band, 1974.

Aristoteles. *Acht Bücher Physik.* Leibzig: Wilhelm Engelmann, 1854.

Augustinus, Aurelius. *Vom Gottesstaat Buch 11 bis 22.* München: DTV, 1978.

Bayern, Evangelisch-Lutherische Kirche in, Hrsg. *Evangelisches Gesangbuch.* Evangelischer Presseverband in Bayern, 2005.

Becker, Oskar. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* Freiburg: suhrkamp, 1975.

Bender, Ernst, Hrsg. *Deutsche Dichtung der Neuzeit.* Karlsruhe: Braun, 1968.

Beuron, Erzabtei, Hrsg. *Die Bibel. Die heilige Schrift des alten und neuen Testamentes.* Herder, Aug. 1965.

Brieskorn, Egbert, Hrsg. *Felix Hausdorff zum Gedächtnis.* Bd. 1. Vieweg, 1996.

Capelle, Wilhelm, Hrsg. *Die Vorsokratiker.* Stuttgart: Kröner, 1968.

Dedekind, Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen.* Vieweg, 1965.

Deiser, Oliver. *Einführung in die Mengenlehre.* 2. Berlin Heidelberg: Springer, 2004.

Ebbinghaus und al. *Zahlen.* Springer, 1992.

Fricke, Robert, Emmy Noether und "Oystein Ore, Hrsg. *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke.* Braunschweig: Vieweg, 1930.

– Hrsg. *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke.* Bd. 3. Braunschweig: Vieweg, 1930.

Gottwald, Hrsg. *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Harri Deutsch, 1990.

Harrison, Edward R. *Kosmologie.* Darmstädter Blätter, 1983.

Herbert Meschkowski, Winfried Nilson, Hrsg. *Georg Cantor Briefe.* Springer, 1991.

J.Dieudonné. *foundation of modern analysis.* Academic Press, 1969.

Kertéz, Andor. *Georg Cantor 1845- 1918 Schöpfer der mengenlehre.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1983.

Lang, Serge. *Analysis.* Amsterdam: Inter European Editions, 1977.

Lawvere, F. William und Stephen H.Schanuel. *Conteptual Mathematics, A first introduction to categories.* Cambridge Univerty Press, 1997.

Lehmann-Leander, Ernst R., Hrsg. *Aristoteles Analytiker der Wirklichkeit.* Vollmer Verlag, 1955.

Macho, Thomas H., Hrsg. *Sartre*. DTV, 1998.

Manfred, Geier. *Der Wiener Kreis*. Rowohlt, 1995.

Otto Schreier, Emil Arin und. „Algebarische Konstruktion reeller Körper“. In: *Abh.Math. Sem.Univ.Hamburg* (1927), S. 85–99.

Querenburg, Boto von. *Mengentheoretische Topologie*. Berlin Heidelberg New York: Springer, 1973.

Rotman, Joseph J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Berlin Heidelberg: Springer, 1988.

Rucker, Rudy. *Die Ufer der Unendlichkeit*. Frankfurt am Main: Wolfgang Küger Verlag, 1989.

Sambursky, Shmuel, Hrsg. *Der Weg der Physik*. Deutscher Taschenbuch Verlag, 1978.

Semendjajew, Bronstein und. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt: Harri Deutsch, 1979.

Störig, Hans Joachim. *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*. Fischer, 1975.

15. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre **1**

1.1 Klassen . . . 2

1.1.1 Was ist eine Klasse . . . 2

1.1.2 Bemerkungen, Lesefrüchte . . . 5

1.1.3 Operationen mit Mengen . . . 7

1.1.4 Paarmenge und Potenzmenge . . . 9

1.1.5 Rechnen in Lisp mit Mengen . . . 10

1.2 Beziehungen . . . 12

1.2.1 Korrespondenzen . . . 12

1.2.2 Funktionen . . . 15

1.2.3 Zerlegung von Mengen . . . 16

1.2.4 Partitionen, Äquivalenzrelation . . . 18

1.2.5 Fasersumme . . . 21

1.2.6 Auswahlaxiom . . . 21

1.2.7 Produkt von Mengen . . . 23

1.2.8 Rechnen in Lisp mit Korrespondenzen . . . 28

2 Ketten **33**

2.1 Begriff, Beispiele und Erzeugung . . . 33

2.2 Der Satz von Dedekind, Cantor, Bernstein: . . . 43

2.3 Morphismen . . . 46

2.3.1 Definition und einfache Eigenschaften . . . 46

2.3.2 Zyklische Ketten . . . 53

2.3.3 Koprodukt von Ketten . . . 59

2.3.4 Produkt von Ketten . . . 60

2.4 Rekursionssatz . . . 60

2.5 Unendliche Mengen . . . 65

2.6 Die natürlichen Zahlen als Monoid . . . 71

2.7 Besondere Eigenschaften von $\overset{\frown}{\mathcal{S}}$ . . . 73

2.7.1 Monomorphismen, Epimorphismen . . . 73

2.7.2 Projektive Ketten . . . 73

2.7.3 Injektive Ketten . . . 74

2.8 Multiplikation 74
2.8.1 Konstruktive Durchführung der Multiplikation 79
2.8.2 Potenzrechnung 79
2.8.3 Ordnung 79
2.8.4 Andere Kennzeichnung der Unendlichkeit 85
2.8.5 Gelesenes Gedanken 91
2.9 Ketten mit bijektiver Strukturabbildung 100
2.10 Der Satz von Schroeder Bernstein 106

3 Magmen **108**
3.1 Definition Beispiele 108
3.2 Freies Magma 109
3.3 Mehrstellige Funktionsalgebren 110

4 Relationen und Graphen **113**
4.0.1 Definition und Beispiele 113
4.0.2 Transitive Relationen 114
4.0.3 Halbordnung 117
4.1 Konstruktion von Zahlmengen 123
4.1.1 Die ganzen Zahlen 123
4.1.2 Die rationalen Zahlen 123
4.2 Ordnungen 125
4.2.1 Das Zornsche Lemma 125
4.2.2 Der Wohlordnungssatz 126

5 Ebene Strukturen **127**
5.1 Flache Räume 127
5.1.1 Die beiden Potenzmengenfunktoren 127
5.1.2 Heiratssatz 128
5.1.3 Flache Abbildungen 130
5.2 Unterstrukturen 133
5.3 Homomorphismen 134
5.4 Rekursion für Funktionsalgebren 137

6 lineare Algebra **139**
6.1 Erster Blick 139
6.2 Vektorräume 142
6.3 Geraden in V 145
6.4 Das natürliche Skalarprodukt 148

6.5 Ebenen . . . 155
6.5.1 Ebenen im K^n . . . 155
6.6 Basis Dimension . . . 159
6.7 Projektive Geometrie . . . 161
6.7.1 Perspektive . . . 161
6.8 Angeordnete algebraische Strukturen . . . 164
6.8.1 Angeordnete Gruppen . . . 164
6.8.2 Angeordnete Körper . . . 165
6.8.3 Erweiterungen von geordneten Körpern . . . 171
6.8.4 Algebraische Erweiterung geordneter Körper . . . 173
6.8.5 Maximal geordnete Körper . . . 175
6.8.6 Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper . . . 177
6.9 Vektorräume über angeordneten Körpern . . . 177
6.9.1 Vektorräume über geordneten Körpern . . . 178
6.9.2 Konvexe Mengen . . . 178

7 Topologie der Geraden 183
7.1 Folgen . . . 183
7.1.1 Netze in angeordneten Körpern . . . 183
7.1.2 Konvergente Netze . . . 186
7.1.3 Archimedische Körper . . . 187
7.1.4 Konvergente Folgen . . . 188
7.1.5 Teilfolgen . . . 191
7.1.6 Fundamentalfolgen . . . 194
7.1.7 Der Ring der Fundamentalfolgen . . . 196
7.1.8 Vollständigkeit der reellen Zahlen . . . 198
7.1.9 Konstruktion der reellen Zahlen . . . 204
7.1.10 Der natürliche Logarithmus . . . 204
7.1.11 Arcustangens . . . 206
7.1.12 Reihen . . . 217
7.1.13 Potenzreihen . . . 218
7.2 Funktionen und Grenzwerte . . . 219
7.2.1 Grenzwerte von Funktionen . . . 219
7.2.2 Stetige Funktionen . . . 221
7.2.3 Gleichmäßig stetige Funktionen . . . 226
7.2.4 Exponentialfunktion . . . 228
7.2.5 Trigonometrische Funktionen . . . 228
7.2.6 Kontraktionen . . . 228

8 Die Ebene **230**
8.1 Koordinaten . . . 230
8.1.1 Kreise . . . 230
8.1.2 Ellipsen . . . 231
8.1.3 Hyperbeln . . . 231
8.1.4 Descartes . . . 231
8.1.5 Isometrien . . . 235
8.1.6 Drehstreckungen. Die komplexen Zahlen . . . 235
8.1.7 Bewegungen . . . 235
8.1.8 Affine Abbildungen . . . 235
8.2 Mengentopologie . . . 235
8.2.1 Topologische Räume und stetige Funktionen . . . 235
8.2.2 Metrische Räume . . . 236
8.2.3 Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz . . . 247
8.3 Parameterdarstellungen . . . 248
8.3.1 Kurven . . . 248
8.3.2 Zusammenhang . . . 249
8.3.3 Wegzusammenhang . . . 249
8.3.4 Sierpinky Kurven . . . 251
8.3.5 Peano Kurven . . . 251
8.3.6 Fraktale Dimension . . . 251
8.4 Stetige ebene Funktionen . . . 251
8.4.1 Fixpunktsatz von Brouwer in zwei Dimensionen . . . 251
8.4.2 Homotopie . . . 255
8.4.3 Abbildungsgrad . . . 258
8.4.4 Satz von Borsuk Ulam . . . 267
8.5 Topologie des Raumes . . . 269

9 Differentialrechnung **270**
9.1 Ableitung einer Funktion . . . 270
9.1.1 Definition und Beispiele . . . 270
9.1.2 Umkehrfunktion . . . 274
9.2 Der Mittelwertsatz . . . 276

10 Integralrechnung **278**
10.1 Begriff des Integrales . . . 278
10.2 Integrierbare Funktionen . . . 279
10.3 Hauptsatz . . . 282
10.3.1 Uneigentliche Integrale . . . 285
10.3.2 Bogenlänge . . . 287

10.4 Folgen und Reihen von Funktionen 290
10.4.1 Gleichmäßige Konvergenz 290
10.4.2 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz 291
10.4.3 Vertauschung von Limesprozessen 293
10.4.4 Anwendung auf Potenzreihen 299
10.5 Taylorentwicklung 302
10.5.1 Der taylorsche Satz 302
10.5.2 Die Taylorentwicklung der elementaren Funktionen . . . 304
10.5.3 Anwendung auf die Kurvendiskussion 311
10.5.4 Unbestimmte Ausdrücke 313

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen 316
11.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung 316
11.1.1 Explizite Differentialgleichungen 316

12 Funktionentheorie 318
12.1 Analytische Funktionen 318
12.1.1 Differenzierbare Funktionen 318
12.1.2 Analytische Funktionen 318
12.1.3 Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen 318
12.2 Integrationstheorie 318
12.2.1 Wegintegrale 318
12.2.2 Cauchys Integralsatz und seine Integralformel 330
12.3 Analytische Funktionen als Potenzreihen 331
12.3.1 Integration gleichmäßig konvergenter Reihen 331
12.3.2 Identitätssatz für analytische Funktionen 333
12.3.3 Prinzip vom Maximum 334
12.4 Ganze Funktionen 335
12.4.1 Allgemeine Eigenschaften 335
12.4.2 Fundamentalsatz der Algebra 336
12.4.3 Verhalten von ganzen Funktionen für $|z| \to \infty$ 337
12.5 Laurententwicklung und Singularität 338
12.5.1 Existenz der Laurententwicklung 338
12.5.2 Singularitäten 338

13 Banachräume und Banachalgebren 339
13.0.1 Stetige Abbildungen 339
13.0.2 Der Fixpunktsatz von Banach 340
13.1 Banachräume 341
13.2 Banachalgebren 342

13.3 Potenzreihen in Banachalgebren 342

14 Hilberträume **344**
14.1 Hermitesche Formen 344

15 Differentialrechnung in Banachräumen **345**
15.1 Stetig lineare Abbildungen 345
15.2 Die Ableitung einer Funktion 346
15.3 Formale Ableitungsregeln 350
15.4 Partielle Ableitung 351

16 Integralrechnung **357**
16.1 Das Integral nach Riemann 357
16.1.1 Zerlegung in Quader 357

Stichworte **360**

Personen **365**

Orte **366**

Literatur **i**

15. März 2017